数理解析研究所講究録 1477 巻 2006 年 217-222

2種の期日遅れコストをもつ待ちを伴う仕事の最適処理政策

小柳　淳二（鳥取大工学部），河合　　一（鳥取大工学部）

1　はじめに

通常の待ち行列理論では，待ち行列システムに到着する客はサーバーに割り当てられ，客の意思決定は考慮されないことがほとんどである．しかし [2] では smart customer と呼ばれる特殊な客を考え，待ち行列に加わる，待機する，サービスをあきらめて立ち去る，といった３つの選択肢を選べる問題を取り扱っている．[2] では，待機できる回数に制限がないが，本研究では，待ち行列に加わるか待機するかの選択肢を持ち，待機できる回数が有限の場合を取り扱い．コストとして，制限時間内に作業を終了できなかった場合にかかる定数コストと制限時間を越えて作業を終了するまでにかかった時間に比例するコストの和を最小にすることを考える．

2　モデル

一人の意思決定者が２つの仕事 TA と TB を処理する場合を考える．TA は意思決定者が離散時間待ち行列システムに入り，そこのサーバーで処理を受けることで終了する．待ち行列システムは，１単位時間ごとに客が確率 p で到着し，確率 $q(>p)$ で退去するものを考える（各時点では，退去が到着直前に生じるものとする）．TB 処理には b 単位時間かかり，意思決定者が待ち行列内で並んでいるかサービスを受けている間は TB の処理は中断される，しかし，待ち行列から出てきたなら中断したところから作業を再開できるものとする．TA, TB の作業を行うために $b+l$ 時間が与えられ，$b+l$ 時間内に作業が終了した場合コストは 0 であるが，$b+l$ 時間を超えて作業が終了した場合コストを支払わなければならない．もし，$X(>b+l)$ 時間で作業が終了した場合，コストは $d+c'(X-b-l)$ となる．ここで，d は制限を越えたことに対するコスト，c' は制限時間を１単位時間越えるごとにかかるコストである．

意思決定者は，各時点ごとに，待ち行列に入るか，TB を続けるかを決定し，待ち行列に入ったならば，TA の処理が終わるまで待ち行列にいなければならず，TA の処理終了後に TB を中断したところから再開する．

各時点でのアクションとして，アクション A を「TA のために待ち行列に並ぶ」，アクション B を「TBを１単位時間処理する」として，待ち行列システムの人数 i と TB に費やした時間 m の組を状態として最適アクションを考える．

最適性方程式のために，以下の関数を定義する．

1. $A(i,m)$ を状態 (i,m) でアクション Aをとったとき以降の総期待コスト，

2. $B(i,m)$ を状態 (i,m) でアクション Bをとり，以後最適に行動したときの総期待コスト，

3. $V(i,m)$ を状態 (i,m) での最適コスト，

とする.

待ち行列システムはサーバーがひとつのために，アクションBをとった時に状態 (i,m) $(i>0)$ からは $(i-1,m+1)$, $(i,m+1)$, $(i+1,m+1)$ のいずれかに推移する．よって以下の最適性方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
A(i,m) &= \sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}\{c'(i+1-k)/q+d\} &\quad (1)\\
B(i,m) &= q(1-p)V(i-1,m+1)+(qp+(1-q)(1-p))V(i,m+1)\\
&\quad +(1-q)pV(i+1,m+1)\quad (i>0) &\quad (2)\\
V(i,m) &= \min\{A(i,m),B(i,m)\}\quad (m<b),\quad V(i,b)=A(i,b) &\quad (3)
\end{aligned}
$$

$A(i,m)$ は以下のように導出できる.

1. 状態 (i,m) でアクションAをとると，意思決定者は $(i+1)$ 番目の客として行列に並ぶ.
2. l 単位時間で k 人の客が処理されたとする，k の分布はパラメータ q の二項分布となる.
3. もし $k\geq i+1$ なら l 時間内で TA が処理されたということになりコストはかからないが，$k\leq i$ ならば $c'(i+1-k)/q+d$ の期待コストがかかる.

簡単のために $c\equiv c'/q$ とすると

$$A(i,m)=\sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}\{c(i+1-k)+d\} \quad (4)$$

となる．$A(i,m)$ は m の値に依存しないことに注意する.

3　最適政策の構造

最適性方程式から最適政策の構造を分析する.

$m=b$ の場合

TB が終了しているので，アクションA のみ選択可能である，よって $V(i,b)=A(i,b)$.

$m=b-1$ の場合

アクションB を選択した場合，1期間後に TB が終了するので，次はアクションA をとることになる．そのため，関数 $C(i,m)$ を以下のように定義する.

$$C(i,m)=q(1-p)A(i-1,m+1)+\{qp+(1-q)(1-p)\}A(i,m+1)+(1-q)pA(i+1,m+1). \quad (5)$$

$C(i,m)$ はアクションB をとった次の決定時点でアクション A をとるとしたときのコストとなる．定義より $B(i,m)\leq C(i,m)$ $(m<b-1)$ と $B(i,b-1)=C(i,b-1)$ が成り立つ.

状態 $(i,b-1)$ において，i の増加に対して最適アクションがどのように変化するかをまず調べる．まず (4) より，

$$A(i+1,m) = A(i,m)+\sum_{k=0}^{i+1}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c+\binom{l}{i+1}q^{i+1}(1-q)^{l-i-1}d \quad (6)$$

$$A(i-1,m) = A(i,m)-\sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c+\binom{l}{i}q^i(1-q)^{l-i}d \quad (7)$$

が成立し，これを $C(i,b-1)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} C(i,b-1) &= A(i,b)-q(1-p)\left\{\sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c+\binom{l}{i}q^i(1-q)^{l-i}d\right\} \\ &\quad +(1-q)p\left\{\sum_{k=0}^{i+1}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c+\binom{l}{i+1}q^{i+1}(1-q)^{l-i-1}d\right\} \\ &= A(i,b)+(p-q)\sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c \\ &\quad +p\binom{l}{i+1}q^{i+1}(1-q)^{l-i}(c+d)-(1-p)\binom{l}{i}q^{i+1}(1-q)^{l-i}d. \end{aligned}$$

ここで，次の関数を定義する．

$$S(i)\equiv(p-q)\sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c+p\binom{l}{i+1}q^{i+1}(1-q)^{l-i}(c+d)-(1-p)\binom{l}{i}q^{i+1}(1-q)^{l-i}d. \quad (8)$$

$A(i,b)=A(i,b-1)$ であるから，$B(i,b-1)=C(i,b-1)=A(i,b-1)+S(i)$ となる．よって $B(i,b-1)\geq A(i,b-1)$ である必要十分条件は $S(i)\geq 0$ である．

ここで $S(i)$ に関する次の補題を証明する．

補題 1 $S(i)\leq 0$ が $i+1\geq \dfrac{p(c+d)(l+1)}{pc+d}$ に対して成立する． □

証明.
(8) から

$$S(i)=(p-q)\sum_{k=0}^{i}\binom{l}{k}q^k(1-q)^{l-k}c+\frac{q^{i+1}(1-q)^{l-i}l!}{(i+1)!(l-i)!}[p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+1)]. \quad (9)$$

である．仮定 $p<q$ から第一項は負となる．よって $S(i)\leq 0$ が $i+1\geq \dfrac{p(c+d)(l+1)}{pc+d}$ に対して成立する． □

次に $i+1<p(c+d)(l+1)/(pc+d)$ での $S(i)$ の性質をしらべるために，$D(i)\equiv S(i+1)-S(i)$ と定義する．

$$\begin{aligned} D(i) &= c(p-q)\frac{q^{i+1}(1-q)^{l-i-1}l!}{(i+1)!(l-i-1)!}+\frac{q^{i+2}(1-q)^{l-i-1}l!}{(i+2)!(l-i-1)!}\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+2)\} \\ &\quad -\frac{q^{i+1}(1-q)^{l-i}l!}{(i+1)!(l-i)!}\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+1)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q^{i+1}(1-q)^{l-i-1}l!}{(i+2)!(l-i)!}\Big[c(p-q)(i+2)(l-i)+q(l-i)\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+2)\} \\
&\qquad -(i+2)(1-q)\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+1)\}\Big]. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$D(i)$ の符号は以下の式により決定される．

$c(p-q)(i+2)(l-i)+q(l-i)\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+2)\}-(i+2)(1-q)\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(i+1)\}$.

離散変数 i を連続変数 x に置き換えた関数を

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c(p-q)(x+2)(l-x)+q(l-x)\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(x+2)\} \\
&\quad -(x+2)(1-q)\{p(c+d)(l+1)-(pc+d)(x+1)\} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

で定義すると $f(x)$ は x に関する二次関数で x^2 の係数は $cq+d>0$ である．また $f(x)\le 0$ が $x+1=p(c+d)(l+1)/(pc+d)$ に対して成立するので，$f(x)$ の符号は $1\le x\le p(c+d)(l+1)/(pc+d)-1$ において変化の回数は多くても ·度である．

以上のことから，次の補題を得る．

補題 2 もし $S(1)\ge 0$ であれば，$S(i)$ は i が増加するとともに負に変化し，いったん $S(i)$ が負になった後は i の増加により再び正になることはない．□

証明.

1. もし $f(1)>0$ かつ $S(1)>0$ ならば $S(i)$ は i が 1 から増加するとき，最初は増加するが，i がさらに増加すると，$f(i)$ は i が $p(c+d)(l+1)/(pc+d)-1$ より大きくなる前に負になる．よって $S(i)$ は $i+1\le p(c+d)(l+1)/(pc+d)$ において単調に減少しはじめ $i+1>p(c+d)(l+1)/(pc+d)$ においては負になる．
2. もし $f(1)\le 0$ かつ $S(1)>0$ ならば $S(i)$ は $i+1\le p(c+d)(l+1)/(pc+d)$ において単調に減少し，$i+1>p(c+d)(l+1)/(pc+d)$ においては負になる．

いずれの場合でも $S(i)$ の符号変化は 1 回である．□

$S(1)>0$ は $(1,b-1)$ での最適アクションはアクション A であることを意味する．よって 補題 1 と補題 2 より以下の定理を得る．

定理 1 もし $(1,b-1)$ における最適アクションがアクション A ならば，$(i,b-1)$ に対する最適アクションはアクション A からアクション B に i の増加にともない一度だけ変化する．またその変化は $i\le p(c+d)(l+1)/(pc+d)-1$ で生じる．□

$m<b-1$ の場合

状態 $(i,b-1)$ に対する最適アクションの変化は i の増加にともない一度であることを示した．次に (i,m) $(m<b-1)$ においても同様の性質があることを帰納的に示す．

まず $B(i,m)$ と $V(i,m)$ が m に関して増加するとこを示す．

補題 3 $B(i,m)$ と $V(i,m)$ に対して，$B(i,m-1)\le B(i,m)$ と $V(i,m-1)\le V(i,m)$ が成立する．□

証明. 定義より $V(i,b)=A(i,b)$, $V(i,b-1)\le A(i,b-1)$. また $A(i,m)=A(i,m-1)$ が (4) より成り立つ. よって

$$V(i,b-1)\le A(i,b-1)=A(i,b)=V(i,b). \tag{12}$$

$V(i,m-1)\le V(i,m)$ ならば $B(i,m-2)\le B(i,m-1)$ かつ $V(i,m-2)\le V(i,m-1)$ を示すことは簡単である. よって帰納法により, 補題 3 が成り立つ. □

補題 3 により, $B(i,m)\le A(i,m)$ ならば $B(i,k)\le A(i,k)$ が $k\le m$ に対して成り立つ. よって, TB を処理した時間が増加すると, 最適アクションはアクション B からアクション A に変化する場合しかないことがわかる.

固定した m に対し, アクション A が最適である最大の i を $I_m=\max\{i|A(i,m)\le B(i,m)\}$ で定義すると以下の補題が成り立つ.

補題 4 もし $A(i,m)\le B(i,m)$ が $0\le i\le I_m$ に対して成立するならば, $A(i,m-1)\le B(i,m-1)$ が $0\le i\le I_m-1$ において成立する. □

証明.
状態 (i,m) $(0\le i\le I_m)$ ではアクション A が最適であるから, 状態 $(i,m-1)$ $(0\le i\le I_m-1)$ では 1 期間では待ち行列人数が増えても 1 しか増加しないことから $B(i,m-1)=C(i,m-1)$ である, 定義により $C(i,m-1)=C(i,m)$ かつ $C(i,m)\ge B(i,m)$ が成立するので $A(i,m-1)=A(i,m)\le C(i,m)=C(i,m-1)=B(i,m-1)$ が $0\le i\le I_m-1$ に対して成立する. □

これらの補題から以下の定理を導出できる.

定理 2 もし $(1,m-1)$ においてアクション A が最適アクションならば,

1. $0\le i\le I_m$ となるすべての i に対してアクション A が最適であり, $I_m\le p(c+d)(l+1)/(pc+d)-1$ である.
2. I_m は m に関して増加するが, 増加する場合も 1 しか増加しない, すなわち

$$I_{m-1}\le I_m\le I_{m-1}+1.$$

が成立する.

4 数値例

数値例として, 到着確率 $p=0.4$, 退去確率 $q=0.5$, 期日遅れコスト $d=10$, 期日から遅れた単位時間あたりのコスト $c'=2$, TB に必要な時間 $b=8$, TB 以外に使える時間 $l=8$ とした場合の最適政策について示す. なお, 数値計算上, 待ち行列の容量は 14 としたが, 有限容量の場合でも同様の証明が成立するため最適政策の構造は無限容量の場合と同様の性質がある. ただし, 意思決定者は容量いっぱいの場合でも, 待ち行列の最後尾につけるものとしている.

横軸が待ち行列人数が i ときを示し, 縦軸が TB に費やした時間 m を示す. A はアクション A が最適であることを示し, Bはアクション Bが最適であることを示す. A と B の境界が i の増加により一度だけ変化することと, m の増大にともない, 境界が 1 増えるか, 増えないかのどちらかであることがわかる (ただし $m=b$ のところは全て A である).

m																
8	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
7	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
6	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
5	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
4	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
3	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
2	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
1	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
0	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	i

表 1: 最適政策の数値計算例

参考文献

[1] R. Hassin and M. Haviv, *To queue or not to queue*, Kluwer Academic Pubishers, Boston (2003).

[2] A. Mandelbaum and U. Yechiali, Optimal entering rules for a customer with wait option at an $M/G/1$ queue, *Management Science*, **29-2**, 174–187 (1983).

[3] J. Koyanagi and H.Kawai, An optimal join policy to the queue in processing two kinds of jobs, *Proc. of the Int. Conf. Applied Stochastic System Modeling*, 140–147 (2000).

[4] J. Koyanagi and H.Kawai, A maximization of the finishing probability of two jobs processed in a queue, *Proc. of the 32nd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications*, 171–176 (2001).

[5] J. Koyanagi and H.Kawai, An optimal policy to minimize expected tardiness cost due to waiting time in the queue, *Proc. of the 2004 Asian International Workshop (AIWARM 2004)*, 285–292 (2004).