

## 非期待効用の枠組みを用いたリスク回避の一考察

大阪大学・大学院経済学研究科 松村 圭悟 (Keigo Matsumura)  
 Graduate School of Economics  
 Osaka University

### 1 はじめに

期待効用理論はファイナンス・不確実性の経済学・ゲーム理論等様々な分野で使われており、「主体 A が主体 B よりリスク回避的である」という指標は Arrow-Pratt ordering で定式化されている。

しかし、この分析手法では多くの矛盾点も指摘されている (例: アレのパラドックス, エルスバークの反例)。

この問題を解決するために (効用関数から確率を分離しない) 非期待効用理論が提案されているが、「主体 A が主体 B よりリスク回避的である」という指標はまだ定式化されていない。Nau (2003) は、非期待効用の枠組みで「buying risk premium」という概念を用いて、「リスク回避である主体」の特徴づけをおこなった。

本論文では、この「buying risk premium」という概念を用いて、「主体 A は主体 B よりリスク回避的である」ということを定義する。そして、その指標を用いてある種の非期待効用の下でポートフォリオの問題を分析し期待効用理論と同じ結論になることを示す。

### 2 記法

- 効用関数:  $U(\mathbf{x}) = U(x_1, \dots, x_n)$  ( $x_i$  は  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  という自然の状態の下での確率変数)
- 富:  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in R^\Omega$  は  $\Omega$  上の確率変数のベクトル表現
- $U(\mathbf{w})$ :  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in R^\Omega$  に関する効用関数
- リスク資産の利得:  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in R^\Omega$
- リスク中立確率:  $\pi_i(\mathbf{w}) = \frac{U_i(\mathbf{w})}{\sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{w})}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . ( $U_i(\mathbf{w}) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{w})$ )  
 (リスク中立確率については, Duffie (2001) の p4 のセクション B を参照)

### 3 「リスク回避的である」ということの定義について

一般的に「リスク回避的である」ということは、効用関数の形状つまり、「効用関数が凹関数である」として定義される。

しかし、本論文での定義はレベル集合の観点から行われている。つまり、「リスク回避的である」ということは「無差別曲線が凸である」として定義される (Yaari (1969))。このことから、効用関数が準凹関数であることも分かる。

### 4 効用関数の視点からの「リスク回避的な主体」の特徴付け

#### 4.1 リスク回避的な主体と buying risk premium の関連性

定義 4.1.1 [buying price]

リスク資産の利得  $\mathbf{z}$  に関する buying price  $B(\mathbf{z}, \mathbf{w})$  は, 次式で定義される.

$$U(\mathbf{w} + \mathbf{z} - B(\mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{1}) - U(\mathbf{w}) = 0. \quad \mathbf{1} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{|\Omega|}$$

#### 定義 4.1.2 [buying risk premium]

buying risk premium  $b(\mathbf{z}, \mathbf{w})$  は, 富  $\mathbf{w}$  とリスク資産  $\mathbf{z}$  を所与として, 主体の「リスク資産のリスク中立確率の下での期待値」と「buying price」の差, つまり

$$b(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbb{E}_{\pi(\mathbf{w})}[\mathbf{z}] - B(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \quad (1)$$

で定義される.

#### 定理 4.1.3 [主体がリスク回避的]

主体がリスク回避的であることと, buying risk premium があらゆる富の場合において非負であることと同値である.

## 4.2 buying risk premium の近似とその簡略化

#### 定義 4.2.1 [リスク回避度行列]

$\mathbf{w}$  における  $U$  のリスク回避度行列  $R(\mathbf{w})$  を以下のように定義する.

$$R(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} r_{11}(\mathbf{w}) & \cdots & r_{1n}(\mathbf{w}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(\mathbf{w}) & \cdots & r_{nn}(\mathbf{w}) \end{pmatrix},$$

ここで,

$$r_{ij}(\mathbf{w}) = -\frac{U_{ij}(\mathbf{w})}{U_i(\mathbf{w})}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

#### 定理 4.2.2 [buying risk premium の近似]

リスク資産  $\mathbf{z}$  が中立資産 (= リスク中立確率の元では期待値がゼロとなるリスク資産) のもとでの buying risk premium は次のように近似できる.

$$b(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbb{E}_{\pi(\mathbf{w})}[\mathbf{z}] - B(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \approx \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \Pi(\mathbf{w}) R(\mathbf{w}) \mathbf{z}, \quad (2)$$

ここで,

$$\Pi(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{U_1(\mathbf{w})}{\sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{w})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{U_n(\mathbf{w})}{\sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{w})} \end{pmatrix}$$

とおく.

この指標を簡略化するために, 3つの定理を導入する.

#### 定理 4.2.3 [例えば Johnson (1970)]

任意の正方行列  $A$  は, 対称行列成分  $B$  と歪行列成分  $C$  の和に分解できる:

$$A = B + C,$$

ここで,

$$B := \frac{A + A^T}{2}; \quad C := \frac{A - A^T}{2}.$$

**定理 4.2.4** [例えば Johnson (1970)]

正方行列が正値定符号であること, その対称行列部分が正値定符号でことは同値である.

**定理 4.2.5** [Debreu (1952), Theorem 4]

$m \times n$  行列  $C$  に対して,  $C_{kl}$  を  $C$  の上から  $k (\leq m)$  行, 左から  $l (\leq n)$  列抜き出した  $k \times l$  小行列とする.

$A$  を  $n \times n$  対称行列,  $B$  を  $n \times m$  行列で  $m \leq n$  とする.  $|B_{mm}| \neq 0$  を仮定すると, ゼロではなく  $B^T \mathbf{x} = 0$  を満たす任意の  $n$  ベクトル  $\mathbf{x}$  に対して,

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$$

が成り立つための必要十分条件は,

$$(-1)^m \begin{vmatrix} A_{rr} & B_{rm} \\ B_{rm}^T & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad r = m+1, \dots, n$$

が成り立つことである.

この3つの定理をあてはめると, ゼロでなく  $\pi(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} = 0$  を満たす任意の  $\mathbf{z}$  に対して,  $b_A(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - b_B(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \geq 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$(-1) \begin{vmatrix} A_{rr} & B_{r1} \\ B_{r1}^T & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} A_{rr} & \pi_1 \\ \vdots & \vdots \\ \pi_r & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad r = 2, \dots, n$$

ここで,  $A_{rr}$  は  $\Pi(\mathbf{w})(R_A(\mathbf{w}) - R_B(\mathbf{w}))$  から作られた  $r \times r$  の正方小行列で,  $B_{r1}$  は,  $(\pi_1(\mathbf{w}), \dots, \pi_r(\mathbf{w}))^T$  である.

### 4.3 特別な場合

一般的に, 式 (2) を簡略化することは出来ない. そこで効用関数を特定化することで, 簡略された具体的な指標を次節で導出する. なお, この節では引数を省略する.

#### 4.3.1 2 状態の場合

$$- \begin{vmatrix} \pi_1 \left( -\frac{U_{11}}{U_1} \right) & \frac{1}{2} \left\{ \pi_1 \left( -\frac{U_{12}}{U_1} \right) + \pi_2 \left( -\frac{U_{12}}{U_1} \right) \right\} & \pi_1 \\ \frac{1}{2} \left\{ \pi_2 \left( -\frac{U_{21}}{U_1} \right) + \pi_1 \left( -\frac{U_{12}}{U_1} \right) \right\} & \pi_2 \left( -\frac{U_{22}}{U_2} \right) & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 & 0 \end{vmatrix} \geq 0,$$

ここで,

$$\pi_1, \pi_2 > 0; \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

よって十分条件は、以下のように要約される.

$$-\frac{U_{11}}{U_1} \geq 0, \quad (3)$$

$$-\frac{U_{22}}{U_2} \geq 0, \quad (4)$$

$$-\frac{U_{11}}{U_1} + \frac{1}{2} \left\{ \pi_1 \left( -\frac{U_{12}}{U_1} \right) + \pi_2 \left( -\frac{U_{21}}{U_2} \right) \right\} \geq 0, \quad (5)$$

$$-\frac{U_{21}}{U_2} + \frac{1}{2} \left\{ \pi_1 \left( -\frac{U_{12}}{U_1} \right) + \pi_2 \left( -\frac{U_{21}}{U_2} \right) \right\} \geq 0, \quad (6)$$

上2式は、期待効用理論における「Arrow-Pratt」型のリスク回避の尺度と同じ形である.

#### 4.3.2 効用関数が状態分離可能な場合

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ここで、 $v_i$  は状態  $i$  の効用関数である.

したがって,

$$-\begin{vmatrix} \pi_1 \left( -\frac{v_1''}{v_1'} \right) & \cdots & 0 & \pi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_m \left( -\frac{v_m''}{v_m'} \right) & \pi_m \\ \pi_1 & \cdots & \pi_m & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad m = 2, \dots, n.$$

まとめると、十分条件は以下ようになる.

$$-\frac{v_i''}{v_i'} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

この式は、期待効用理論における「Arrow-Pratt」型のリスク回避の尺度と同じ形が全ての状態において成立していることを示している.

## 5 主体 A は主体 B より「リスク回避的」である

前節で、Nau (2003) が定義した「リスク回避的である」という概念を紹介した. 本節では、これを用いて主体間において「よりリスク回避的である」ということを定義し、その指標を簡略化する.

### 5.1 定義: 主体 A は主体 B より「リスク回避的」である

**定義 5.1.1** [主体 A は主体 B より「リスク回避的」である]

同じ富  $\mathbf{w}$  と同じリスク中立確率  $\pi_i(\mathbf{w})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を持つ主体 A と主体 B を仮定する。もし、任意の富  $\mathbf{w}$  とそのリスク中立確率  $\pi_i(\mathbf{w})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) のもとで、リスク資産  $\mathbf{z}$  が中立資産となる、つまり、

$$\mathbb{E}_{\pi(\mathbf{w})}[\mathbf{z}] = \sum_{i=1}^n \pi_i(\mathbf{w}) z_i = 0$$

を満たすリスク資産  $\mathbf{z}$  に対して、

$$b_A(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - b_B(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \geq 0 \quad (8)$$

を満たすならば、主体 A は主体 B より「リスク回避的」である。

## 5.2 特別な場合

前節と同様に、指標を簡略化する。なお本節でも引数を省略する。

### 5.2.1 2 状態の場合

$$-\left| \begin{array}{cc} \pi_1 \left( -\frac{U_{11}^A}{U_1^A} + \frac{U_{11}^B}{U_1^B} \right) & \frac{1}{2} \left\{ \pi_1 \left( -\frac{U_{12}^A}{U_1^A} + \frac{U_{12}^B}{U_1^B} \right) + \pi_2 \left( -\frac{U_{12}^A}{U_1^A} + \frac{U_{21}^B}{U_2^B} \right) \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \pi_2 \left( -\frac{U_{21}^A}{U_1^A} + \frac{U_{21}^B}{U_2^B} \right) + \pi_1 \left( -\frac{U_{12}^A}{U_1^A} + \frac{U_{12}^B}{U_1^B} \right) \right\} & \pi_2 \left( -\frac{U_{22}^A}{U_2^A} + \frac{U_{22}^B}{U_2^B} \right) \end{array} \right| \begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ 0 \end{array} \geq 0,$$

ここで、

$$\pi_1, \pi_2 > 0; \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

よって十分条件は、以下のように要約される。

$$-\frac{U_{11}^A}{U_1^A} \geq -\frac{U_{11}^B}{U_1^B}, \quad (9)$$

$$-\frac{U_{22}^A}{U_2^A} \geq -\frac{U_{22}^B}{U_2^B}, \quad (10)$$

$$-\frac{U_{11}^A}{U_1^A} + \frac{U_{11}^B}{U_1^B} + \frac{1}{2} \left\{ \pi_1 \left( -\frac{U_{12}^A}{U_1^A} + \frac{U_{12}^B}{U_1^B} \right) + \pi_2 \left( -\frac{U_{21}^A}{U_2^A} + \frac{U_{21}^B}{U_2^B} \right) \right\} \geq 0, \quad (11)$$

$$-\frac{U_{21}^A}{U_2^A} + \frac{U_{21}^B}{U_2^B} + \frac{1}{2} \left\{ \pi_1 \left( -\frac{U_{12}^A}{U_1^A} + \frac{U_{12}^B}{U_1^B} \right) + \pi_2 \left( -\frac{U_{21}^A}{U_2^A} + \frac{U_{21}^B}{U_2^B} \right) \right\} \geq 0, \quad (12)$$

### 5.2.2 効用関数が状態分離可能な場合

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ここで、 $v_i$  は状態  $i$  の効用関数である。

したがって,

$$- \begin{vmatrix} \pi_1 \left( -\frac{v_1^{A''}}{v_1^{A'}} + \frac{v_1^{B''}}{v_1^{B'}} \right) & \cdots & 0 & \pi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_m \left( -\frac{v_m^{A''}}{v_m^{A'}} + \frac{v_m^{B''}}{v_m^{B'}} \right) & \pi_m \\ \pi_1 & \cdots & \pi_m & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad m = 2, \dots, n.$$

まとめると, 十分条件は以下ようになる.

$$-\frac{v_i^{A''}}{v_i^{A'}} \geq -\frac{v_i^{B''}}{v_i^{B'}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

## 6 応用例

### 6.1 主体が「リスク回避的である」場合

#### 設定

リスク資産の収益率を表す確率変数のベクトル表現を  $(r_1, \dots, r_n)$ , 無リスク資産の利子率を  $\bar{r}$  とし, リスク資産への最適投資量を考える.

効用関数は状態分離可能な効用関数とする.

$$\max_a \sum_{i=1}^n v_i(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})a) \quad (\text{投資量 } a \text{ で効用最大化})$$

ここで  $u_i$  は状態  $i$  における効用を表している.

これ以降, 分析の簡略化のため,  $v_i'(x_i) > 0$ ,  $v_i''(x_i) < 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と仮定する.

最適性の一階条件は,

$$\sum_{i=1}^n v_i'(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})(r_i - \bar{r}) = 0 \quad (14)$$

となる.

#### 定理 6.1.1 (富 $w$ の変化)

もし, 主体がリスク回避的で, その状態ごとの絶対的リスク回避度  $A_i$  が減少する ( $-v_i''/v_i'$ ,  $i = 1, \dots, n$  が  $x$  に関して減少関数である) ならば, リスク資産に対する最適投資量は富に対して増加関数 ( $\partial_w \hat{a} > 0$ ) になる.

#### (証明)

最適性の一階条件を  $w$  で微分すると,

$$\partial_w \hat{a} = -\frac{\bar{r} \sum_{i=1}^n v_i'(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})(r_i - \bar{r})}{\sum_{i=1}^n v_i''(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})(r_i - \bar{r})^2} \quad (15)$$

分母は, 仮定より負である. 分子は,  $r_s - \bar{r} > 0$  と  $r_s - \bar{r} < 0$  とに場合分けする.

( $r_s - \bar{r} > 0$  の場合)

$A_i(w\bar{r}) \geq A_i[w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a}]$  より,

$$v_i''(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})(r_i - \bar{r}) \geq -A_i(w\bar{r})v_i'(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})(r_i - \bar{r}) \geq 0 \quad (16)$$

( $r_s - \bar{r} < 0$  の場合) も同様の方法で正となる.

以上の結果をまとめると,  $\partial_w \hat{a} > 0$  となる.  $\square$

**定理 6.1.2** (無リスク資産の利子率  $\bar{r}$  の変化)

もし, 主体がリスク回避的で, その状態ごとの絶対的リスク回避度 ( $A_i$ ) が増加するならば, リスク資産に対する最適投資量は無リスク資産の利子率に関して, 減少関数 ( $\partial_{\bar{r}} \hat{a} < 0$ ) となる.

(証明)

最適性の一階条件を  $\bar{r}$  で微分すると,

$$\partial_{\bar{r}} \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i'(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})}{\sum_{i=1}^n \{v_i''(w\bar{r} + \hat{a}(r_i - \bar{r}))(r_i - \bar{r})^2\}} + \frac{w - \hat{a}}{\bar{r}} \partial_w \hat{a}. \quad (17)$$

$\sum_{i=1}^n v_i'(w\bar{r} + (r_i - \bar{r})\hat{a})$  は正,  $\sum_{i=1}^n v_i''(w\bar{r} + \hat{a}(r_i - \bar{r}))(r_i - \bar{r})^2$  は負,  $\partial_w \hat{a}$  は, 前の定理より, 負となる. よって,  $\partial_{\bar{r}} \hat{a} < 0$  となる.  $\square$

## 6.2 主体 A は主体 B より「リスク回避的である」場合

主体 A, B の効用関数を

$$U^A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i^A(x_i),$$

$$U^B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i^B(x_i),$$

( $v_i^{A'} > 0, v_i^{B'} > 0, v_i^{A''} < 0, v_i^{B''} < 0, i = 1, \dots, n$ ) とおく.

**定理 6.2.1**

次の 3 つの言明は同値である.

- (1) 任意の  $\mathbf{w}$  に対して,  $b_A(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - b_B(\mathbf{w}, \mathbf{z}) > 0$  が成立する.
- (2) 任意の  $w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して

$$-\frac{v_i^{A''}(w_i)}{v_i^{A'}(w_i)} > -\frac{v_i^{B''}(w_i)}{v_i^{B'}(w_i)}.$$

- (3) 全ての状態  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して,  $v_i^A(w_i)$  は  $v_i^B(w_i)$  の強い意味での凹変換したものである.

(証明)

すでに, (1) と (2) が同値であることは示している (5.1 参照).

((2)  $\implies$  (3) の証明)

$v_i^B$  は強い意味での増加関数なので、逆関数  $v_i^{B^{-1}}$  が存在し、それを用いて  $f_i(t) = v_i^A(v_i^{B^{-1}}(t))$  と定義する。  
 $f_i(t)$  の 1 階 / 2 階微分は、

$$f_i'(t) = \frac{v_i^{A'}(v_i^{B^{-1}}(t))}{v_i^{B'}(v_i^{B^{-1}}(t))} > 0; \quad (18)$$

$$f_i''(t) = \frac{v_i^{A'}(y) - \frac{v_i^{B'}(y)v_i^{A'}(y)}{v_i^{B'}(t)}}{[v_i^{B'}(v_i^{B^{-1}}(t))]^2} \quad (19)$$

となる。ここで  $y_i = v_i^{B^{-1}}(t)$  とおく。

これらを書き換えると

$$f_i''(t) = (A_i^B(y_i) - A_i^A(y_i)) \frac{v_i^{A'}(y_i)}{[v_i^{B'}(y_i)]^2} < 0. \quad (20)$$

したがって  $f_i(t)$  は凹関数であり、 $v_i^A(w_i)$  は  $v_i^B(w_i)$  の強い意味での凹変換したものであると言える。

((3)  $\implies$  (2) の証明)

状態  $i$  に対して、 $v_i^A(x_i) = f_i(v_i^B(x_i))$ ,  $f_i' > 0$ ,  $f_i'' < 0$  と定義する。

$f$  の 1 階微分と 2 階微分の比をとり、 $-f''/f'$ ,  $v_i^{B'}(x_i)$  は正であることから、

$$-\frac{v_i^{A''}(x_i)}{v_i^{A'}(x_i)} > -\frac{v_i^{B''}(x_i)}{v_i^{B'}(x_i)} \quad (21)$$

となる。□

#### 定理 6.2.2 (最適投資量 $a$ の変化)

全ての状態  $i (= 1, \dots, n)$  に対して、 $v_i^A$  は、 $v_i^B$  の凹変換で、その変換は同じである ( $f_1 = \dots = f_n = f$ ) と仮定する。このとき、もし主体 A が主体 B より「リスク回避的」であるならば、A の最適投資量  $a^{A^*}$  は B の最適投資量  $a^{B^*}$  より「少なく」なる。

(証明)

主体 A・B の 1 階条件は

$$\phi(a^{A^*}) = \sum_{i=1}^n v_i^{A'}(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a^{A^*})(r_i - \bar{r}) = 0; \quad (22)$$

$$\phi(a^{B^*}) = \sum_{i=1}^n v_i^{B'}(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a^{B^*})(r_i - \bar{r}) = 0 \quad (23)$$

である。

状態  $i$  に対して、

$$v_i^{A'}(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a) = f'(a)v_i^{B'}(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a) \quad (24)$$

と書けるので、

$$\phi(a^{A^*}) = \sum_{i=1}^n f'(a^{A^*})v_i^{B'}(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a^{A^*})(r_i - \bar{r}) = 0. \quad (25)$$



ここで  $f(a) = f(v_i^B(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a))$  とおく。したがって、

$$\phi(a^{B*}) = \sum_{i=1}^n f'(a^{B*})v_i^{B'}(\bar{r}w + (r_i - \bar{r})a^{B*})(r_i - \bar{r}) < 0 \quad (26)$$

となる。

この式は、 $r_i - \bar{r}$  より、「 $r_i - \bar{r}$  が正のとき、 $f'$  は (相対的に) underweights となり、 $r_i - \bar{r}$  が負のとき、 $f'$  は (相対的に) overweights となる」と解釈できる。よって、上式は負となる。 $v_i(x_i)$  の凹性より、 $\phi(a)$  は減少関数となる。したがって、 $a^{A*} < a^{B*}$  と言える。(より詳しい議論は、Mas-colell et al.(1995) の 6 章の例 6.C.2 を参照。) □

(6 章の証明は定理 6.2.2 を除いて LeRoy and Werner (2001) を参考にしている)

## 参考文献

- [1] Darrell Duffie (2001): *Dynamic Asset Pricing Theory* Princeton University Press
- [2] Gerard Debreu (1952): "Definite and semidefinite quadratic forms," Cowles Foundation Paper 58.
- [3] C. R. Johnson (1970): "Positive Definite Matrices," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 77, 259–264.
- [4] Stephen F. LeRoy and Jan. Werner (2001): *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press.
- [5] Mas-colell et al. (1995): *Microeconomic Theory*, Oxford University Press
- [6] Robert. F. Nau (2003): "A Generalization of Pratt–Arrow Measure to Nonexpected–Utility Preferences and Inseparable Probability and Utility," *Management Science*, Vol. 49, No. 8, 1089–1104.
- [7] Menahem E. Yaari (1969): "Some Remarks on Measures of Risk Aversion and on Their Uses," *Journal of Economic Theory*, Vol. 1, 315–329.