

数値的逆変換による インストールメント・オプションの価格評価

(Valuing Continuous-Installment Options by Numerical Transform Inversion)

北海道大学・経済学研究科 木村 俊一 (Toshikazu Kimura)
Graduate School of Economics and Business Administration
Hokkaido University

北海道大学・経済学研究科 菊地 一哲 (Kazuaki Kikuchi)
Graduate School of Economics and Business Administration
Hokkaido University

1 はじめに

インストールメント・オプションとは、契約時に初期プレミアムを支払うだけでなく、オプションが有効である間、割賦金という形態でプレミアムを支払い続けるという特徴を持った経路依存型オプションである。インストールメント・オプションの保有者は、満期までの任意の時点でプレミアム支払いをやめることができ、その時点でオプション契約は解約される。解約時のペイオフはゼロである。満期時点のペイオフは、バニラ・オプションのものと同じであるが、満期までプレミアムを支払ったときに限って、そのペイオフを受け取ることができる点が異なる。インストールメント・オプションの魅力的な点は、少量の初期プレミアムを支払うだけで、バニラ・オプションと同様のポジションを作ることができるという点や満期に権利行使ができそうにないときに、早期解約を行って、無駄なプレミアムを支払わないで済むという点である。実際、インストールメント・オプションは、市場で活発に取引されている。代表的な例を挙げると、オーストラリア証券取引所に上場されているオーストラリア国内株式の上に書かれたインストールメント・ワラントが有名である。詳細は BenAmer et al. [4] を参照されたい。

インストールメント・オプションは、権利行使タイミング(ヨーロッパ型・アメリカ型)とプレミアム支払い方法(離散支払い・連続支払い)の組み合わせで4種類に分類することができる。本論文の考察対象は、ヨーロッパ型・連続支払いタイプのインストールメント・オプションである。離散支払いとは、あらかじめプレミアム支払日が決められていて、その期日に、オプション保有者が支払い続けるか、あるいは解約を行うかの意思決定を行えるような支払い方法である。そして、この支払日が瞬間的に来るような極限を考えると、連続支払いに行き着く。これは、保有者があるレートでプレミアムを連続的に支払い、意思決定を行えるような支払い方法である。離散支払いタイプについては、ヨーロッパ型は Davis et al. [7] が、アメリカ型を BenAmer et al. [4] が詳しく研究している。前者は二項モデル、後者はダイナミック・プログラミングを用いた数値解法を提案している。一方、連続支払いタイプに関しては、ヨーロッパ型は Alobaidi et al. [3] が、アメリカ型を Ciurlia and Roko [6] が研究している。

早期解約の意思決定は、将来ペイオフと解約までに期待されるプレミアム支払いのネットの現在価値が、はじめてゼロになったときに行われる。このため、ヨーロッパ型インストールメント・オプションの価格評価問題は、ある最適停止問題として定式化される。Alobaidi et al. [3] は、最適停止境界の満期時点の振る舞いを証明するために、まず、この価格評価問題を偏微分方程式アプローチを用いて、自由境界問題として定式化した。次に、満期までの残存期間に関するラプラス変換を用いて、変換領域における最適停止境界が満たす積分方程式を導出した。最後に、この積分方程式を逆変換することで得られる、実数領域の積分方程式の漸近解析を経て目的を達成した。しかし、このラプラス変換は、その証明のために積分区間を特殊なものに変更されていた。このため、最適

停止境界についてはその一部しか求めることができず、また、オプション価格については全域で逆変換が不可能であった。本論文の目的は、数値的逆変換により、オプション価格、及び最適停止境界を算出可能なインストゥルメント・オプションの価格評価法を提案し、Alobaidi et al. [3] の欠点を克服することにある。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、まず、本論文を通して用いる仮定や定義について述べ、ヨーロッパ型・連続支払いタイプのインストゥルメント・コール・オプション価格の評価問題を偏微分方程式によって定式化する。次に、満期までの残存期間に関するラプラス・カールソン変換(LCT)を取って得られる常微分方程式から、コール価格と最適停止境界のLCTを導出する。第3節では、第2節で導出したコール価格と最適停止境界のLCTを数値的逆変換して、最適停止境界・コール価格の性質やコール価格に関する逆変換の精度について検証する。第4節で、本論文の結論と今後の研究課題について述べる。

2 インストゥルメント・オプションの価格評価

2.1 偏微分方程式アプローチによる定式化

本論文を通して、市場は完備で無裁定であると仮定する。 $(W_t)_{t \geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 上の標準ウィーナー過程とすると、原資産価格過程 $(S_t)_{t \geq 0}$ はリスク中立化された幾何ブラウン運動

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta)dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

に従うと仮定する。ここで、 $r > 0$ は安全利子率、 $\delta \geq 0$ は原資産の配当率、そして、 $\sigma > 0$ は原資産のボラティリティで、それぞれ定数とする。

プットのケースも同様にすればよいので、本論文ではコールのケースを扱う。時刻 t におけるヨーロッパ型・連続支払いタイプのインストゥルメント・コール・オプション価格を $c(t, S_t; q)$ と定義する。ここで、パラメータ $q > 0$ は定数で、オプション保有者が微小時間 dt の間に qdt を支払うような連続支払いレートである。満期時点 $T > 0$ のペイオフ関数は

$$(S_T - K)^+$$

で与えられる。ここで、 $(x)^+ = \max\{0, x\}$ である。

無裁定価格理論から、コール価格 $c(t, S_t; q)$ は $t \in [0, T]$ に対して、最適停止問題

$$c(t, S_t; q) = \operatorname{ess\,sup}_{s \in [t, T]} \mathbb{E} \left[e^{-r(s-t)} (S_s - K)^+ \mathbf{1}_{\{s=T\}} - \frac{q}{r} (1 - e^{-r(s-t)}) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (2.2)$$

の解として与えられる。ここで、 s はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に関する停止時刻であり、条件付き期待値はリスク中立確率測度 \mathbb{P} の下で計算されている。期待値の中の第1項目は、満期までプレミアムを支払い続けたときにはじめて受け取れるペイオフの現在価値であり、第2項目は解約を行う停止時刻までに支払い続けるプレミアムの現在価値を表している。

偏微分方程式アプローチを用いて、最適停止問題 (2.2) は以下のように定式化できる。簡略化のため、 $c \equiv c(t, S_t; q)$, $S \equiv S_t$ とする。インストゥルメント・コール価格 $c(t, S_t; q)$ は非同次ブラック・ショールズ・マートン偏微分方程式

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{\partial c}{\partial t} - rc = q, \quad S > \underline{S}_t \quad (2.3)$$

を満たし、その終端条件は

$$c(T, S; q) = (S - K)^+,$$

であり、境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{S \downarrow \underline{S}_t} c(t, S; q) = 0, \\ \lim_{S \downarrow \underline{S}_t} \frac{\partial c}{\partial S} = 0, \\ \lim_{S \uparrow \infty} \frac{\partial c}{\partial S} < \infty \end{array} \right.$$

で与えられる。ここで、 $(\underline{S}_t)_{t \in [0, T]}$ をインストールメント・コールの最適停止境界と定義する。すなわち、原資産価格 S_t が最適停止境界 \underline{S}_t にはじめて達したときに、オプション保有者はプレミアム支払いをやめて、解約を行う。1つ目の境界条件はバリュー・マッチング条件であり、最適停止境界 \underline{S}_t 上で、解約が行われて、オプションが存在しなくなることを表す。2つ目の境界条件はスムーズ・ペイस्टィング条件である。この条件は、インストールメント・コールのデルタが境界上で連続的に変化することを意味している。

アメリカ型バニラ・オプションが、対応するヨーロッパ型バニラ・オプションと早期行使プレミアムに分解できることが知られているが、ヨーロッパ型インストールメント・オプションについても、類似した分解公式が成立する。この分解公式は、ヨーロッパ型インストールメント・コールが、対応するヨーロッパ型バニラ・コールから、契約時点より解約が起こるまでのプレミアム支払いの現在価値を差し引いたものに等しいことを表している。

定理 1 ヨーロッパ型・連続支払いタイプのインストールメント・コール・オプション価格 $c(t, S_t; q)$ は

$$c(t, S_t; q) = c(t, S_t; 0) - q \int_t^T e^{-r(u-t)} \Phi(d(t, u)) du \quad (2.4)$$

と分解される。ここで、 $c(t, S_t; 0)$ は対応するヨーロッパ型バニラ・コール・オプション価格であり、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度関数である。さらに、

$$d(t, u) = \frac{\log(S_t / \underline{S}_{u-t}) + (r - \delta - \sigma^2/2)(u-t)}{\sigma \sqrt{u-t}}$$

である。

2.2 ラプラス・カールソン変換

変数変換 $\tau = T - t$ を行い、時間の向きを逆にしたコール価格と最適停止境界をそれぞれ、

$$\tilde{c}(\tau, S; q) = c(T - \tau, S; q) \quad (\tau \geq 0), \quad \tilde{S}_\tau = \underline{S}_{T-\tau}$$

と定義する。このとき、偏微分方程式 (2.3) は

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial \tilde{c}}{\partial S} - \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tau} - r \tilde{c} = q, \quad S > \tilde{S}_\tau \quad (2.5)$$

と書き換えられる。ただし、その初期条件は

$$\tilde{c}(0, S; q) = (S - K)^+,$$

であり、境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{S \downarrow \tilde{S}_\tau} \tilde{c}(\tau, S; q) = 0, \\ \lim_{S \downarrow \tilde{S}_\tau} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial S} = 0, \\ \lim_{S \uparrow \infty} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial S} < \infty \end{array} \right.$$

で与えられる.

コール価格 $\bar{c}(\tau, S; q)$ と最適停止境界 \bar{S}_τ の LCT を, $\text{Re}(\lambda) > 0$ に対して, それぞれ

$$\begin{aligned} c^*(\lambda, S; q) &= \mathcal{L}\mathcal{C}[\bar{c}(\tau, S; q)] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau} \bar{c}(\tau, S; q) d\tau, \quad \text{Re}(\lambda) > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}^*(\lambda) &= \mathcal{L}\mathcal{C}[\bar{S}_\tau] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau} \bar{S}_\tau d\tau, \quad \text{Re}(\lambda) > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

と定義する. ここで, ラプラス変換 (LT) ではなく, LCT を採用する大きな理由は, 変換を通して定数が不変であるため, オプション価格の LCT が比較的やさしい形で求まるという点である. また, 本研究とも密接に関係している, LCT を用いるオプション価格評価法である確率化法が知られている. 詳細は Carr [5] や Kimura [8] を参照されたい.

偏微分方程式 (2.5) の LCT を取ることで, 常微分方程式

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c^*}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial c^*}{\partial S} - (\lambda + r) c^* = q - \lambda (S - K)^+, \quad S > \underline{S}^* \quad (2.8)$$

を得る. ただし, 境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{S \downarrow \underline{S}^*} c^*(\lambda, S; q) = 0, \\ \lim_{S \downarrow \underline{S}^*} \frac{\partial c^*}{\partial S} = 0, \\ \lim_{S \uparrow \infty} \frac{\partial c^*}{\partial S} < \infty \end{array} \right.$$

で与えられる.

常微分方程式 (2.8) は定数係数 2 階線形微分方程式であり, これを解いて, ヨーロッパ型インストゥルメント・コール・オプション価格の LCT を得る.

定理 2

$$c^*(\lambda, S; q) = \begin{cases} a_2 \left(\frac{S}{K}\right)^{\theta_2} + \frac{\lambda S}{\lambda + \delta} - \frac{\lambda K + q}{\lambda + r}, & S > K \\ \sum_{i=1}^2 a_{i+2} \left(\frac{S}{K}\right)^{\theta_i} - \frac{q}{\lambda + r}, & \underline{S}^* < S \leq K \\ 0, & S \leq \underline{S}^*. \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで, パラメータ $\theta_1 > 0$ と $\theta_2 < 0$ は二次方程式

$$\frac{\sigma^2}{2} \theta^2 + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) \theta - (\lambda + r) = 0$$

の実根であり, a_i ($i = 2, 3, 4$) は

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{K}{\theta_1 - \theta_2} \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[\left(1 - \frac{r - \delta}{\lambda + r} \theta_1\right) - \frac{\theta_1}{\theta_2} \left(1 - \frac{r - \delta}{\lambda + r} \theta_2\right) \left(\frac{\underline{S}^*}{K}\right)^{\theta_1 - \theta_2} \right], \\ a_3 = \frac{K}{\theta_1 - \theta_2} \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left(1 - \frac{r - \delta}{\lambda + r} \theta_2\right), \\ a_4 = -\frac{K}{\theta_1 - \theta_2} \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \frac{\theta_1}{\theta_2} \left(1 - \frac{r - \delta}{\lambda + r} \theta_2\right) \left(\frac{\underline{S}^*}{K}\right)^{\theta_1 - \theta_2} \end{array} \right.$$

である。さらに、最適停止境界の LCT は

$$\underline{S}^*(\lambda) = \left[\frac{2(\lambda + \delta)q}{\lambda(1 - \theta_2)K\sigma^2} \right]^{\theta_1^{-1}} K \quad (2.10)$$

で与えられる。

系 1 ヨーロッパ型インストールメント・コール・オプション価格 $c(t, S_t; q)$ のデルタ, ガンマ, セータの LCT をそれぞれ,

$$\Delta_c^* = \mathcal{L}C \left[\frac{\partial \tilde{c}}{\partial S} \right], \quad \Gamma_c^* = \mathcal{L}C \left[\frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial S^2} \right], \quad \Theta_c^* = \mathcal{L}C \left[\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tau} \right]$$

と定義する。このとき, $S > \underline{S}^*$ に対して,

$$\Delta_c^* = \begin{cases} a_2 \theta_2 \frac{1}{S} \left(\frac{S}{K} \right)^{\theta_2} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta}, & S > K \\ \frac{1}{S} \sum_{i=1}^2 a_{i+2} \theta_i \left(\frac{S}{K} \right)^{\theta_i}, & \underline{S}^* < S \leq K, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\Gamma_c^* = \begin{cases} a_2 \theta_2 (\theta_2 - 1) \frac{1}{S^2} \left(\frac{S}{K} \right)^{\theta_2}, & S > K \\ \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^2 a_{i+2} \theta_i (\theta_i - 1) \left(\frac{S}{K} \right)^{\theta_i}, & \underline{S}^* < S \leq K, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\Theta_c^* = \begin{cases} \lambda \left\{ a_2 \left(\frac{S}{K} \right)^{\theta_2} - \frac{\delta S}{\lambda + \delta} + \frac{rK - q}{\lambda + r} \right\}, & S > K \\ \lambda \left\{ \sum_{i=1}^2 a_{i+2} \left(\frac{S}{K} \right)^{\theta_i} - \frac{q}{\lambda + r} \right\}, & \underline{S}^* < S \leq K. \end{cases} \quad (2.13)$$

ラプラス変換に関するアーベル型定理を用いて, 残存期間 τ に関する最適停止境界の漸近的な性質を示すことができる。

定理 3 時間の向きを逆にした最適停止境界 $(\tilde{S}_\tau)_{\tau \geq 0}$ に対して,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{S}_\tau = \lim_{t \rightarrow T} S_t = K, \quad (2.14)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{S}_\tau = \begin{cases} \infty, & \delta > 0 \\ \frac{2q}{2r + \sigma^2}, & \delta = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

3 数値実験

本節では, 第 2 節で導出したインストールメント・コール価格, 及び最適停止境界の LCT を数値的逆変換によって計算する。プログラムは Mathematica (Version 4.1) で実装し, Pentium (650 MHz) のパーソナル・コンピュータ上で実行した。

3.1 数値的逆変換法の選択

数値的逆変換を必要とする学問分野 (例えば, オペレーションズ・リサーチにおける待ち行列理論) からの要請で, 数値的逆変換法は古くから研究され, 非常に多く存在している. 数値的逆変換法に関するサーベイには, 例えば, 木村 [1] や Abate and Whitt [2] がある. ラプラス逆変換の特定の方法は, 逆変換作用素の非有界性のために, すべてのケースで有効に機能することが保証されないことが知られている. したがって, 逆変換法の長所・短所を把握した上で, 逆変換を行う関数の形に適した方法を選ぶことが肝要である. 本数値実験では, Gaver-Stehfest 法 (以下, GS 法) とフーリエ級数を応用した逆変換法の 1 つである Euler 法を採用する. GS 法の長所は, 実数領域の値だけを用いて, 高速に計算することができる点であり, 短所は, 逆変換値がときに不安定になる点である. 一方, Euler 法の長所は, 実数領域・複素数領域の値の両方を使って, 高精度で安定的な逆変換を行うことができる点であり, 短所は, 計算時間がかかることである.

定理 2 (2.9) より, $S > K$ ではないときに, コール価格の LCT を逆変換する際には, S と $S^*(\lambda)$ の複素数領域における大小関係を判定して, その関数形を選択しなければならない. したがって, コール価格の逆変換法には, $\text{Re}(\lambda) > 0$ である複素数 λ に実数を代入して, この大小関係の判定が可能な GS 法を選択した. 最適停止境界の LCT は閉じた形で与えられるので, その逆変換法には GS 法と Euler 法の両方を使うことが可能である. ここでは, Euler 法を採用した.

3.2 計算結果

図 1 は, (a) 連続支払いレート q に関して, (b) 配当率 δ に関して値を変えながら, ヨーロッパ型インストゥルメント・コールの最適停止境界を描いたものである. 既によく知られているアメリカ型バニラ・オプションの最適停止境界とは異なり, (1) 時間 t に関する単調性がないこと, (2) 安全利子率 r と配当率 δ の大小関係に関わらず, 満期時の境界値は行使価格 K と一致すること (定理 3 (2.14)), が特徴的である. さらに, (a) において, q の値を高くしていったときに最適停止境界は大きく上に向かって振り返っていく様子が見て取れる. このことは, 残りのプレミアム支払いが大きくなることで, 早期解約確率が高くなることに対応している.

図 2 は, (a) 配当率 $\delta = 0$ のとき, (b) $\delta = 0.04$ のときのヨーロッパ型インストゥルメント・コール価格とヨーロッパ型バニラ・コール価格を, 原資産価格 S に関してプロットしたものである. ここで, 点線は両方のコールの本源的価値を表している. バニラ・コールとインストゥルメント・コールの価格差は, 定理 1 (2.4) で示した, 解約までに期待されるプレミアム支払いの現在価値を表している. また, もしヨーロッパ型インストゥルメント・コールが早期行使できるならば, 行使した方が有利になる状況が常に存在していることも分かる. これは, 以下の理由による. $\delta = 0$ のとき, アメリカ型バニラ・コールとヨーロッパ型バニラ・コールの価格は一致することが知られている. このことは, (a) のバニラ・コールの価格が本源的価値と交差しないことに対応する. 一方, ヨーロッパ型インストゥルメント・コールの場合は, δ がゼロか正かに問わず, 本源的価値と交差している. このことは, 早期行使の可能性が常に存在することを示唆する.

表 1 は, 1000 ステップの二項モデルと GS 法を用いて計算したインストゥルメント・コール価格を比較したものである. パラメータは, $t = 0, T = 1, S = 100, r = 0.05, \delta = 0.04, \sigma = 0.2$ である. GS 法では, 収束を速めるためにリチャードソンの外挿法 (3 点) を併用した. すべてのケースにおける二項モデルの平均計算時間は 243.5 秒であった. 対照的に, GS 法によるそれは 0.1 秒未満であり, 二項モデルよりも 2400 倍以上も高速に計算可能であることが分かった. 二項モデル近似値に対する相対誤差から, GS 法はイン・ザ・マネーとアット・ザ・マネーのときに精度が高いことが確認できる. 一方, イン・ザ・マネー, アット・ザ・マネー, そしてアウト・オブ・ザ・マネーの順に相対誤差が大きくなる傾向が見られる. この原因は, 最適停止境界付近で, 逆変換値が不安定になり, スムース・ペイस्टィング条件がうまく反映されなくなる現象にあると考えられる. この現象は, q が大きくなるときにより顕著に現れる. 他の条件を一定とするならば, 行使価格 K が大きくなるとき, それにつれて最適停止境界が大きくなることが確認できた. したがって, 価格評

価時点の原資産価格 $S = 100$ に対して K が大きくなるとき, 評価しようとしているコール価格は, 最適停止境界周辺の不安定性の影響を大きく受けるようになる. このことから, 二項モデル近似値と逆変換値の乖離が, 大きくなるのである.

4 おわりに

本論文では, はじめに, ヨーロッパ型・連続支払いタイプのインストールメント・コール・オプション価格の評価問題を偏微分方程式で定式化し, (i) インストールメント・コールの分解公式を示した. 次に, 偏微分方程式の LCT を取ることで得られる常微分方程式を解いて, (ii) コール価格と最適停止境界の LCT を閉じた形で導出した. 最後に, ラプラス変換に関するアーベル型定理を用いて, (iii) 残存期間に関する最適停止境界の漸近的な性質を示した. 数値実験では, コール価格, 及び最適停止境界をそれぞれ, GS 法と Euler 法によって算出した. そこでは, ヨーロッパ型インストールメント・コールの最適停止境界がアメリカ型バニラ・オプションのそれとはかなり異なった性質を持っていることや, コール価格がイン・ザ・マネーとアット・ザ・マネーのときに高速・高精度で計算できることを示した. また, アウト・オブ・ザ・マネーのときに, GS 法による逆変換で起こる最適停止境界付近の不安定性が原因で精度が落ちることが判明した.

今後の研究の方向性については, まず, アウト・オブ・ザ・マネーのときの相対誤差を小さくするために, GS 法以外の逆変換アルゴリズムの開発が必要である. 次に, アメリカ型・連続支払いタイプのインストールメント・オプション, 離散支払いタイプのインストールメント・オプション, そしてアメリカ型エキゾチック・オプション (例えば, バリア・オプションや交換オプションなど) の価格評価に, 本論文と同様の手法を用いることが考えられる.

参考文献

- [1] 木村 俊一, “数値的 Laplace 逆変換について,” 経済学研究 (北海道大学), 第 37 巻 (1987), 282–293.
- [2] Abate, J. and W. Whitt, “The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions,” *Queueing Systems*, 10 (1992), 5–88.
- [3] Alobaidi, G., R. Mallier and S. Deakin, “Laplace transforms and installment options,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14 (2004), 1167–1189.
- [4] Ben-Ameur, H., M. Breton and P. François, “Pricing installment options with an application to ASX installment warrants,” Working Paper G-2002-59, GERAD, 2002.
- [5] Carr, P., “Randomization and the American put,” *Review of Financial Studies*, 11 (1998), 597–626.
- [6] Ciurlia, P. and I. Roko, “Valuation of American continuous-installment options,” *Computational Economics*, 25 (2005), 143–165.
- [7] Davis, M., W. Schachermayer and R. Tompkins, “Pricing, no-arbitrage bounds and robust hedging of installment options” *Quantitative Finance*, 1 (2001), 597–610.
- [8] Kimura, T., “Alternative randomization for valuing American options,” The 2004 Daiwa International Workshop on Financial Engineering, Kyoto, Japan, 2004.

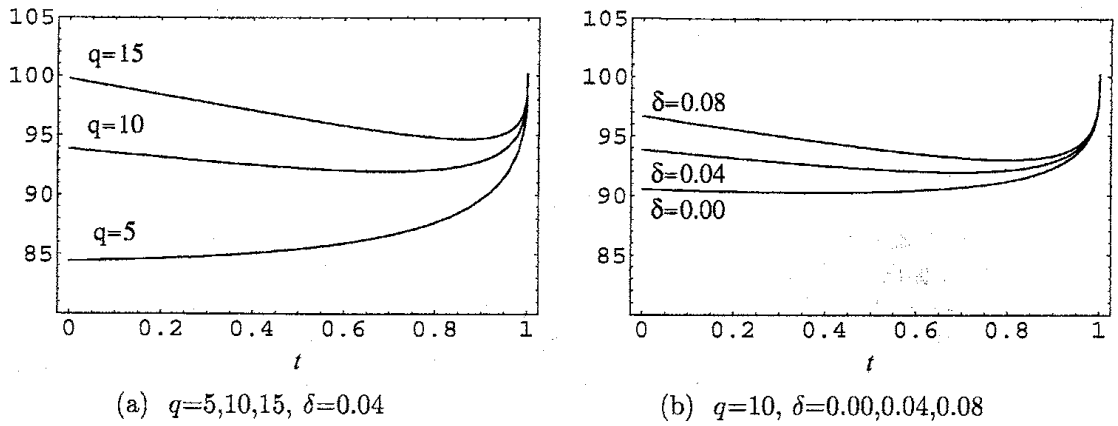


図 1: インストールメント・コールの最適停止境界
($T = 1, K = 100, r = 0.05, \sigma = 0.2$)

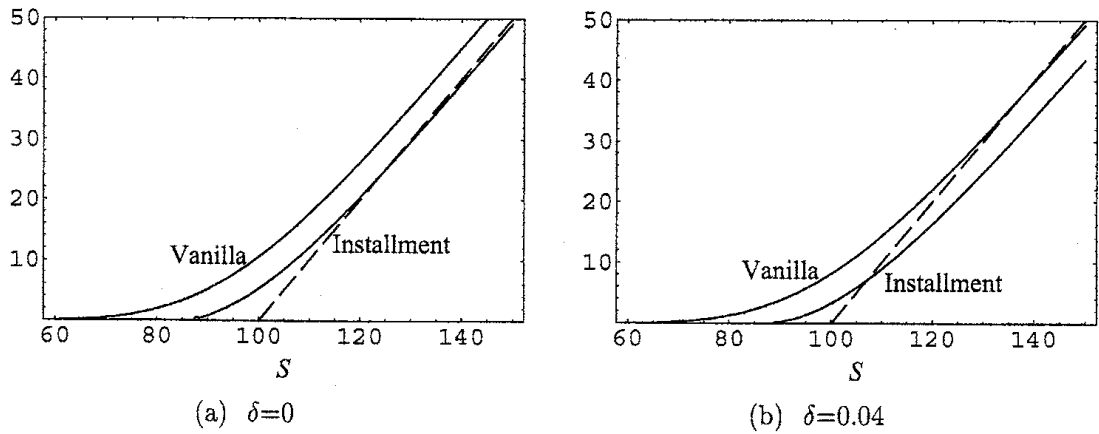


図 2: インストールメント・コールとバニラ・コールの価格
($t = 0, T = 1, K = 100, q = 6, r = 0.05, \sigma = 0.2$)

表 1: $c(t, S; q)$ の二項モデル近似値に対する数値比較

q	K	二項モデル	GS 法	相対誤差
1	95	9.6988	9.6808	0.19%
	100	7.1998	7.1670	0.46%
	105	5.1822	5.1285	1.04%
5	95	6.2340	6.1963	0.60%
	100	3.9706	3.9120	1.48%
	105	2.2619	2.1784	3.69%
9	95	3.2213	3.2210	0.01%
	100	1.4457	1.4516	0.41%
	105	0.3817	0.3999	4.77%