数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 188-195

頂点作用素代数 V_L^+ と構成法 B で得られる偶格子

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

北海道大学大学院理学研究科
Department of Mathematics, Hokkaido University
Kita 10, Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan.
e-mail: shimakura@math.sci.hokudai.ac.jp

1 序

頂点作用素代数 (VOA) の研究において自己同型群は大きな役割を果たす. 軌道体模型の研究等 VOA 自身の研究に用いられるのみならず, ムーンシャイン現象に代表されるような VOA と他分野との繋がりをひき起こす. ゆえに頂点作用素代数の自己同型群の決定は重要な問題であるが, そんなに易しくない. まだまだ多くの自己同型の構成法, そして構造の決定方法が望まれているのが現状である.

最近, [Sh1] において VOA の表現論を用いた自己同型群の研究法が提案され, また単純カレント拡大における部分 VOA の自己同型の持ち上げについて考察されている. その応用として [Sh1, Sh2] において偶格子 L に付随する VOA V_L^+ の自己同型群の研究がなされた. 本稿では $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ に関する結果を紹介しながら, 以下の点を説明することを目標にする.

(I) 構成法 B で得られる偶格子の特徴付け.

(II) $\mathrm{Aut}(V_L)$ から誘導される V_L^+ の自己同型群 $H_L = C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle$ の特徴付けと $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ が H_L より真に大きくなるための格子 L の必要十分条件.

(III) $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の計算アルゴリズム.

2 準備

この章では本稿に必要な定義や事実について述べる. 頂点作用素代数の一般論は [Bo, FLM] を参照していただきたい.

2.1 頂点作用素代数の自己同型の加群への作用

g を頂点作用素代数 V の自己同型, $M = (M, Y_M)$ を V-加群とする. このとき

$$Y_{M\circ g}(v,z) := Y_M(gv,z)$$

は M 上の頂点作用素となる. よって, $M\circ g = (M, Y_{M\circ g})$ は V-加群となる. これにより $\mathrm{Aut}(V)$ が V-加群の同型類全体の集合上へ作用する.

注意 2.1. V-加群 M が既約であったなら, M^g も既約である. したがって, $\mathrm{Aut}(V)$ が既約 V-加群の同型類全体の集合へ置換群として作用する. さらに, この作用は次数付き次元と分岐規則を保つ.

2.2 頂点作用素代数 V_L^+ とその性質

偶格子 L から格子頂点作用素代数 V_L が構成される. 本稿では詳しく述べないが, 具体的な構成法に関しては [FLM] の 7 章 と 8 章を参考にされたい. また, Dong-Nagatomo ([DN1]) によって $\mathrm{Aut}(V_L)$ が記述されている. そこで, 全ての元を -1 倍する L の自己同型の $\mathrm{Aut}(V_L)$ への持ち上げ θ を一つ固定する. すると θ の位数は 2 となり, V_L の θ による固定部分空間 V_L^+ と -1 固有空間 V_L^- を得る. さらに V_L^+ は V_L の部分頂点作用素代数, V_L^- は V_L^+ の既約加群となる.[1]

Dong-Nagatomo ([DN2]) によって階数 1 の場合, Abe-Dong ([AD]) によって一般の階数の場合に V_L^+ の既約加群が分類された. 具体的に書くと既約 V_L^+-加群は

$$\begin{aligned}
[\mu] &: V_{\mu+L} \text{ の同型類 } \mu\in L^*\setminus(L/2),\\
[\lambda]^\pm &: V_{\lambda+L}^\pm \text{ の同型類 } \lambda\in L^*\cap L/2,\\
[\chi]^\pm &: V_L^{T_\chi,\pm} \text{ の同型類},
\end{aligned}$$

のいずれかに属する. ただし, χ は L の中心拡大のある正規部分群による剰余群の指標を動き, L^* は L の双対格子である. $[\mu]$, $[\lambda]^\pm$ を untwisted 型, $[\chi]^\pm$ を twisted 型と呼ぶ.[2] 本稿では V_L^+ の既約加群の同型類全体の集合を S_L とおく.

また, V_L^+ の分岐規則は Abe ([Ab]) によって階数 1 の場合が, Abe-Dong-Li ([ADL]) によって一般の階数の場合に完全に決定された.

3 構成法 B で得られる偶格子

この章では符号から格子を作る一つの方法である構成法 B について考察する. 特に, [FLM] で構成されている構成法 B で得られた偶格子 L に付随する V_L^+ の自己同型を思

[1] -1 自己同型の持ち上げのとり方によらず V_L^+ の頂点作用素代数構造は一意である [DGH].

[2] $[\mu]$ は θ-stable でない既約 V_L-加群, $[\lambda]^\pm$ は既約 θ-stable な V_L-加群から得られる. また $[\chi]^\pm$ は既約 θ-twisted V_L-加群から得られるものである.

い出し, また後で用いる構成法 B で得られた偶格子の特徴付けを与える.

まずは構成法 B について思い出す. C を長さ n の $\mathbb{F}_2$ 上の符号とする. $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ と置き, $\{\alpha_i | \ i \in \Omega_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ のノルム 2 の直交基底とする. C を Ω の冪集合の部分集合と見て, $c \in C$ に対して $\alpha_c = \sum_{i \in c} \alpha_i$ と置く. このとき

$$L_B(C) = \sum_{c \in C} \mathbb{Z}\frac{\alpha_c}{2} + \sum_{1 \le i,j \le n} \mathbb{Z}(\alpha_i + \alpha_j) \tag{3.1}$$

を **(二進線形符号 C から) 構成法 B で得られた格子**という. 特に C が重偶, すなわち全ての符号語の重さが 4 で割り切れることが $L_B(C)$ が偶格子であるための必要十分条件である.

3.1 構成法 B で得られた格子 L に付随する V_L^+ の自己同型

偶格子 L が構成法 B で得られているときに, V_L^+ の例外的な自己同型が具体的に [FLM] の 11 章で与えられている.

命題 3.1. [FLM] L を構成法 *B* で得られた偶格子 *(3.1)* とする. このとき, V_L^+ は

$$[0]^- \circ \sigma \cong [\alpha_1]^+$$

を満たす自己同型 σ を持つ.[3] □

3.2 構成法 B で得られる偶格子の特徴付け

天下り的であるが次の集合を考える.

$$R_L = \left\{ \lambda + L \in L^*/L \middle| \ \lambda \in L/2, \ |(\lambda + L)_2| \ge 2n + |L_2| \right\}.$$

すると次の命題が成り立つ.

命題 3.2. L を階数 n の偶格子とする. このとき, L が構成法 *B* によって得られているための必要十分条件は $R_L \neq \phi$ である.[4] □

さらに各 $\lambda + L \in R_L$ に対して, (3.1) の構成法 B の表示における $\{\alpha_i\}$ を $\lambda + L$ の中から取ることが出来る.

[3] [FLM] において, この自己同型はムーンシャイン加群の自己同型群 $2_+^{1+24} \cdot Co_1$ に入らないものを得るために構成されている. もう少し詳しく述べると extended Golay code G_{24} から構成法 B で得られる格子 $L_B(G_{24})$ に付随する VOA $V_{L_B(G_{24})}^+$ の自己同型を $V^\natural$ の自己同型として持ち上げたものが $2_+^{1+24} \cdot Co_1$ に入らない自己同型である.

[4] この証明は格子の元の数え上げによってなされており VOA の理論を全く用いずに証明できる. しかしながら後で見るように R_L の定義は VOA V_L^+ の自己同型群に関する考察から得られたものである.

4 V_L から誘導される自己同型群

V_L^+ の定義から θ の $\mathrm{Aut}(V_L)$ における中心化群 $C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)$ が V_L^+ に作用する．そして $H_L = C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle$ が忠実に作用することがわかる．そこで自然に思い浮かぶ疑問が「どんな格子に対して H_L よりも $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ が真に大きくなるか？」ということである．例えば [DG] の結果から，L の階数が 1 の仮定の下では $H_L \subsetneq \mathrm{Aut}(V_L^+)$ となるための必要十分条件は $L = 2A_1$ である．また [MM] より $L \cong \sqrt{2}D_4$, [Gr] より $L \cong \sqrt{2}E_8$ の時に $H_L \subsetneq \mathrm{Aut}(V_L^+)$ となることが知られていた．この章ではこの疑問に答えることを目標に V_L の自己同型群から誘導される H_L について考察する．

4.1 自己同型群 H_L の特徴づけ

次で述べられている $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の S_L の作用を用いて記述される H_L の特徴付けが重要である．

命題 4.1. H_L は $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の S_L への作用における V_L^- の同型類の固定部分群である． □

したがって V_L^- の同型類 $[0]^-$ を保たない $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の自己同型が存在するための条件を探る必要がある．

命題 3.1, 4.1 から偶格子 L が構成法 B で得られているとすると H_L に入らない V_L^+ の自己同型 σ があることになる．実際に，$2A_1 = L_B(\{(0)\})$, $\sqrt{2}D_4 = L_B(\{(0^4)\})$, $\sqrt{2}E_8 = L_B(\{(0^8),(1^8)\})$ であることから説明がつく．さらに $[\alpha_1]^+ \circ h = [\alpha_1]^-$ となる V_L^+ の自己同型 h があることを注意しておく．

4.2 H_L と $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の比較

前節で既約加群 V_L^- の同型類 $[0]^-$ の軌道 Q_L が $[0]^-$ 以外の元を持つための十分条件を述べた．この節では Q_L が $[0]^-$ 以外の元を持つのはどのような格子か考察する．

まず，注意 2.1 から Q_L の元は V_L^- と同じ指標を持ち，$[0]^-$ と同様な分岐則を持たなければいけない．S_L の元は分類されているので，次の包含関係が得られる．

補題 4.2. L を階数 n の偶格子とする．このとき

$$Q_L \subseteq \begin{cases} \{[0]^-, [\lambda]^\pm\} & \text{if } n \neq 8, 16, \\ \{[0]^-, [\lambda]^\pm,\ [\chi]^-\} & \text{if } n = 8, \\ \{[0]^-, [\lambda]^\pm,\ [\chi]^+\} & \text{if } n = 16, \end{cases}$$

が成り立つ．ただし $\lambda + L$ は R_L の元を動く．[5] □

[5] R_L の条件は V_L^- と $V_{\lambda+L}^\pm$ の次数 1 の空間の次元の比較から出る．3.2 節における R_L の定義はこの条件から来ている．

Q_L が $[\lambda]^{\pm}$ を含むとすると $R_L \neq \phi$ となり, 命題 3.2 から L が構成法 B で得られることが分かる. 残る場合は Q_L が $[0]^-$ と twisted 型の既約加群の同型類のみで構成されている場合である. 補題 4.2 から格子の階数は $n = 8$ または 16 である. さらに twisted 型と untwisted 型の既約加群の分岐則や指標の比較から unimodular でなければいけないことがわかる. ゆえに可能性がある格子は E_8, $E_8 \oplus E_8$, Γ_{16} の 3 つである. それぞれの場合に個別に $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ を計算することで次の結果を得る.

補題 4.3. L を偶格子とする. このとき Q_L が $[0]^-$ と 1 つ以上の *twisted* 型の既約加群の同型類のみで構成されているための必要十分条件は $L \cong E_8$. □

以上のことをまとめると次の結果を得る.

命題 4.4. L を偶格子とする. このとき $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ が真に H_L より大きくなるための必要十分条件は L が構成法 B で得られているかまたは $L \cong E_8$ である. □

4.3 twisted 型の既約加群の同型類

この章では Q_L が twisted 型の既約加群の同型類を含む場合について考察する. $L = E_8$ の場合はすでにわかっているので, $L \neq E_8$ とする. 命題 4.4 よりある二進線形符号 C に対して $L = L_B(C)$ となっている. L が偶格子であることから C は重偶である. twisted 型の既約加群の分岐則, 長さ 8, 16 の重偶符号の分類, また σ の具体的な作用から次の結果を得る.

補題 4.5. $L = L_B(C)$ を階数 n の二進線形符号 C から構成法 B で得られた偶格子とする. このとき Q_L が *twisted* 型の既約加群の同型類を含むための必要十分条件は次のいずれかを満たすことである.

(A) $n = 8$ かつ C が全て 1 である符号語を含む.

(B) $n = 16$ かつ C が *Reed-Muller* 符号 $RM(1,4)$ を部分符号として含む. □

注意 4.6. 上の補題における (A) は $n = 8$ で L が $\sqrt{2}E_8$ を部分格子として含んでいること, (B) $n = 16$ で L が階数 16 の Barnes-Wall 格子を含んでいることと同値である.

5 V_L^+ の自己同型群の決定アルゴリズム

今までに述べた結果を用いて $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の自己同型群の決定アルゴリズムを与える. まずは偶格子 L が次のどの場合に当てはまるかを調べる.

(1) L が構成法 B で得られない, すなわち $R_L = \phi$.

(2) $L = L_B(C)$ かつ C が補題 4.5 の (A) も (B) も満たさない.

(3) $L = L_B(C)$ かつ C が補題 4.5 の (A) または (B) を満たす.

それぞれの場合に $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ を計算するアルゴリズムを与える.

5.1 (1) の場合

まず $L \cong E_8$ の場合のみが $|Q_L| > 1$ である. このときは $V_L^+ \cong V_{D_8}$ である. よって [DN1] の結果から $\mathrm{Aut}(V_{D_8})$ が計算でき, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ が決定できる. また $L \ncong E_8$ の場合は $\mathrm{Aut}(V_L^+) \cong H_L = C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle$ であり, やはり [DN1] の結果から H_L を計算でき, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ が決定できる.

5.2 (2) の場合

まずは $[0]^-$ の軌道である Q_L が次の様に決定されることがわかる.

$$Q_L = \{[0]^-, [\lambda]^\pm |\ \lambda \in R_L\}.$$

さらに, 分岐則をよく見ることで次がわかる.

補題 5.1. $P_L = \{[0]^+\} \cup Q_L$ 上に分岐則によって基本可換 2-群の構造が入る.

$\mathrm{Aut}(V_L^+)$ は $[0]^+$ を保つので, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ は P_L に作用する. さらに, 分岐則を保つことから, 群準同型 $\varphi : \mathrm{Aut}(V_L^+) \to GL(P_L)$ を得る. この写像の核と像を考える. まず核は H_L の部分群ゆえ, 計算可能である. さらに像 $\mathrm{Im}\varphi$ は $\varphi(H_L)$ がわかっており, さらに $\mathrm{Im}\varphi$ と $\varphi(H_L)$ の指数が $|Q_L|$ であることから計算できる.[6] そうして $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の構造を決定できる.

5.3 (3) の場合

まずは $[0]^-$ の軌道である Q_L が次の様に決定されることがわかる.

$$Q_L = \{[0]^-, [\lambda]^\pm, [\chi]^\varepsilon |\ \lambda \in R_L\}.$$

ただし $n = 8$ のとき $\varepsilon = -$, $n = 16$ のときに $\varepsilon = +$ であり, χ は動ける範囲を全て動く.

---

[6] 実は [KKM] の構成法 B で得られた偶格子の自己同型群の枠への作用に関する結果を用いると殆どの格子に対して H_L が $Q_L \setminus \{[0]^-\}$ 上に可移に作用することがわかる. この場合には φ の像は Q_L 上に 2 重可移に作用していることがわかる. 原始 2 重可移群の分類から, φ が全射または $n = 4$ かつ $\mathrm{Im}\varphi \cong \mathrm{A}_7$ のいずれかであることがわかる. この点を指摘してくださった吉荒聡氏に感謝します.

この場合は (2) の場合と違って, Q_L に $[0]^+$ と付け加えても分岐則で閉じていない. したがって既約加群の同型類全体の集合 S_L への作用を考える.

そのために少し言葉を定義し一般の設定で議論する. 偶格子 L が $2L^* \subset L$ を満たすときに **2-elementary** と呼び, 任意の $v \in L^*$ に対して $\langle v, v\rangle \in \mathbb{Z}$ を満たすときに **totally even** と呼ぶ. 分岐則をよく見ることで次の結果を得る.

補題 5.2. 偶格子 L が *2-elementary totally even* であるとする. このとき S_L 上に分岐則によって基本可換 2-群の構造が入る. □

もし格子 L の階数が 8 の倍数ならば, 次の様にして S_L 上にさらに構造を入れることが出来る. 写像 $q_L : S_L \to \mathbb{F}_2$ を

$$q_L(W) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathrm{ch}(W) \in \mathbb{Z}[[q]], \\ 1 & \text{if } \mathrm{ch}(W) \in q^{1/2}\mathbb{Z}[[q]], \end{cases}$$

で定義する. すると q_L は非退化なシンプレクティック形式に付随する二次形式になっている. $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の作用は指標を保つため, q_L を保つ. したがって, 群準同型 $\psi : \mathrm{Aut}(V_L^+) \to O(S_L, q_L)$ を得る.

(4) の場合はこの写像 ψ を使って (3) と同様にして ψ の核と像を決め, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ を得る.

6 コメント

この V_L^+ の自己同型群の情報を元にして, V_L^+ の単純カレント拡大として得られる VOA の自己同型群を調べることが出来る. 例えば, ムーンシャイン加群の全自己同型群であるモンスターの重要な部分群が V_L^+ の自己同型群として捉えられている. (cf. [Sh3]) この手法を他の場合にも応用して多くの VOA の自己同型群の研究を進めることが出来ると思われる.

参考文献

[Ab] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra*, **242** (2001), 624–655.

[AD] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+: General case, *J. Algebra*, **273** (2004), 657–685.

[ADL] T. Abe, C. Dong and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebras $M(1)^+$ and V_L^+, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[Bo] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A,* **83** (1986), 3068–3071.

[DG] C. Dong and R.L. Griess, Rank one lattice type vertex operator algebras and their automorphism groups, *J. Algebra* **208** (1998), 262–275.

[DGH] C. Dong, R.L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DN1] C. Dong and K. Nagatomo, Automorphism groups and twisted modules for lattice vertex operator algebras, *Comtemp. Math.* **248** (1999), 117–133

[DN2] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169–195.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1989.

[Gr] R.L. Griess, A vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $\mathrm{O}^+(10,2)$, *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.* **7** (1998), 43–58.

[KKM] M. Kitazume, T.Kondo, and I. Miyamoto, Even lattices and doubly even codes, *J. Math. Soc. Japan* **43** (1991), 67–87.

[MM] A. Matsuo and M. Matsuo, The automorphism group of the Hamming code vertex operator algebra, *J. Algebra* **228** (2000), 204–226.

[Sh1] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Sh2] H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras V_L^+: general case, to appear in *math. Z.*

[Sh3] H. Shimakura, On five maximal 2-local subgroups of the Monster and vertex operator subalgebras of the Moonshine module, preprint.