数理解析研究所講究録 1477 巻 2006 年 240-248

ファジィ線形計画問題と灰色線形計画問題について

金沢学院大学・経営情報学部 桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

従来，数理計画問題はその定式化の段階では何らあいまいさを含まずに定式化され，その解を得た後に感度分析等のポスト・オプティマリティ・アナリシスの手法により解の頑健性などが検討されてきた．しかしながら，定式化された事象が将来を対象とした計画である場合等には統計的・確率的なあいまいさ (不確実性) を持つこともあり，それらに対応するため確率論を援用した数理計画法 — 確率計画法 — が必要とされ，発展してきた (たとえば，[6])．その一方で，定式化された数理計画問題に現れる係数・定数等のパラメータが確定的に定まらないモデルやポスト・オプティマリティ・アナリシスを待つまでもなく不等式制約が必ずしも厳密な意味を持たないモデルなどさまざまな状況に適応できるフレキシビリティを持った数理計画問題の定式化やその解法は長く軽視されたままであった．このような問題に現れる不確定性を表現する方法のひとつが，L.A. Zadeh によって提案された Fuzzy Sets [10] である．Zadeh[10] の後，多くの研究者により，このようなあいまいさ (不確定性) を持つ数理計画問題に関する解法やその性質の研究が進められ，現在に至っている．

一方，1982 年，Deng Julong(鄧聚龍) は Control Problems of Grey Systems [1] によって，不確定性を表現する新たな概念の枠組みを提案している．Deng Julong[1] では，情報不足等の理由によって，システムを記述するために必要なパラメータの一部分あるいはすべてが不確定であるとして与えられているシステムを “grey system” と定義し，その安定性について議論している．後に，Deng Julong の与えた新しい不確定性概念に基づく理論は灰色理論 (Grey Theory) と呼ばれている．

灰色理論の応用研究は多数あり，Deng Julong は Introduction to Grey System Theory[5](1989) において，[1] に触発された多くの学問領域 (農業・生態学・経済学・気象学・医学・歴史学・地理学等を含む約 20 の領域) に関する論文を列挙し，その応用範囲の広さを示している．その応用の一つとして，Deng Julong によって Grey Programming が著わされ，ファジィ数理計画法と同様に曖昧さを扱う数理計画法の提案が行われている．なお，[5] の詳細については，その前年に発表された Deng Julong 自身による Grey Linear Programming [4] (1988) において述べられ，Grey Forecasting, Grey Target, Grey Interval それぞれの概念を含む線形計画問題も取り上げられている．

本稿では，このように不確定性を取り扱う 2 つの理論 — ファジィ理論と灰色理論 — に基づく数理計画法のひとつである線形計画問題について，数値例を通して，その関係について考察することを目的とする．

2 準備

この節では，灰色理論の基礎概念を [2] に従って述べるが，数学的に不十分な点もあるため，その点については補足しつつ進めることとする．

2.1 灰数

[2] では灰数について次のように述べている．

> おおよその範囲のみがわかっていて，確かな値がわからない数を灰数という．灰数は一つの数ではなく一つの数の集合で，一つの数の区間である．灰数を記号 $\otimes$ で表す．一方，完全に分かっている状態を白色といい，まったくわからない状態を黒色という．灰色は白色と黒色の中間になる．a を区間，a_i を a の中の数とする．灰数 $\otimes$ が a 区間のうちの，ある値を取ると，a_i を灰数 $\otimes$ の一つの可能な白化値という．このために次のような記号を用いる．
> - $\otimes$ は一般の灰数である
> - $\otimes(a_i)$ は a_i を白化値とする灰数である
> - $\tilde{\otimes}$ あるいは $\otimes(a_i)$ は灰数 $\otimes$ の白化値である

上の箇条書きで示された 2，3 点めは灰数 $\otimes(a_i)=$ 白化値 $\tilde{\otimes}$ を導き矛盾が起る等，論理的に扱いにくいのでここでは次のような定義を与えることとする．

定義 2.1 (灰数). 実数 $\mathbb{R}$ 上の有界なファジィ区間 $\tilde{A}$ を**灰数**を呼び，$\otimes_{\tilde{A}}$ で表す．また，$a \in \mathrm{supp}(\otimes_{\tilde{A}})$ を $\tilde{A}$ の**一つの可能な白化値** (混乱がなければ単に**白化値**) と呼ぶ．但し，$\mathrm{supp}(\otimes_{\tilde{A}}) = \mathrm{supp}(\tilde{A}) = \mathrm{cl}\left(\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}\right)$ であり，$\otimes_{\tilde{A}}$ の**台**と呼ぶ．$\mu_{\tilde{A}}$ は $\tilde{A}$ のメンバーシップ関数を表す．また，cl は閉包を表す．

$a \in \mathbb{R}$ が与えられたとき，ある灰数 $\otimes_{\tilde{A}}$ が存在して，$a \in \mathrm{supp}(\otimes_{\tilde{A}})$ が成り立つならば，$\otimes_{\tilde{A}}$ を $\otimes_{\tilde{A}}(a)$ と表し，a **を白化値とする灰数**という．また，灰数 $\otimes_{\tilde{A}}$ の白化値を $\tilde{\otimes}_{\tilde{A}}$ で表す．

注意 2.1. 灰色理論においてはメンバーシップ関数にあたる関数を白化関数ということもある．

2.2 生成数

灰色理論の灰色予測の分野において用いられる生成方程式について述べる．以下で

$$X^{(i)} = \left\{x^{(i)}(1), x^{(i)}(2), \dots, x^{(i)}(n)\right\} \subset \mathbb{R}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

を有限数列の集合族とし，$i=0$ のとき，すなわち $X^{(0)} = \left\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\right\}$ を原始数列と呼ぶ．

2.2.1 AGO

AGO(Accumulated Generating Operation) とは累加生成とも呼ばれ，次式によって定義される．

$$x^{(i)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(i-1)}(m), \qquad k = 1, 2, \dots, n\,;\, i = 1, 2, \dots \tag{2}$$

$k = 2, 3, \dots, n$ の場合，上式は次式のようにも表せるので，計算上は次式を用いることも多い．

$$x^{(i)}(k) = \sum_{m=1}^{k-1} x^{(i-1)}(m) + x^{(i-1)}(k) = x^{(i)}(k-1) + x^{(i-1)}(k), \qquad k = 2, 3, \dots, n\,;\, i = 1, 2, \dots \tag{3}$$

特に原始数列 $X^{(0)}$ から AGO を r 回繰り返して得られた数列 $X^{(r)}$ を r-AGO と表す．

2.2.2 IAGO

IAGO(Inverse Accumulated Generating Operation) は逆累加生成と呼ばれる数列生成法で，r-AGO の逆作用に対応する．

まず，r-AGO $X^{(r)}$ が得られているとする．このとき IAGO を次のように定義する．

$$\alpha^{(0)}\big(x^{(r)}(k)\big) = x^{(r)}(k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$
$$\alpha^{(i)}\big(x^{(r)}(k)\big) = \alpha^{(i-1)}\big(x^{(r)}(k)\big) - \alpha^{(i-1)}\big(x^{(r)}(k-1)\big), \qquad k = 2, 3, \ldots, n\,;\ i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

注意 2.2. 上の定義式からも明らかなように任意の $i = 1, 2, \ldots$ に対して $k = 1$ の場合が定義されていない．そこで便宜上 $x^{(r)}(0) = 0$ を条件に加える．これによって定義式は

$$\alpha^{(0)}\big(x^{(r)}(k)\big) = x^{(r)}(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{4'}$$
$$\alpha^{(i)}\big(x^{(r)}(k)\big) = \alpha^{(i-1)}\big(x^{(r)}(k)\big) - \alpha^{(i-1)}\big(x^{(r)}(k-1)\big), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n\,;\ i = 1, 2, \ldots \tag{5'}$$

となるが，矛盾なく定義される．

命題 2.1 ([2]). *r-AGO* $X^{(r)} = \{x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \ldots, x^{(r)}(n)\}$ が得られているとする．このとき，原始数列 X^0 の各要素は $x^{(0)}(k) = \alpha^{(r)}\big(x^{(r)}(k)\big)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ によって計算される．

2.3 GM(1,1)

灰色理論においては GM$(1, N)$ と表される (通常 (白色) の意味での) N 変数の 1 階の微分方程式型モデルが存在する (たとえば，[2] を参照のこと)．その変数が 1 つである場合を GM(1,1) と表す．具体的には，与えられた数列 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を用いて x_m, $m = n+1, n+2, \ldots$ を予測するために

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b \qquad (a, b : \text{定数}\ ) \tag{6}$$

に対応する差分方程式の近似モデルを構成し，それを利用する方法である．

以下では，その解法の概略を述べる．まず，次のような準備を行う．

原始数列　与えられた数列 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を原始数列 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \ldots, x^{(0)}(n)\}$ とみなす．

AGO による累加生成　$X^{(0)}$ から $X^{(1)}$ を構成する．

近似対象となる数列の生成　$X^{(1)}$ の連続する 2 つの項の平均値 $\chi^{(1)}(k{+}1) = \{x^{(1)}(k{+}1){+}x^{(1)}(k)\}/2$, $k = 1, \ldots, n-1$ からなる数列を定義する．微分方程式はこの新たな数列を近似するように構成される．

微分項の差分表現　モデルの原型となる微分方程式 (6) の左辺第一項を差分表現により近似する．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k), \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{7}$$

注意 2.3. IAGO の定義より

$$\alpha^{(1)}\big(x^{(1)}(k+1)\big) = \alpha^{(0)}\big(x^{(1)}(k+1)\big) - \alpha^{(0)}\big(x^{(1)}(k)\big) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) = x^{(0)}(k+1)$$

であるから $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx \alpha^{(1)}\big(x^{(1)}(k+1)\big)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ と表せることに注意．

以上の準備によって，式 (6) の灰色差分近似モデルは次のように与えられる．

$$\alpha^{(1)}\big(x^{(1)}(k+1)\big) + a\chi^{(1)}(k+1) = b, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{8}$$

さらに，$\alpha^{(1)}\big(x^{(1)}(k+1)\big) = x^{(0)}(k+1)$ および $\chi^{(1)}(k+1) = \dfrac{1}{2}\big(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1)\big)$ であること

思い出せば，式 (8) は

$$x^{(0)}(2) + \frac{1}{2}\big(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)\big)a = b$$
$$x^{(0)}(3) + \frac{1}{2}\big(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)\big)a = b$$
$$\vdots$$
$$x^{(0)}(n) + \frac{1}{2}\big(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)\big)a = b$$

と表せる．よって，

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \cdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\big(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)\big) & 1 \\ -\frac{1}{2}\big(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)\big) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}\big(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)\big) & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと，最小二乗法により未知パラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{pmatrix}^T = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{y}$ によって求められる．

この推定値 $\hat{a}, \hat{b}$ を式 (6) に代入し，通常の微分方程式を解き，その一般解を得る．

$$x(t) = Ce^{-\hat{a}t}\frac{\hat{b}}{\hat{a}} \qquad (C : \text{積分定数}) \tag{9}$$

より，$X^{(1)}$ の各要素の推定値 $\hat{x}^{(1)}(k)$ は

$$\hat{x}^{(1)}(k) = Ce^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

によって与えられる．これに $k=1$ を代入して，初期条件 $x^{(1)}(1) = Ce^{-\hat{a}} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}$ より

$$C = \left(x^{(1)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)e^{\hat{a}}$$

を得る．よって $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ にこの値を代入すると

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{11}$$

を得る．

注意 2.4. 上式において $x^{(1)}(1) = \sum_{m=1}^{1} x^{(0)}(m) = x^{(0)}(1)$ であるから，$x^{(1)}(1)$ の部分は $x^{(0)}(1)$ で置き換えても良い．

式 (11) によって，$X^{(1)}$ が得られたので IAGO を行うことで $X^{(0)}$ の数列の予測が可能となる．

以上の手順を整理すると，予測対象の原始数列に対して (1) まず，AGO で累加生成を行い，(2) GM(1,1) を用いて予測モデルを構成し，(3) IAGO で原始数列の予測を行うというものである．この意味において，この手順を “IAGO∘GM∘AGO” と表すこともある ([4])．

2.4 区間線形回帰分析

ここではファジィ理論を基礎とする可能性線形回帰分析の特殊な場合である区間線形回帰分析について [8] に従って簡単に振り返っておく．以下では，線形回帰式における係数をして区間を考える場合には，区間 A を台形型ファジィ数の特殊な場合として，そのメンバーシップ関数 μ_A をパラメータ $a, c \in \mathbb{R}(c > 0)$ を用い

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a-c, a+c] \text{ のとき} \\ 0, & x \notin [a-c, a+c] \text{ のとき} \end{cases}$$

によって特徴づける．便宜上，区間 $A = (a, c)$ において $c = 0$ として表現された場合は，区間 $A = (a, c)$ は実数値 a を表すものとする．

以下の仮定をおく．

(i) クリスプデータ $(y_j, \boldsymbol{x}_j), j = 1, \ldots, m$ が与えられている．ここで，$\{y_j\}$ は目的変数であり，$\{\boldsymbol{x}_j\}$ は説明変数からなる n 次元ベクトルである．

(ii) 回帰式は

$$Y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n \tag{12}$$

で与えられる．ここで $A_i = (a_i, c_i), i = 1, \ldots, n$ は区間係数とする．

(iii) 回帰区間係数 $A_i = (a_i, c_i), i = 1, \ldots, n$ は各データ $(y_j, \boldsymbol{x}_j), j = 1, \ldots, m$ が次式を満たすように定められる．

$$y_j \in A_1 x_{1j} + A_2 x_{2j} + \cdots + A_n x_{nj} = (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j|), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

即ち

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j| \leqslant y_j \leqslant \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j|, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

ここで $\boldsymbol{a}^T = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n), |\boldsymbol{x}_j|^T = (|x_{1j}|\ |x_{2j}|\ \ldots\ |x_{nj}|)$ である．

(iv) 回帰区間係数 $A_i = (a_i, c_i), i = 1, \ldots, n$ は

$$J = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j| \tag{14}$$

を最小にするパラメータとして定められる．

この仮定の下，区間線形回帰式を求めるには

$$\begin{cases} \text{minimize} & J = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j| \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j| \leqslant y_j \leqslant \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}_j|, \qquad j = 1, \ldots, m, \\ & \boldsymbol{c} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{15}$$

を解けば良い．

3 灰色線形計画問題

[2] では灰色意思決定として灰色情勢決定，灰色線形計画および灰色整数計画について述べられている．ここでは，その中から灰色線形計画法を取り上げる．

[2] において，次の 2 種類の灰色線形計画法が紹介されている．

予測型灰色線形計画法　灰数を係数や定数に含む線形計画問題を対象とする．特に，右辺定数の一部あるいは全部を既存データから IAGO∘GM∘AGO によって得られた予測値とし，その計画問題を解く方法を指す．

漂移型灰色線形計画法　灰数を含む点では予測型灰色線形計画法と同様であるが，右辺定数には予測値を含め灰数が含まれていないモデルを対象とする．実際には灰数の代わりにそれらの白化値を用いて計画問題を解く方法を指す．

以下では，予測型灰色線形計画法についてのみ述べる．

3.1　予測型灰色線形計画

予測型灰色線形計画問題は通常の線形計画問題の係数や右辺定数に灰数が含まれるモデルである．特に，既存データを利用して AGO, GM(1,1), IAGO の手順で将来の予測値を得て，それを右辺定数とするモデルを指している．ここでは，[2] の例 3.2(pp.137–144) を引用し，説明する．

ある地区では鉱山品の精密な加工業が発展し，x_1 と x_2 の製品がある．x_1 を生産するとキログラムごとに 4 キロワットの電力を消耗し，x_2 を生産するとキログラムごとに 5 キロワットの電力を消耗する．x_1 を生産するとキログラムごとに石炭が 1 トンから 9 トンの範囲を必要とし，x_2 を生産するとキログラムごとに石炭 4 トンを必要とする．一方，x_1 を生産するとキログラムごとに労力 3 人が必要で，x_2 を生産するとキログラムごとに労力 10 人が必要である．

x_1 はキログラムごとに価値が 700 元で，x_2 はキロごとに価値が 1200 元である．今，石炭は 360 トン，労力は 300 人ある．電力の発展は下の表に示してある．

年度	1981	1982	1983	1984
電力 (ワット)	168	174	180	190

x_1 と x_2 に 1985 年と 1986 年の計画を作成せよ．

1985 年の計画問題を定式化すると次のように表現できる．

$$\begin{cases} \text{maximize} & z = \ \ 7\,x_1 + 12\,x_2 \\ \text{subject to} & \otimes_{\tilde{a}}\,x_1 + \ \ 4\,x_2 \leqslant 360 \\ & 3\,x_1 + 10\,x_2 \leqslant 300 \\ & 4\,x_1 + \ \ 5\,x_2 \leqslant \hat{b}^{(0)}(5) \\ & x_1\ , \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{16}$$

ここで，$\otimes_{\tilde{a}}$ はその白化値 $\tilde{\otimes}_{\tilde{a}}$ について $\tilde{\otimes}_{\tilde{a}} \in [1,9]$ が成り立つものとする．また，$\hat{b}^{(0)}(5)$ は原始数列 $\{168, 174, 180, 190\}$ から灰色予測 IAGO∘GM∘AGO によって得られる値であるとする．1986 年の場合も同様の計画問題であり，$\hat{b}^{(0)}(6)$ も同様であるとする．

まず，$B^{(0)} = \{b^{(0)}(1), b^{(0)}(2), b^{(0)}(3), b^{(0)}(4)\}$ とおく．すなわち，$b^{(0)}(1) = 168$, $b^{(0)}(2) = 174$, $b^{(0)}(3) = 180$, $b^{(0)}(4) = 190$ である．$B^{(1)}$ を求めると

$$b^{(1)}(1) = b^{(0)}(1) = 168,$$

$$b^{(1)}(2) = b^{(0)}(1) + b^{(0)}(2) = 342,$$

$$b^{(1)}(3) = b^{(0)}(1) + b^{(0)}(2) + b^{(0)}(3) = 522,$$

$$b^{(1)}(4) = b^{(0)}(1) + b^{(0)}(2) + b^{(0)}(3) + b^{(0)}(4) = 712$$

であり，連続する 2 項の平均値の数列 $\{\beta^{(1)}(2),\beta^{(1)}(3),\beta^{(1)}(4)\}$ を求めると

$$\beta^{(1)}(2) = (168+342)\div 2 = 255,$$
$$\beta^{(1)}(3) = (342+522)\div 2 = 432,$$
$$\beta^{(1)}(4) = (522+712)\div 2 = 617$$

である．よって

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}174\\180\\190\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix}-255 & 1\\-432 & 1\\-617 & 1\end{pmatrix}$$

とおくと，最小二乗法により未知パラメータの推定値

$$\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}-255 & 1\\-432 & 1\\-617 & 1\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}-255 & 1\\-432 & 1\\-617 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix}-255 & 1\\-432 & 1\\-617 & 1\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}174\\180\\190\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.04427\\162.08930\end{pmatrix}$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}\hat{b}^{(1)}(k+1) &= \left(b^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\\ &= \left(168 - \frac{162.08930}{-0.04427}\right)e^{0.04427k} + \frac{162.08930}{-0.04427}\\ &= 3829.125e^{0.04427k} - 3661.125, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1\end{aligned}$$

である．$k=4, k=5$ を代入すると $\hat{b}^{(1)}(5) = 909.8033$, $\hat{b}^{(1)}(6) = 1116.704$ を得るので，IAGO を適用する．

$$\begin{aligned}\hat{b}^{(0)}(5) &= \alpha^{(1)}\left(\hat{b}^{(1)}(5)\right) = \alpha^{(0)}\left(\hat{b}^{(1)}(5)\right) - \alpha^{(0)}\left(\hat{b}^{(1)}(4)\right) = \hat{b}^{(1)}(5) - \hat{b}^{(1)}(4) = 909.8033 - 712\\ &= 197.8033 \fallingdotseq 198,\\ \hat{b}^{(0)}(6) &= \alpha^{(1)}\left(\hat{b}^{(1)}(6)\right) = \alpha^{(0)}\left(\hat{b}^{(1)}(6)\right) - \alpha^{(0)}\left(\hat{b}^{(1)}(5)\right) = \hat{b}^{(1)}(6) - \hat{b}^{(1)}(5) = 1116.704 - 909.8033\\ &= 206.9010 \fallingdotseq 207\end{aligned}$$

よって，線形計画問題 (16) は

$$\left\{\begin{array}{lrl} \text{maximize} & z = & 7\,x_1 + 12\,x_2\\ \text{subject to} & & \otimes_{\tilde{a}}\,x_1 + \ \ 4\,x_2 \leqslant 360\\ & & 3\,x_1 + 10\,x_2 \leqslant 300\\ & & 4\,x_1 + \ \ 5\,x_2 \leqslant 198\\ & & x_1\ , \quad x_2 \geqslant 0\end{array}\right. \tag{17}$$

と表される．

[2] では $\tilde{\otimes}_{\tilde{a}} \in [1,9]$ であることから，$\otimes_{\tilde{a}}$ に 9 を代入して問題を解き，最適解 $(x_1^*, x_2^*) = (19.20, 24.24)$ および最適値 $z^* = 425.28$ を得ている．しかしながら，実質的には灰数 $\otimes_{\tilde{a}}$ を含む制約式は非活性な制約式であるため解には影響を与えていない．したがって，この解法のままでは灰数を含む制約式が活性な制約式となった場合には問題を解くことができない．この場合は，灰数をファジィ数あるいはファジィ区間として扱うことで通常のファジィ線形計画問題として解くことが可能である．また，この問題のように 1 つあるいは複数であってもある条件を満たす係数のみが，(ファジィ区間の特殊な場合の) クリスプな区間の場合であればパラメトリックなアプローチや区間解析の手法を用いて解を得ることが可能な場合もある．

なお，1986 年の計画は $\hat{b}^{(0)}(6) = 207$ を代入した線形計画問題を解けばよく，1985 年の場合と同様に灰数を含む制約式は非活性であり，灰数 $\otimes_{\tilde{a}}$ の白化値が $\tilde{\otimes}_{\tilde{a}} \in [1,9]$ を満たす限り最適解は $(x_1^*, x_2^*) = (22.80, 23.16)$ で，最適値は $z^* = 437.52$ となる．

4 ファジィ線形計画問題

前節の問題と比較をするため，(16) 式をファジィ数理計画と見なす．まず，未知パラメータ $\hat{b}^{(0)}(5)$ を区間線形回帰分析を行う．事前に与えられているデータは (1981, 168), (1982, 174), (1983, 180), (1984, 190) であるが，便宜上 (1, 168), (2, 174), (3, 180), (4, 190) として区間線形回帰分析を行う．

ここでは，定数項を持つ一変数の回帰式 $Y = A_0 + A_1 x$ を次の線形計画問題により求めるため，上述の定式化を一部変更したものを適用する．以下では，$A_i = (a_i, c_i), i = 0, 1$ とおく．

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{minimize} & J = (c_0 + c_1) + (c_0 + 2c_1) + (c_0 + 3c_1) + (c_0 + 4c_1) \\ \text{subject to} & (a_0 + a_1) - (c_0 + c_1) \leqslant 168, \\ & (a_0 + a_1) + (c_0 + c_1) \geqslant 168, \\ & (a_0 + 2a_1) - (c_0 + 2c_1) \leqslant 174, \\ & (a_0 + 2a_1) + (c_0 + 2c_1) \geqslant 174, \\ & (a_0 + 3a_1) - (c_0 + 3c_1) \leqslant 180, \\ & (a_0 + 3a_1) + (c_0 + 3c_1) \geqslant 180, \\ & (a_0 + 4a_1) - (c_0 + 4c_1) \leqslant 190, \\ & (a_0 + 4a_1) + (c_0 + 4c_1) \geqslant 190, \\ & c_0,\ c_1 \geqslant 0. \end{array}\right. \tag{18}$$

これを解いて $A_0 = (160.667, 0.0)$, $A_1 = (6.889, 0.444)$ を得るので，$\hat{b}^{(0)}(5) = (195.111, 2.222)$ であることが分かる．(同様にして $\hat{b}^{(0)}(6) = (202.000, 2.667)$ も得ることができる．)

仮定より $\tilde{\otimes}_{\tilde{a}} \in [1, 9]$ であったので，灰数 $\tilde{\otimes}_{\tilde{a}}$ を定義により台数型ファジィ数 $\tilde{a}$ の特殊な場合である区間と見なすと $\tilde{a} = (5, 4) = [1, 9]$ と表せる．

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{maximize} & z = 7\,x_1 + 12\,x_2 \\ \text{subject to} & (5,4)\,x_1 + 4\,x_2 \leqslant 360 \\ & 3\,x_1 + 10\,x_2 \leqslant 300 \\ & 4\,x_1 + 5\,x_2 \leqslant (195.111, 2.222) \\ & x_1\ ,\quad x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{19}$$

この問題はパラメータに区間値を持つ線形計画問題であるので，次の可能性線形計画問題と必然性線形計画問題を解くことでその解を得ることができる．

■可能性線形計画問題

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{maximize} & z = 7\,x_1 + 12\,x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + 4\,x_2 \leqslant 360 \\ & 3\,x_1 + 10\,x_2 \leqslant 300 \\ & 4\,x_1 + 5\,x_2 \leqslant 197.333 \\ & x_1\ ,\quad x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{20}$$

最適解 $\boldsymbol{x}_P^* = (18.933, 24.320)$，最適値 $z_P^* = 424.373$

■必然性線形計画問題

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{maximize} & z = 7\,x_1 + 12\,x_2 \\ \text{subject to} & 9\,x_1 + 4\,x_2 \leqslant 360 \\ & 3\,x_1 + 10\,x_2 \leqslant 300 \\ & 4\,x_1 + 5\,x_2 \leqslant 192.889 \\ & x_1\ ,\quad x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{21}$$

最適解 $\boldsymbol{x}_N^* = (17.156, 24.853)$，最適値 $z_N^* = 418.3289$

ファジィ線形計画法によれば，意思決定者がパラメータの誤差を楽観的に判断する場合には $\boldsymbol{x}_P^* = (18.933, 24.320)$ を用いれば良く，悲観的に考える場合には $\boldsymbol{x}_N^* = (17.156, 24.853)$ を用いれば良いことが分かった．

(なお，1986 年に関しては $\boldsymbol{x}_P^* = (20.267, 23.920)$，$z_P^* = 428.907$ 及び $\boldsymbol{x}_N^* = (21.867, 23.440)$，$z_N^* = 434.347$ である．)

5 まとめと今後の課題

本稿では，灰色線形計画法とファジィ線形計画法を比較検討するための一つの材料として，灰色線形計画法の予測型灰色線形計画法と，それに対比させるため区間線形回帰分析を用いた予測手法によるファジィ線形計画法を同一の問題に対して適用した．

単純に定性的な比較を行うことは難しいが，この問題に限って言えば灰色線形計画問題の解は可能性線形計画問題のそれと近い値を示し，楽観的状況での計画問題に相当することが分かった．今後はより定性的な比較が行えるよう，特に灰色線形計画法の数学的性質について検討したい．

本稿において灰色理論における灰数の概念をファジィ集合として捉えることで，定式化が可能となっているが，これは Deng Julong による数値例によったものである (例えば，[3])．しかしながら，この他にも 2 つのメンバーシップ関数によって灰数を定義する方法 ([9]) や，明確な定義を与えないままの論文 (例えば，[7]) も依然として存在する．

[9] のように 2 つのメンバーシップ関数による特徴づけの場合，灰数は区間値メンバーシップ関数によって特徴づけられているとも考えられ，あるいはまたそれを拡張したタイプ n ファジィ集合 [11] に含まれるとも考えられる．いずれにしろ，これら点から考えても灰色理論は数学的基礎理論が明確ではないことが明らかになったので，今後は灰色理論の数学的基礎理論の構築について検討を進めつつ，ファジィ数理計画法との比較検討を行いたい．

参考文献

[1] Deng Julong, "Control Problems of Grey System", *Systems and Control Letters*, **1**(5), 288-294, 1982.

[2] 鄧聚龍著, 趙君明・北岡正敏訳, **灰色理論による予測と意思決定**, 日本理工出版会, 1999. (原本: Deng Julong, *Grey Forecasting and Decision Making* (in Chinese), Huazhong University of Science and Techonology Press, Wuhan, China, 1986.)

[3] Deng Julong, "Grey Decision Making of Group", in Deng Julong et al., *Grey System*, China Ocean Press, Beijing, China, 115–129, 1988.

[4] Deng Julong, "Grey Linear Programming", in Deng Julong et al., *Grey System*, China Ocean Press, Beijing, China, 130–138, 1988.

[5] Deng Julong, "Introduction to Grey System Theory", *The Journal of Grey System*, **1**, 1–24, 1989.

[6] Kall, Peter and Stein W. Wallace, *Stochastic Programming*, John Wiley & Sons Inc, Chichester, UK, 1994.

[7] Si feng Liu and Yi Lin, *An Axiomatic Definition for the Degree of Greyness of Grey Numbers, 2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2420–2424.

[8] Tanaka, Hideo and Peijun Guo, *Possibilistic Data Analysis for Operations Research*, Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 1999.

[9] Wang Qingyin, Wu Heqin, Xue Jinsheng and Lin Kaidi, "On Grey Number: Basic Element of Grey Mathematics and Its Relations with Fuzzy and Real Numbers", *The Journal of Grey System*, **1**, 69–77, 1988.

[10] Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets". *Information and Control*, **8**, 338–353, 1965.

[11] Zadeh, L.A., "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning - I". *Information Science*, **8**, 199–249, 1975.