数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 28-33

3次元ユークリッド空間における isosceles 7-point 3-distance setsの分類

城戸　浩章 (Hiroaki Kido)
九州大学大学院数理学府
(Graduate School of Mathematics, Kyushu University)

1 Introduction

$\mathbb{R}^k$ を k 次元ユークリッド空間とする。
$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k), y=(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ とするとき、x と y の距離を $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2}$ で定める。

Definition 1.1. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X)=\{d(x,y)|x,y \in X, x \neq y\}$$

とおく。このとき、$|A(X)|=s$ であるならば、X を $\mathbb{R}^k$ における s-distance set と呼ぶ。
また、2つの s-distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

2-distance set の点の個数の最大値は、$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$(Kelly [7])、$\mathbb{R}^3$(Croft [4]) の場合に知られていた。さらに、$\mathbb{R}^k, k \leq 8$ の場合は Lisoněk [11] によって与えられ、次のページの Table 1 のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)

また、$|X| \geq k+2$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [5] により示された。

しかし、一般の s-distance set については、E.Bannai-E.Bannai-D.Stanton [2] や A.Blokhuis [3] によって与えられた $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限や、$|X| \geq 5$ ならば、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set X は有限個で、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set の点の個数の最大値は 7 である (Shinohara [12]) ということが知られているが、それ以外のことはほとんど知られていないので、$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の個数が (同型を除いて) 有限個になるのは点の個数がいくつのときか？という問題や、$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の点の個数の最大値はいくつになるのか？という問題について考えたい。

前者の問題について、その答えを a とすると、a は $7 \leq a \leq \binom{3+3}{3}=20$ の範囲にあることが知られている。また、後者の問題については、その答えを b とすると、b は $12 \leq b \leq \binom{3+3}{3}=20$ の範囲にあることが知られている。今回の講演では、前者の問題の答えの範囲を狭める足がかりとして、また、$\mathbb{R}^3$ における 7 点からなる 3-distance set を分類するための足がかりとして、さらに強い条件をつけた isosceles 7-point 3-distance set について述べた。この isosceles 7-point 3-distance set について得られた結果とその過程の概要を報告する。

Table 1: 2-distance set の点の個数の最大値

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

2 Other definitions and known results

Definition 2.1. $\mathbb{R}^k$ において、n 個の点からなる集合を考える。
この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (同一直線上の 3 点も許す)、この集合は P(n)-set であるという。

さらに、この集合が s-distance set であるときは、isosceles n-point s-distance set と呼ぶことにする。

次に、この P(n)-set や 2-distance set について知られていることをまとめておく。

- $\mathbb{R}^3$ における P(9)-set は存在しない。(Croft [4])
- $\mathbb{R}^3$ における P(8)-set は同型を除いて唯 1 つに定まる。(Kido [9])
- $s \leq 4$ を満たす s に対して、$\mathbb{R}^3$ における isosceles 8-point s-distance set は存在しない。(Kido [9])
- $\mathbb{R}^3$ における P(7)-set は同型を除いても無限に存在する。
- $\mathbb{R}^2$ における P(7)-set は存在しない。(Kelly [7])
- $\mathbb{R}^2$ における P(6)-set は、正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合に限る。(Kelly [7])
- $\mathbb{R}^3$ において、7 点からなる 2-distance set は存在しない。
(Croft [4], Einhorn-Schoenberg [6])
- $\mathbb{R}^3$ において、6 点からなる 2-distance set は 6 つに分類される。(Einhorn-Schoenberg [6])
- $\mathbb{R}^3$ において、5 点からなる 2-distance set は 27 個に分類され、そのうち、$\mathbb{R}^2$ においても埋め込まれているのは正 5 角形の 5 点からなる集合の唯 1 つである。(Einhorn-Schoenberg [6])

今回は、$\mathbb{R}^3$ における isosceles 7-point 3-distance sets の分類について考えた。最初に一般の P(7)-set の構造について考察し (同型を除いても無限に存在するが)、その後、3-distance set という条件を付け加えて議論していく。

3 Notation and some P(n)-set configurations

次の言葉を導入する。
apex : 3 点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

$\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ を P(n)-set とする。$\mathcal{P}$ の点 P_i の"vertex-number" $V(P_i)$ を
$V(P_i) = (P_i$ を含む 3 点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、P_i が apex となっているものの数$) = (\angle P_i$ を頂角とする 2 等辺 3 角形の個数$)$
で定義する。

このとき、

$$V(P_1) + \cdots + V(P_n) \geq \binom{n}{3} \tag{1}$$

が成り立つ。

また、点 P_i から残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、$\cdots$、距離 l となる点が u 個あったとき ($a, b, \cdots, l$ は互いに異なり、$r \geq s \geq \cdots \geq u$ とする。また、$r + s + \cdots + u = n - 1$)、点 P_i は type($r, s, \cdots, u$) の点であるということにする。

P_i が type($r, s, \cdots, u$) であるならば、

$$V(P_i) = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \cdots + \binom{u}{2} \tag{2}$$

が成り立つ。

P(7)-set を考えるうえで、最も基本的な命題を述べる。

Proposition 3.1. $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_7\}$ を $\mathbb{R}^3$ における P(7)-set とし、P_1 が最大の vertex-number であるとする。このとき、P_1 の type は次の 5 つのいずれかである。

$$(3,3), (4,2), (4,1,1), (5,1), (6).$$

今後、P_1 の type が $(3,3)$ のとき、$\mathcal{P}$ は3-3 configuration であると呼ぶ。また、$(4,2), (4,1,1), (5,1), (6)$ のときは、それぞれ、4-2, 4-1-1, 5-1, 6-configuration と呼ぶ。

また、"4 点が同一円周上にある"ことを"the condition (X)"と呼ぶことにし、"5 点からなる部分集合が 2-distance set となっている"ことを"the condition (Y)"と呼ぶことにする。次の節からは、Proposition 3.1 における P_1 のそれぞれの type について、3-distance set という条件を付け加えて考察していく。次の補題を示すことが第一目標である。

Lemma 3.2. $\mathbb{R}^3$ における isosceles 7-point 3-distance set が存在するならば、the condition (X) もしくは the condition (Y) が成り立つ。

4 Proof sketch of Lemma 3.2

(i) 3-3 configuration のとき

この場合、isosceles 7-point 3-distance set の点は、2 つの同心球面上にそれぞれ 3 点ずつと、残りの 1 点は同心球面の中心である。このときは次が成り立つ。

Proposition 4.1. 3-3 configuration になるような isosceles 7-point 3-distance set が存在すれば、the condition (Y) が成り立つ。

(ii) 4-2 configuration のとき
このときは、Kido [9] における議論がほぼ直接適用でき、次が成り立つ。

Proposition 4.2. 4-2 configuration になるような isosceles 7-point 3-distance set が存在すれば、the condition (X) が成り立つ。

(iii) 4-1-1 configuration のとき
この場合は、ある球面上に 4 点があり、その球面の中心も isosceles 7-point 3-distance set の 1 点である。このときは議論がやや複雑になるが、次が成り立つ。

Proposition 4.3. 4-1-1 configuration になるような isosceles 7-point 3-distance set が存在すれば、the condition (Y) が成り立つ。

(iv) 5-1 configuration のとき
このときは、Croft [4] の 6 節における議論がほぼ直接適用でき、次が成り立つ。

Proposition 4.4. 5-1 configuration になるような isosceles 7-point 3-distance set が存在すれば、the condition (X) が成り立つ。

(v) 6-configuration のとき
この場合、isosceles 7-point 3-distance set の点は、1 つの球面上に 6 点と、残りの 1 点はその球面の中心である。このときは次が成り立つ。

Proposition 4.5. 6-configuration になるような isosceles 7-point 3-distance set が存在すれば、the condition (X) と the condition (Y) のいずれかが成り立つ。

したがって、Propositions 3.1, 4.1-4.5 の結果をまとめると、Lemma 3.2 を得る。■

5 Observation of the condition (X)

この節では、the condition (X) についての考察をしていく。次の命題は、Croft [4] の Lemma 18 と同様に証明できる。

Proposition 5.1. P(4)-set をなす同一円周上の 4 点は、正方形の 4 点もしくは正 5 角形の 4 点に限る。

Proposition 5.1 より、the condition (X) については、正方形の 4 点を含む isosceles 7-point 3-distance set と正 5 角形の 4 点を含む isosceles 7-point 3-distance set の 2 通りに場合分けすればよい。このとき、次の 2 つの結果を得る。

Lemma 5.2. $\mathbb{R}^3$ において、正方形の 4 点を含む isosceles 7-point 3-distance set は同型を除いて 2 個存在し、それらは次のページの Figure 1 の X_1, X_2 である。

Lemma 5.3. $\mathbb{R}^3$ において、正 5 角形の 4 点を含む isosceles 7-point 3-distance set は同型を除いて 13 個存在し、それらは次のページの Figure 1 の $X_3, \cdots, X_{15}$ である。

6 Observation of the condition (Y)

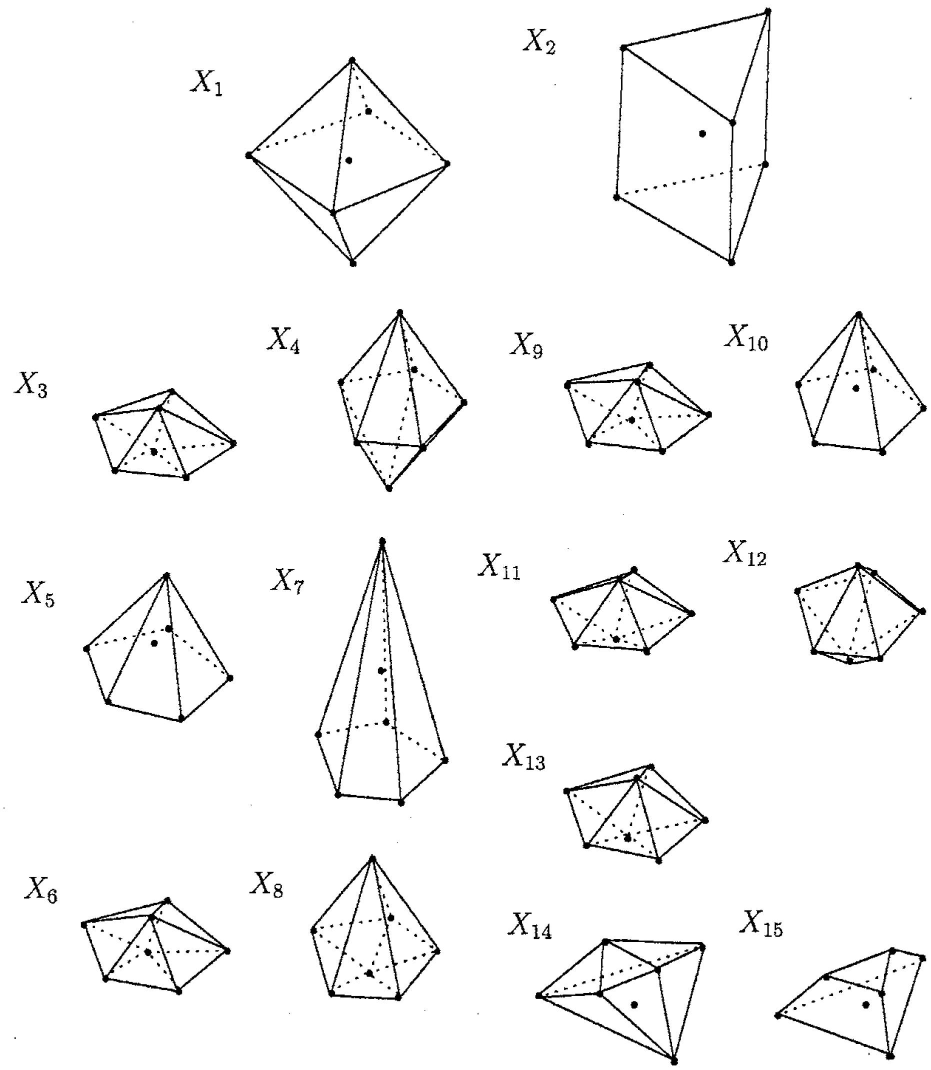
この節では、the condition (Y)、つまり、5点からなる2-distance setを含むisosceles 7-point 3-distance setについての考察をしていく。2節で紹介したように、Einhorn-Schoenberg [6]により、$\mathbb{R}^3$において、5点からなる2-distance setは27個に分類されることが分かっている。この27個の5点からなる2-distance setそれぞれに2点を付け加えることによってisosceles 7-point 3-distance setが出来るかどうかを考えていく。多くの計算を必要とするが、次の結果を得る。

Lemma 6.1. $\mathbb{R}^3$において、the condition (Y)を満たすisosceles 7-point 3-distance setが存在すれば、それはFigure 1の$X_1, \cdots, X_{15}$のいずれかと同型になる。

以上の結果をまとめると、次の定理を得る。これが今回の主結果である。

Theorem 6.2. $\mathbb{R}^3$において、isosceles 7-point 3-distance setは同型を除いてFigure 1の$X_1, \cdots, X_{15}$の15個に分類される。

Figure 1: $\mathbb{R}^3$における全15個のisosceles 7-point 3-distance sets



References

[1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク東京、1999.

[2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subsets in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147-152.

[3] A. Blockhuis, Few-distance sets, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

[4] H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **12** (1962), 400-424.

[5] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, *Indag. Math.* **28** (1966), 479-488. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[6] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points II, *Indag. Math.* **28** (1966), 489-504. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[7] L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227-229.

[8] 城戸浩章、3 次元ユークリッド空間における isosceles 8-point sets の分類、数理解析研究所講究録 1394 代数的組合せ論 (2004), 138-151.

[9] H. Kido, Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, (to appear).

[10] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 261-267.

[11] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory*, Ser. A.77 (1997), 318-338.

[12] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **25** (2004), 1039-1058.