数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 182-187

Symplectic-fermionic 頂点作用素超代数[1]

安部利之（愛媛大学理学部）

1 序

頂点作用素代数の表現論において重要な概念である「有理性」と「C_2-有限性」は，格子頂点作用素代数，アフィン頂点作用素代数，そして Virasoro 頂点作用素代数といったよく知られている例において，一方の性質を持てばもう一方の性質を持つという関係にある．そのため，10 年ほど前には「有理性」と「C_2-有限性」は同値な概念であると予想されていた．しかし物理の分野では，有理性を満たさないが，有理的共形場理論のもつ性質を持つ頂点作用素代数の存在が見いだされており，これらの性質は C_2-有限性から導かれることがこの数年でわかってきたので，この頂点作用素代数が「有理性=C_2-有限性」という予想の反例を与えると考えられていた．そのような頂点作用素代数として知られているのが，triplet 代数であり， Gaberdiel や Kausch らによってその性質が詳しく調べられている（例えば [GaKa], [Kau] を参照)．しかし，triplet 代数が C_2-有限であることが証明されたのはつい最近で [CF] においてなされている．

この triplet 代数の $c=-2$ の場合の実現として知られているのが，symplectic fermion の対を用いた構成法であり，その構成法を詳しく見てみると対の数を増やすという意味で一般化できることがわかった．そこで，その一般化した構成法で得られる頂点作用素代数の構造を調べることにより，その頂点作用素代数が C_2-有限で非有理な頂点作用素代数を与えることを証明した ([A])．以上の内容の話については 2005 年 6 月，愛媛大で行われた「第 22 回代数的組み合わせ論シンポジウム」の報告集も参考されたい．本報告集では，その頂点作用素代数の構成の途中に現れる頂点作用素超代数の構造について概説する．C_2-有限性や有理性の概念は頂点作用素超代数においても拡張され，頂点作用素代数と類似した性質を導くことが知られている．ここで構成する頂点作用素超代数は C_2-有限であるが非有理であることも証明でき，既約加群の分類，その指標，そのモジュラー不変性について述べる．

2 定義

以下体は複素数体 $\mathbb{C}$ とする．頂点作用素超代数とは，$\mathbb{Z}_2$-次数付けと $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-次数付けを併せもつベクトル空間 $V=V^{\bar{0}}\oplus V^{\bar{1}}=\bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}V_n$ で $V=\bigoplus_{\bar{i}\in\mathbb{Z}_2,n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}(V^{\bar{i}}\cap V_n)$ を満たすものと線形写像 $Y(\,\cdot\,,z):V\to\mathrm{Hom}\,(V,V((z)))$ 及び $\mathbf{1}\in V^{\bar{0}}\cap V_0$, $\omega\in V^{\bar{0}}\cap V_2$ からなる組 $(V,Y(\,\cdot\,,z),\mathbf{1},\omega)$ でいくつか公理を満たすものとして定義される (例えば [X] 参照)．特に，$\mathbf{1}$ は真空ベクトルと呼ばれ，$Y(\mathbf{1},z)$ が V 上の恒等写像を与

[1]2005 年 10 月 5 日「代数的組み合わせ論とその周辺」(京都大学数理解析研究所)

え，ω は Virasoro 元とよばれ $Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$ とおくと，$\{L_n,\mathrm{id}\}$ は V 上に Virasoro 代数の表現を与えるものである．更に各斉次空間 V_n は L_0 の固有値（**重み**）n の有限次元固有空間となっている．以下 $Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}z^{-n-1}$ と書くことにする．多くの文献では $V^{\bar{0}}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ と $V^{\bar{1}}=\bigoplus_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}V_n$ が仮定されているが，本報告集で扱う頂点作用素超代数はこの性質を満たさず，すべての $n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ に対し，$V_n=0$ となっているので，ここでは仮定しない．

頂点作用素超代数の加群とは，$\mathbb{Z}_2$-次数の付けを持つベクトル空間と線形写像 $Y(\cdot,z):V\to\mathrm{Hom}\,(M,M((z)))$ の組で局所超可換性と結合性を満たすものである ([X] 参照)．通常，加群と呼ぶ時には L_0 の作用が対角的であり，その固有空間が有限次元ということが仮定されるが，ここでは簡単のためこの仮定を満たさないものも加群とよぶことにする（通常弱加群と呼ばれている）．

さて C_2-有限性と有理性の定義を思い出す．

定義 1. V をすべての重みが整数であるような頂点作用素超代数とし，$C_2(V)$ を $a_{(-2)}b\,(a,b\in V)$ の形の元で張られる V の部分空間とする[2]．$V/C_2(V)$ が有限次元となるとき，V は C_2-**有限**であるという．

定義 2. V をすべての重みが整数であるような頂点作用素超代数とする．$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-次数付けを持つ V-加群 $M=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_n$ で

$$a_{(n)}M_m\subset M_{k+m-n-1}\,(a\in V_k,m,n\in\mathbb{Z})$$

を満たす物が常に完全可約であるとき，V は**有理的**であるという．

頂点作用素超代数が C_2-有限ならば，有理的であることと加群が完全可約であることは同値であることが知られている．

頂点作用素代数に対し構成される Zhu 代数と呼ばれる結合代数は，頂点作用素超代数に対しても構成が拡張される．半整数重みを持つ場合には変更が必要だが，整数重みのみを持つ場合にはその構成法は頂点作用素代数と全く同様にしてなされる．具体的には V の $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{(i-2)}b\,(k\in\mathbb{Z},\,a\in V_k,\,b\in V)$ の形の元で張られる部分空間を $O(V)$ と表し，$O(V)$ による V の商空間を $A(V)$ とおく．元 $a\in V$ の $A(V)$ における像を $[a]$ で表すと，$A(V)$ には，$[a]*[b]=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}[a_{(i-1)}b]$ $(k\in\mathbb{Z},$ $a\in V_k,\,b\in V)$ によって結合代数の構造が入る．また $[\mathbf{1}]$ は単位元を与え，$[\omega]$ は $A(V)$ の中心に属する．次の命題も成立する (cf. [Z])．

命題 1. *(1)* 写像 $M\mapsto\Omega(M):=\{u\in M\,|\,a_{(k+i)}u=0\,(k\in\mathbb{Z},a\in V_k,i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})\}$ は頂点作用素超代数 V の既約加群の同値類の集合と $A(V)$ の既約加群の同型類の集合の間の全単射を誘導する．

(2) 頂点作用素超代数 V が有理的ならば，$A(V)$ は半単純である．

[2]半整数の重みを持つ場合には少し修正が必要である．

3 Symplectic-fermionic 頂点作用素超代数

有限次元ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ とその上の非退化歪対称双線形型式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を考える．このとき $\mathfrak{h}$ は偶数次元となるので，以下，

$$d = \frac{\dim \mathfrak{h}}{2} \, (\in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とおくことにする．このとき，$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K$ には偶部分を $\mathbb{C}K$，奇部分を $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ とし，交換関係を

$$[\psi \otimes t^m, \phi \otimes t^n]_+ = m\langle \psi, \phi \rangle \delta_{m+n,0} K, \quad [K, \widehat{\mathfrak{h}}] = 0$$

と定義することによって Lie 超代数の構造が入る．Lie 超代数 $\widehat{\mathfrak{h}}$ の普遍包絡代数 $U(\widehat{\mathfrak{h}})$ を $K-1$ で生成されるイデアル $\langle K-1 \rangle$ で割って得られる結合代数

$$\mathcal{A} = U(\widehat{\mathfrak{h}})/\langle K-1 \rangle$$

には，$\widehat{\mathfrak{h}}$ の $\mathbb{Z}_2$-次数付けから自然に $\mathbb{Z}_2$-次数付けが誘導されることがわかる．

この超代数 $\mathcal{A}$ の商代数として頂点作用素超代数を構成する．代数 $\mathcal{A}$ の $\psi \otimes t^n$ ($\psi \in \mathfrak{h}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の形の元から生成される左イデアル $I_{\geq 0}$ を考え，その左イデアルで割って得られる左 $\mathcal{A}$-加群 $\mathcal{A}/I_{\geq 0}$ を SF とかくことにする:

$$SF = \mathcal{A}/I_{\geq 0}.$$

以下，$\psi \otimes t^n$ ($\psi \in \mathfrak{h}, n \in \mathbb{Z}$) の SF 上の左作用を $\psi_{(n)}$ と書く．このとき構成法からベクトル空間として SF は外積代数 $\Lambda(\mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$ に同型で，$v = \psi^1_{(-n_1)} \cdots \psi^r_{(-n_r)} \mathbf{1}$ ($\psi^i \in \mathfrak{h}, n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の元達で張られることがわかる，但し，真空ベクトル $\mathbf{1}$ は

$$\mathbf{1} = 1 + I_{\geq 0}$$

で定義されるベクトルである．このベクトル v に対し，対応する頂点作用素は，

$$Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}, \tag{1}$$

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{(n)} z^{-n-1}, \ (\psi \in \mathfrak{h}), \tag{2}$$

$$Y(v, z) = \,\mathop{\circ}\limits^{\circ} \partial^{(n_1-1)} \psi^1(z) \cdots \partial^{(n_r-1)} \psi^r(z) \mathop{\circ}\limits^{\circ} \tag{3}$$

で与えられる．ここで $\partial^{(n)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n$ で，正規積は $\mathop{\circ}\limits^{\circ} \psi_{(n)} \mathop{\circ}\limits^{\circ} = \psi_{(n)}$ と

$$\mathop{\circ}\limits^{\circ} \psi_{(n)} \psi^1_{(n_1)} \cdots \psi^r_{(n_r)} \mathop{\circ}\limits^{\circ} = \begin{cases} \psi_{(n)} \mathop{\circ}\limits^{\circ} \psi^1_{(n_1)} \cdots \psi^r_{(n_r)} \mathop{\circ}\limits^{\circ} & \text{if } n < 0, \\ (-1)^r \mathop{\circ}\limits^{\circ} \psi^1_{(n_1)} \cdots \psi^r_{(n_r)} \mathop{\circ}\limits^{\circ} \psi_{(n)} & \text{if } n \geq 0 \end{cases}$$

によって帰納的に定める．Virasoro 元は，$\mathfrak{h}$ の基底 $\{e^i, f^i\}_{i=1,2,\ldots,d}$ で

$$\langle f^i, e^j\rangle = -\langle e^j, f^i\rangle = \delta_{i,j}, \quad \langle f^i, f^j\rangle = \langle e^i, e^j\rangle = 0 \tag{4}$$

を満たすものに対し，

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} e^i_{(-1)} f^i_{(-1)} \mathbf{1}$$

で与えられる．このようにして，組 $(SF, Y(\cdot, z), \mathbf{1})$ に頂点作用素超代数の構造が定義できる．頂点作用素超代数 SF の中心電荷は $c_{SF} = -2d$ で，その重みは常に非負整数である．このようにして得られる頂点作用素超代数を **symplectic-fermionic 頂点作用素超代数**と呼ぶことにする．この頂点作用素超代数の $d = 1$ の場合の偶部分 SF^+ が $c = -2$ triplet 代数の実現を与えることが知られている．

まず容易にわかる事実として次の命題を得る．

定理 1. 頂点作用素超代数 SF は C_2-有限である．

証明　ベクトル $\psi^1_{(-n_1)} \cdots \psi^r_{(-n_r)} \mathbf{1}$ $(\psi^i \in \mathfrak{h}, n_i \in \mathbb{Z}_{>0})$ はある n_i が 2 以上ならば $C_2(SF)$ に属するので全射線形写像

$$\Lambda(\mathfrak{h}) \to SF/C_2(SF),\ \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r \mapsto \psi^1_{(-1)} \cdots \psi^r_{(-1)} \mathbf{1} + C_2(SF) \quad (\psi^i \in \mathfrak{h})$$

を得る．従って，$SF/C_2(SF)$ は有限次元となる．　□

頂点作用素超代数 SF の Zhu 代数は次のようになることがわかる．

定理 2. 代数の同型写像 $A(SF) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\mathfrak{h})$ が存在する．特に，SF は非有理である．

証明　写像 $f : \Lambda(\mathfrak{h}) \to A(SF)$ を

$$f(\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r) = [\psi^1_{(-1)} \cdots \psi^r_{(-1)} \mathbf{1}] \quad (\psi^i \in \mathfrak{h})$$

で定義すると，これは全射であることがわかる．単射であることは，以下で構成する SF-加群 $\widehat{SF}$ に対し，$A(SF)$-加群 $\Omega(\widehat{SF})$ が準同型 f を経由して $\Lambda(\mathfrak{h})$ 加群と見た時に，$\Lambda(\mathfrak{h})$ の左正則表現と同型になることからわかる．　□

命題 1 より次の系を得る．

系 1. 任意の既約 SF-加群は SF に同型である．

また，一般に頂点作用素超代数 V に対し，$\dim V/C_2(V) \geq \dim A(V)$ が成立するので次の系も明らかである．

系 2. 次のベクトル空間の同型が存在する：

$$SF/C_2(SF) \cong A(SF) \cong \Lambda(\mathfrak{h}).$$

実際には，$V/C_2(V)$ には (-1)-積により超可換代数の構造が入り，上の同型は代数としての同家であることもわかる．

定理 2 の証明において用いた SF-加群 $\widehat{SF}$ は次のように構成できる．$I_{>0}$ を $\mathcal{A}$ の $\psi\otimes t^n\,(\psi\in\mathfrak{h}, n\in\mathbb{Z}_{>0})$ で生成される左イデアルとし，左 $\mathcal{A}$-加群

$$\widehat{SF} := \mathcal{A}/I_{>0}$$

を考える．このとき，$v=\psi^1_{(-n_1)}\cdots\psi^r_{(-n_r)}\mathbf{1}\in SF$ に対応する頂点作用素を (1)-(3) で定義する．このようにして得られる SF-加群は直既約な可約加群となっていることがわかる．また $\widehat{SF}$ には L_0 の広義固有空間の直和として自然に $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-次数付け が入るので，この加群が既約加群の直和に表されない SF-加群を与える．構成法より，$\Omega(\widehat{SF})\cong\Lambda(\mathfrak{h})$ であり，それは $\Lambda(\mathfrak{h})$-加群として $\hat{\mathbf{1}}:=1+I_{>0}$ で生成されることがわかる：

$$\Omega(\widehat{SF})\xrightarrow{\sim}\Lambda(\mathfrak{h}),\quad \psi^1_{(0)}\cdots\psi^r_{(0)}\hat{\mathbf{1}}\mapsto\psi^1\wedge\cdots\wedge\psi^r,\quad (\psi^i\in\mathfrak{h}).$$

4　跡関数のモジュラー不変性

頂点作用素超代数 V に対し，V-加群 M が

$$M=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_{n+h},\quad M_{n+h}=\{u\in M\,|\,L_0u=(n+h)u\}$$

と L_0 の固有空間の直和に分解すると仮定する．このとき $\bar{i}\in\mathbb{Z}_2$ に対し $M^{\bar{i}}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_{n+h}\cap M^{\bar{i}}$ となることに注意すると，q の形式的巾級数

$$sch_M(q)=\sum_{n=0}^{\infty}(\dim M_{n+h}\cap M^{\bar{0}}-\dim M_{n+h}\cap M^{\bar{1}})q^{n+h-\frac{c}{24}}=\mathrm{str}_M\,q^{L_0-\frac{c}{24}}$$

を得る．この巾級数を M の指標と呼ぶ，但し c は V の中心電荷である．V が C_2-有限ならば，τ を上半平面の点とし，$q=e^{2\pi i\tau}$ とすると既約指標は上半平面上の正則関数となることが証明できる ([Z], [DZ])．こうして得られる上半平面上の正則関数を跡関数といい $sch_M(\tau)$ と書くことにする．

頂点作用素超代数 SF に対し，

$$sch_{SF}(\tau)=\eta(\tau)^{2d}$$

となることが容易にわかる，ここで $\eta(\tau)$ は Dedekind η-関数である．そのモジュラー変換則により，次の命題を得る．

命題 2. 上半平面上の正則関数の集合

$$\{\tau^i sch_{SF}(\tau)\,|\,0\leq i\leq d\}$$

で張られる空間はモジュラー不変である．

非有理，C_2-有限な頂点作用素代数のモジュラー不変性については [M] により，既約指標のみではモジュラー不変にはならないが，ある種の加群とその加群に付随する擬指標を導入することによって加群のカテゴリーを大きくすることによってモジュラー不変性とできることが示されている．この例では，命題 2 は擬指標の概念が頂点作用素超代数についても拡張され同様の性質が成立することを示唆している．実際，$\widehat{SF}$ は擬指標を持ちそれは $\tau^i sch_{SF}(\tau)$ の非零スカラー倍を先頭項にもつ $\tau^i sch_{SF}(\tau)$ $(0 \le i \le d)$ の線形和で表されることがわかる．他の指標 $\tau^i sch_{SF}(\tau)$ についてもそれを擬指標の先頭項に持つような加群が $\widehat{SF}$ の商加群として得られる．このように C_2-有限な頂点作用素代数についての擬指標の概念が頂点作用素超代数の場合にも拡張されると予想される．

参考文献

[A] T. Abe, A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra, math.QA/0503472.

[CF] N. Carqueville and M. Flohr, Nonmeromorphic operator product expansion and C_2-cofiniteness for a family of W-algebras, math-ph/0508015.

[DZ] C. Dong, and Z. Zhao, Modularity in orbifold theory for vertex operator superalgebras, Commun. Math. Phys. Online, 2005.

[FGST] B. Feigin, A. Gainutdinov, A. Semikhatov, I. Tipunin, Modular group representations and fusion in logarithmic conformal field theories and in the quantum group center, hep-th/0504093.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., Vol.**134**, Academic Press, Boston, 1988.

[GaKa] M. Gaberdiel and H. Kausch, A rational logarithmic conformal field theory, *Phys. Lett.* **B 386**, (1996), no. 1-4, 131–137.

[Kau] H. Kausch, Curiosities at $c = -2$, hep-th/9510149.

[M] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness. *Duke Math. J.* **122**, (2004), no. 1, 51–91.

[X] X. Xu, *Introduction to vertex operator superalgebras and their modules*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[Z] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.