数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 21-27

アソシエーションスキームにおける Frobenius-Schur の定理

信州大学大学院・工学系研究科 2 年 寺田純也 (Junya Terada)
Graduate School of Science and Technology,
Shinshu University

1 はじめに

(可換とは限らない) アソシエーションスキームの表現論を考えるとき、有限群の表現に対して知られていることが、どのように一般化されるかを考えるのは自然なことである。ここでは有限群の指標 (表現) に対して知られている Frobenius-Schur の定理をアソシエーションスキームに拡張する。

まず有限群に対する Frobenius-Schur の定理を確認しておこう。G を有限群とする。 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して、

$$\nu_2(\chi) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2)$$

とおいて、これを χ の **Frobenius-Schur indicator** という。また、

$$\theta(g) := \sharp\{h \in G \mid h^2 = g\}$$

とする。このとき次が成り立つ。

Theorem 1.1 (Frobenius-Schur [1, Chap. 4]).

(1) $\nu_2(\chi) \in \{-1, 0, 1\}$ である。

(2) $\nu_2(\chi) = 0$ であるための必要十分条件は、χ が実数値でないことである。

(3) $\nu_2(\chi) = 1$ であるための必要十分条件は、χ が実数体上の表現で与えられることである。

(4) $\displaystyle\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \nu_2(\chi)\chi = \theta$ である。特に、$\displaystyle\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \nu_2(\chi)\chi(1) = \sharp\{h \in G \mid h^2 = 1\}$ が成り立つ。

ここでは、この Frobenius-Schur の定理をアソシエーションスキームに拡張し、さらに応用として、多くの symmetric relation をもつアソシエーションスキームの隣接代数の中心は大きくなることを示す。これは、花木章秀氏(信州大) との共同研究によるものである。

アソシエーションスキームについて定義をしておこう。X を有限集合とする。$X \times X$ の部分集合を X 上の **relation** という。relation g に対して、その隣接行列を σ_g で表す。すなわち σ_g は行、列、共に集合 X で添字付けられた行列で、その (x, y)-成分は $(x, y) \in g$ のとき 1 、そうでないとき 0 と定めたものである。(X, G) がアソシエーションスキームであるとは、

(1) G は $X \times X$ の分割である。

(2) $1 := \{(x, x) \mid x \in X\} \in G$ である。

(3) $g \in G$ ならば $g^* := \{(y, x) \mid (x, y) \in g\} \in G$ である。

(4) $f, g, h \in G$ に対してある非負整数 p_{fg}^h があって $\sigma_f \sigma_g = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_h$ である。

を満たすこととする。$n_g := p_{gg^*}^1$ を $g \in G$ の **valency** といい、$n_G := |X| = \sum_{g \in G} n_g$ を (X, G) の **位数** という。アソシエーションスキームの条件 (4) から、$\mathbb{C}$ 上の多元環 $\mathbb{C}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}\sigma_g$ が定義でき、これを $\mathbb{C}$ 上の G の**隣接代数** と呼ぶ。標数が 0 の体上の隣接代数が半単純であることは知られている [3, Theorem 4.1.3]. $\mathbb{C}G$ の線形表現のトレースを G の **指標** と呼ぶことにする。表現が既約のとき、指標も **既約** であるといい、G の既約指標全体の集合を $\mathrm{Irr}(G)$ で表す。また、既約指標 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の標準指標における重複度を m_χ で表す。

いま、(X, G) をアソシエーションスキームとする。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して、

$$\nu_2(\chi) := \frac{m_\chi}{n_G \chi(1)} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \chi({\sigma_g}^2).$$

で定め、これを χ の **Frobenius-Schur indicator** と呼ぶことにする。G が有限群から与えられる場合を考えると、$n_g = 1, n_G = |G|, m_\chi = \chi(1)$ であるから、有限群のときに定めた χ の Frobenius-Schur indicator と等しくなる。従って、アソシエーションスキームに対して定めた Frobenius-Schur indicator において、G が有限群から与えられるとき $\nu_2(\chi) \in \{-1, 0, 1\}$ となるというのが有限群の Frobenius-Schur の定理であったことが分かる。そこで、同様のことがアソシエーションスキームについて言えないだろうか、というのが今回のテーマである。

2 アソシエーションスキームにおける Frobenius-Schur の定理

このセクションでは、有限群における Frobenius-Schur の定理をアソシエーションスキームに拡張し、その証明を与える。

Theorem 2.1 (Frobenius-Schur Theorem for association schemes).

(1) $\nu_2(\chi) \in \{-1, 0, 1\}$ である。

(2) $\nu_2(\chi) = 0$ であるための必要十分条件は、χ が実数値でないことである。

(3) χ が実数体上の表現で与えられるならば、$\nu_2(\chi) = 1$ である。

(4) $\sharp\{h \in G \mid h^2 = 1\} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \nu_2(\chi)\chi(1)$ である。

これらは、Linchenko-Montgomery の、ホップ代数における Frobenius-Schur の定理を示した論文 [2, Theorem 2.7] から得られるため、ここでは、それをどのようにしてアソシエーションスキームに適用するかを説明するが、有限群の時を真似して素朴に証明することもできる。

k を、標数が 2 でない体とし、A を involution S をもつ有限次元の分解型半単純多元環 (split semisimple k-algebra) とする。すなわち、S は $S^2 = id_A$ となるような逆同型写像で、A は k 上のいくつかの全行列環の直和と同型である。また、$\langle\ |\ \rangle$ を A 上の bilinear, associative, symmetric, nondegenerate form とし、W を左 A-加群とする。$f \in W^* := \mathrm{Hom}_k(W, k)$, $a \in A$, $w \in W$ に対して、$(af)(w) = f(S(a)w)$ で定める。このとき W^* もまた、左 A-加群である。集合 $\{a_r, b_r\}$ ($r = 1, \cdots, \dim A$) に対して、$\langle a_r \mid b_j\rangle = \delta_{rj}$ がすべての r, j で成り立つとき、$\{a_r, b_r\}$ を、この form に関する **dual bases のペアー** と呼ぶ。このとき、involution をもつ多元環上の Frobenius-Schur の定理として次が成り立つ。

Theorem 2.2 ([2, Theorem 2.7]). $V_1, \cdots, V_d$ を、異なる左既約 A-加群とし、$\chi_1, \cdots, \chi_d$ を対応する既約指標とする。また、$\{a_r, b_r\}$ を A 上のある bilinear associative symmetric nondegenerate form に関する dual bases のペアーとする。このとき、

$$\nu_2(\chi_i) := \frac{\chi_i(1)}{\chi_i(\sum_j a_j b_j)}\chi_i\left(\sum_r S(a_r)b_r\right)$$

は、次を満たす。

(1) $\chi_i \in \mathrm{Irr}(A)$ に対して、$\nu_2(\chi_i) \in \{-1,0,1\}$ である。

(2) $\nu_2(\chi_i) \neq 0$ であるための必要十分条件は、$V_i \cong V_i^*$ (A-加群として同型) である。

(3) $\mathrm{Tr}\, S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(A)} \nu_2(\chi)\chi(1_A)$ である。

(X,G) をアソシエーションスキームとする。$\mathbb{C}$-線形写像 $S : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ を $S(\sigma_g) = \sigma_{g^*}$ で定める。このとき、明らかに S は $\mathbb{C}G$ の involution である。$\langle \sigma_g \mid \sigma_h \rangle = n_g \delta_{gh^*}$ とすれば、$\mathbb{C}G$ 上の form は、bilinear, associative, symmetric, nondegenerate form である。また、$\{\sigma_g, \frac{1}{n_g}\sigma_{g^*}\}$ は、この form に関する dual bases のペアーである。ここで定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}
\chi_i\left(\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\sigma_g\sigma_{g^*}\right) &= \chi_i\left(\sum_{g\in G}\sum_{f\in G}\frac{1}{n_g}p_{gg^*}^f\sigma_f\right) = \chi_i\left(\sum_{f\in G}\frac{1}{n_f}\left(\sum_{g\in G}p_{f^*g}^g\right)\sigma_f\right) \\
&= \chi_i\left(\sum_{f\in G}\frac{1}{n_f}\left(\sum_{j=1}^{d}\chi_j(1)\chi_j(\sigma_{f^*})\right)\sigma_f\right) \\
&= \sum_{i=1}^{d}\chi_j(1)\sum_{f\in G}\frac{1}{n_f}\chi_j(\sigma_{f^*})\chi_i(\sigma_f) = \frac{n_G\chi_i(1)^2}{m_{\chi_i}},
\end{aligned}$$

であるから、

$$\nu_2(\chi_i) = \frac{\chi_i(1)}{\chi_i(\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\sigma_g\sigma_{g^*})}\chi_i\left(\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\sigma_{g^*}\sigma_{g^*}\right) = \frac{m_{\chi_i}}{n_G\chi_i(1)}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\chi_i({\sigma_g}^2).$$

となる。$\chi^* = \overline{\chi}$ より、定理 2.1(2) が得られる。また χ が実数体上の表現で与えられるならば、$\nu_2(\chi) = 1$ となること (定理 2.1(3)) は、[1, Corollary 4.15] と同様にして示すことができ、定理 2.1 の主張が成り立つ。

3 Questions

(1) $\nu_2(\chi) = 1$ のとき、χ は実数体上の表現で与えられるか?

G が有限群から与えられるときは、有限群の複素数体上の任意の表現はユニタリ表現と同値になるという事実を使って示されていたことであるが、

アソシエーションスキームのときはユニタリ表現にならないところが難しいところである。

$$\theta(\sigma_g) = \sum_{h \in G} \frac{n_g}{n_h} p_{hh}^g$$

と置く。これは、G が有限群から与えられるときを考えれば、有限群の Frobenius-Schur の定理で定義されていた $\theta(g)$ と等しくなることが分かる。

(2) θ は、既約指標の一次結合で書けるか？

直交関係 * から、次は明らかである。

Proposition 3.1. θ が既約指標の一次結合で書けるならば、

$$\theta = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \nu_2(\chi)\chi$$

が成り立つ。これは、有限群の Frobenius-Schur の定理の (4) の内容である。

* 直交関係
$\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して、

$$\frac{m_\chi}{n_G \chi(1)} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^*}) = \delta_{\chi\varphi}.$$

4 Applications

このセクションでは、Frobenius-Schur の定理から得られる結果を紹介する。
$I(G) = \{g \in G \mid g = g^* \neq 1\}$ と置く。

Proposition 4.1. $|G| > 1$ とする。このとき、

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = |\mathrm{Irr}(G)| \geq \frac{|I(G)|^2}{|G| - 1} + 1$$

が成り立つ。これは、多くの symmetric relation をもつアソシエーションスキームの隣接代数の中心は大きくなることを主張している。

Proof. $S = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \bar{\chi} = \chi \neq 1_G\}$ とする。このとき、

$$0 < |I(G)| = \sum_{\chi \neq 1} \nu_2(\chi)\chi(1) \leq \sum_{\chi \in S} \chi(1),$$

となり、[1, Lemma 4.10] より

$$|I(G)|^2 \leq \left(\sum_{\chi \in S} \chi(1) \right)^2 \leq |S| \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 \leq |S|(|G| - 1)$$

が成り立つ。いま、

$$\sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 \leq |G| - 1 \leq \frac{|S|(|G| - 1)}{|I(G)|^2}(|G| - 1) = |S| \left(\frac{|G| - 1}{|I(G)|} \right)^2$$

であるから、$|S| \leq |\mathrm{Irr}(G)| - 1$ より、

$$|G| - 1 \leq (|\mathrm{Irr}(G)| - 1) \left(\frac{|G| - 1}{|I(G)|} \right)^2$$

となる。従って、 $|\mathrm{Irr}(G)| \geq |I(G)|^2/(|G| - 1) + 1$ である。 □

Corollary 4.2. G が非可換であり、$|I(G)| = |G| - 3$ すなわち、non-symmetric relation のペアーが一組だけ存在するならば、G の一次でない既約指標が一つだけ存在し、その次数は 2 である。

Proof.

$$|\mathrm{Irr}(G)| \geq \frac{|I(G)|^2}{|G| - 1} + 1 = |G| - 4 + \frac{4}{|G| - 1} \geq |G| - 3.$$

である。 □

$|G| \leq 5$ ならば (X, G) は可換であることは知られている。[3, Theorem 4.5.1]. $|G| = 6$ のとき、非可換なスキーム (X, G) が存在する。Frobenius-Schur の定理から、その構造をみることができる。

Proposition 4.3. (X, G) は非可換であり、$|G| = 6$ とする。このとき、$|I(G)| = 3$ である。

Proof. 既約指標の次数は、$1, 1, 2$ である。また、明らかに Frobenius-Schur indicators は 1 であるから、$|I(G)| + 1 = 1 + 1 + 2$ である。 □

References

[1] I. M. Isaacs, Character theory of finite groups, Academic Press,New York, 1976.

[2] V. Linchenko and S. Montgomery, A Frobenius-Schur Theorem for Hopf Algebras, Algebr. Represent. Theory **3** (2000), 347-355.

[3] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.