

# 金利期間構造モデルとカルマンフィルター

～Frank de Jong and Pedro Santa-Clara 論文に対するコメント～

電気通信大学大学院 電気通信学研究科 システム工学専攻  
山下晃一郎 (Koichiro Yamashita), 宮崎浩一 (Koichi Miyazaki)

University of Electro-Communications, Department of Systems Engineerings

## 1. はじめに

金利期間構造モデルの体系は、大きくスポットレートモデルとフォワードレートモデルに二分される。スポットレートモデルの源流は、[17]に遡り、以降[6]をはじめとして様々なモデル化(マルチファクター化を含む)がなされてきた。フォワードレートモデルの発祥は、比較的新しく[12], [11] ([11]は以降, HJM と呼ぶ)に見られる。実務での本格的な利用を可能にした[2]が導入されて以降は、金利デリバティブの評価においては、主に、フォワードレートモデルが採用されるようになった。スポットレートモデルもフォワードレートモデルも共に金利のダイナミックスを表現するモデルであるから、何らかの形で両者のモデルに結びつきがあると考えるのは自然な発想である。このような関係を明らかにした論文に、[3], [14], [13]そして本論文の副題にある[7]が挙げられる。通常 HJM モデルにおいてフォワードレート過程にマルコフ性を仮定しても、そこから出発して得られるスポットレート過程は一般にマルコフ性を満たさない。どのような制約ないしは工夫を施せば、HJM モデルにおいてスポットレート過程にマルコフ性を持たせることができるかが、これらの論文の主な関心事であり、それを見事に解決している。

本論文が指摘するのは、[7] (以降, JS モデル, JS 等と略す)が、上記で指摘した課題を解決したうえで更にカルマンフィルターを用いてパラメータ推定の道筋を提示しておきながら、それを実行するにあたって、不用意な単純化を行ったために、推定が妥当なものとはいえない可能性である。

本論文での指摘はパラメータ推定に関するものなので、金利期間構造モデルのパラメータ推定法を手短に振り返ることとする。スポットレートモデルのパラメータ推定は過去の金利データに基づいて行うケースが多く、フォワードレートモデルのパラメータ推定は、通常、市場で観測される金利デリバティブの価格から直接キャリブレーションされる。スポットレートモデルでは、瞬間的なスポットレートのパラメータを推定することになるが、瞬間的なスポットレートの代替としてコールレートを取り上げて、コールレートの時系列データを利用してパラメータを一般化モーメント法に基づいて推定する手法 ([4], [15]等)が提案された。この手法では、多くの年限に関する利回りデータを利用することが難しいほか、別途リスクの市場価格を推定する必要が生じる。

そこで、パラメータ推定を多くの年限に関する利回りデータを利用して行なう方法を見つける方向に研究が発展し、最尤法に基づく推定法 ([5], [16]等) を経由してカルマンフィルターに基づく推定法へと到達した。カルマンフィルターに基づいて金利期間構造モデルの推定を行った初期の研究として、[1], [8], そして本論文の副題にある[7]が挙げられる。以降、マルチファクター金利期間構造モデルの多くが、カルマンフィルターに基づく推定法を採用している。しかしながら、著者らの知りうる範囲では、カルマンフィルターに基づくパラメータ推定が行なわれているのは、その全てがスポットレートモデルを対象としたもので、HJM モデルのパラメータ推定をカルマンフィルターに基づいて行なうような試みは JS 意外に見当たらない。そこで、本研究では、HJM モデルのパラメータ推定をカルマンフィルターに基づいて行なうことの妥当性を、日本国債利回りデータに基づき検証することを目的とする。検証に際しては、HJM モデルのパラメータ推定を、JS のような単純化する場合と本研究のように単純化しない場合との2通りに関して行なううえで、妥当性を判断する。

本論文の構成は、以下の通りである。次節では、JS モデルとそのパラメータ推定法に関して振り返る。節3では、JS のパラメータ推定法へのコメントと本研究推定法に関して述べる。節4では、実証分析結果とその考察を報告する。最終節では、まとめと結語を付す。

## 2. JS モデルと JS におけるパラメータ推定法

### 2.1 JS モデル

HJM モデルは、初期時点における利回り曲線と瞬間フォワードレートのダイナミクスによって金利期間構造を表現するモデルであり、瞬間フォワードレートのダイナミクスに関する積分表現と微分表現は、それぞれ、

$$(2.1) \quad f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \alpha(v,s) dv + \int_0^t \sigma(v,s)' dW(v),$$

$$(2.2) \quad df(t,s) = \alpha(t,s) dt + \sigma(t,s)' dW(v)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha(t,s)$  と  $\sigma(t,s)$  は、それぞれ、満期  $s$  の割引債の瞬間フォワードレートの時刻  $t$  におけるドリフトとボラティリティを、 $W(v)$  は  $N$  次元の標準ブラウン運動を表す。

この瞬間フォワードレート過程から導出されるスポットレート過程は、

$$(2.3) \quad dr(t) = \left[ \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial \sigma(v,t)'}{\partial t} \left[ \int_v^t \sigma(v,w) dw \right] dv + \int_0^t \sigma(v,t)' \sigma(v,t) dv \right. \\ \left. + \int_0^t \phi(v)' \frac{\partial \sigma(v,t)}{\partial t} dv + \phi(t)' \sigma(t,t) + \int_0^t \frac{\partial \sigma(v,t)'}{\partial t} dW(v) \right] dt + \sigma(t,t)' dW(t)$$

となる。ここで、 $f(t,s)$  は時刻  $t$  における時刻  $s$  の瞬間フォワードレート、 $\sigma(t,s)$  は  $f(t,s)$  のボラティリティ、 $\phi(t)$  はリスクの市場価格ベクトル、 $W(t)$  は  $N$  次元の標準ブラウン運動とする。ここで、式(2.3)のドリフト部分に注目すれば、瞬間フォワードレート過程から導出されるスポットレート過程がマルコフ性を満たさないことは明らかである。

JS モデルでは、式(2.2)におけるフォワードレート過程  $f(t,s)$  のボラティリティ  $\sigma(t,s)$  に、

$$(2.4) \quad \frac{\partial \sigma(t,s)}{\partial s} = -a\sigma(t,s)$$

なる制約を課し、更に、式(2.3)に含まれるボラティリティの履歴部分を状態変数  $\phi(t)$  によって、

$$(2.5) \quad \phi(t) = \int_0^t \sigma(v,t)' \sigma(v,t) dv$$

と表現することにより、スポットレート過程  $r(t)$  がマルコフ性を満たすことを示した。

実際、式(2.4)、式(2.5)を式(2.3)に代入すると、

$$(2.6) \quad dr(t) = \left[ \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} - a[r(t) - f(0,t)] + \phi(t)' \sigma(t,t) + \phi(t) \right] dt + \sigma(t,t)' dW(t)$$

が得られ、スポットレート過程はマルコフ性を有する。

## 2.2 JSにおけるパラメータ推定法

JSモデルのパラメータをカルマンフィルターに基づいて推定するため、JSでは、以下のような状態方程式と観測方程式を与えている。

状態方程式：

$$(2.7) \quad d \begin{pmatrix} r(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + af(0,t) + \lambda \sigma_0^2 \right) & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[a - \lambda \sigma_1^2] & 1 \\ \sigma_1^2 & -2a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 r(t)} dW(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは、式(2.6)におけるリスクの市場価格  $\phi(t)$  とボラティリティ  $\sigma(t,t)$  を、

$$(2.8) \quad \phi(t) = \lambda \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 r(t)},$$

$$(2.9) \quad \sigma(t,t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 r(t)}$$

の様に特定化したうえで、 $dr(t)$  と、式(2.5)に示したボラティリティの履歴部分を表現する状態変数  $\phi(t)$  の微分形

$$(2.10) \quad d\phi(t) = \left[ \sigma(t,t)' \sigma(t,t) - 2a\phi(t) \right] dt$$

を行列表記したものに他ならない。

観測方程式：

$$(2.11) \quad y_i(\tau) = \frac{\int_t^{t+\tau} f(0,v) dv}{\tau} + \frac{[r(t) - f(0,t)] \left[ \frac{1-e^{-a\tau}}{a} \right]}{\tau} + \frac{\phi(t) \left[ \frac{1-e^{-a\tau}}{a} \right]^2}{\tau} + \varepsilon_i$$

ここで、 $y_i(\tau)$  は時刻  $t$  における残存期間  $\tau$  の割引債利回り、 $\varepsilon_i$  は時刻  $t$  における観測誤差を表す。式(2.11)の右辺で誤差項を除いた部分は、JSモデルの式(2.7)に基づく残存期間  $\tau$  の割引債に対応する時刻  $t$  でのモデル利回りである。

具体的なカルマンフィルターの利用法は、[10]、[9]を参照されたい。

## 3. JSのパラメータ推定法へのコメントと本研究の推定手法

### 3.1 JSのパラメータ推定法へのコメント

節2において振り返ったことは、JSの大きな成果なのであるが、「1.はじめに」において述べたように、最終的にカルマンフィルターを適用する際に、不用意な単純化を行っており、推定が

正しく行われていない可能性である。JS が行った単純化は、初期の瞬間フォワードレート  $f(0, t)$  の代わりに時間に依存しないパラメータ  $\theta$  で置き換えたことである。実際に、式(2.7), 式(2.11)において、 $f(0, t)$  をパラメータ  $\theta$  に置き換えると、それぞれ、

$$(3.1) \quad d \begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} a\theta + \lambda\sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -[a - \lambda\sigma_1^2] & 1 \\ \sigma_1^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 r(t)} dW(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(3.2) \quad y_i(\tau) = \theta + \frac{[r(t) - \theta] \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}}{\tau} + \frac{\varphi(t) \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}}{\tau} + \varepsilon_i$$

となる。

ここで、上記の制約がモデル利回りに表れる変更点を観測方程式(2.11), (3.2)の観測誤差を除いた右辺に基づき確認しておく。

- 右辺第一項が、 $\frac{\int_0^{\tau} f(0, v) dv}{\tau}$  から  $\theta$  になる。
- 右辺第二項が、 $\frac{[r(t) - f(0, t)] \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}}{\tau}$  から  $\frac{[r(t) - \theta] \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}}{\tau}$  になる。

第一点目は、時刻  $t$  における利回りの水準が残存期間  $\tau$  に依存する形から、満期に依存しない一定値  $\theta$  に変更されることを示している。第二点目は、時刻  $t$  における瞬間スポットレートが回帰する平均が  $f(0, t)$  から  $\theta$  へと変更されることを示している。更に、重要なことは、HJM モデルで金利デリバティブを評価する際には、初期の瞬間フォワードレート  $f(0, t)$  の値と瞬間フォワードレート過程を用いるのであるが、前者は評価時点における利回り曲線に他ならないから、外生的に与えられるものであり推定するものではない。しかしながら、JS では、 $\theta$  を推定対象パラメータに含めたうえで推定を行っている。このような形で得られたフォワードレート過程のパラメータ  $a$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  やリスクの市場価格に含まれているパラメータ  $\lambda$  の妥当性には、疑問が生じる。

### 3.2 本研究の推定手法

本研究では、節 3.1 で指摘した単純化を行わずに、状態方程式(2.7), 観測方程式(2.11)を用いたカルマンフィルターに基づくパラメータ推定を行う。具体的には、

- 時刻  $t$  の利回りを構成するモデル利回りの第一項は、初期時点の瞬間フォワードレート

$$f(0, t) \text{ から導かれる } \frac{\int_0^{\tau} f(0, v) dv}{\tau} \text{ を用いる。}$$

- 観測データとなる割引債利回りは、HJM モデルの表現により近い形で推定ができるように、観測対象となる割引債自体を固定し、時刻  $t$  の経過に伴い、残存期間  $\tau$  が減少する形で推定を行った。(これに対し、先行研究では、観測対象となる割引債の残存期間  $\tau$  を固定しているため、各時点  $t$  において観測対象となる割引債自体は異なる。)

## 4. 実証分析

### 4.1 データ

パラメータ推定に利用する利回りデータは、1989年1月から2004年12月までの日次の日本国債(2年債, 5年債, 7年債, 10年債)のスポットイールドとする。国債市場の様々な局面において推定パラメータがどのように異なるかを分析する目的から、パラメータ推定を行う際には、データサンプル期間を1年毎に分割して、各年に対応する合計16通りのパラメータを推定する。

### 4.2. 実証分析結果とその考察

《尤度値 : Fig.1 参照》

- JSの推定手法よりも本研究の推定手法の方が、尤度値のばらつきが大きい。
- JSの推定手法よりも本研究の推定手法の方が、尤度値が高くなる局面が多い。

これは、本研究の推定手法は、初期の金利期間構造の形状が反映される推定手法となっているため、将来のスポットレート $r(t)$ の期待として与えられる初期のフォワードレート $f(0,t)$ の期間構造が、どの程度正確に将来のスポットレート $r(t)$ を予測したものとなっているかに依存して推定の精度が異なるため、尤度値のばらつきが大きくなったと考えられる。また、本研究の推定手法では、推定に用いるパラメータが一つ少ないにもかかわらず、JSの推定手法より尤度値が上回る年が多くなることから、日本国債市場において初期のフォワードレート $f(0,t)$ の期間構造は概ね将来のスポットレート $r(t)$ の期待として相応しいものと考えられる。

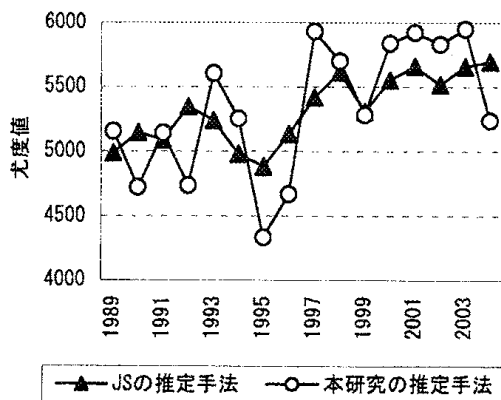


Fig.1 : ML

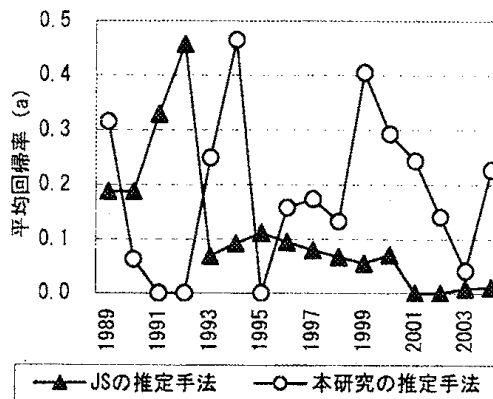


Fig.2 : Mean-reversion parameter  $a$

《平均回帰率 (パラメータ  $a$ ) : Fig.2 参照》

- JSの推定手法よりも本研究の推定手法の方が、現実に即した平均回帰率が得られた。

現実の利回りから平均回帰率が小さいことが読み取れる1991年や1992年においては (Fig.3, Fig.4 参照), JSによる平均回帰率がそれぞれ, 0.329, 0.457であるのに対し, 本研究手法による平均回帰率は, 共に0であった。これに対して, 現実の利回りから平均回帰率が大きいことが読み取れる1994年や1999年 (Fig.5, Fig.6 参照) では, JSによる平均回帰率がそれぞれ, 0.091, 0.055と小さいのに対し, 本研究手法による平均回帰率はそれぞれ, 0.465, 0.405と大きいものとなった。

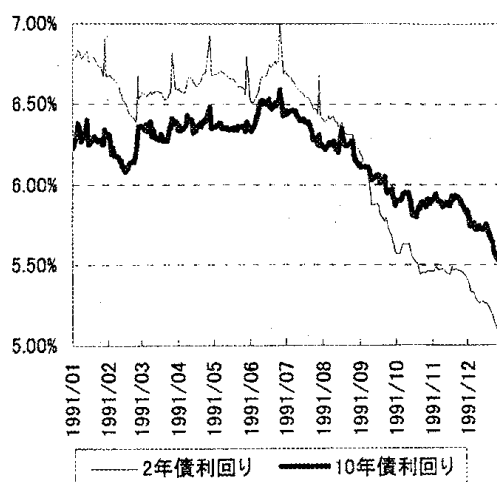


Fig.3 : Yield history(1991)

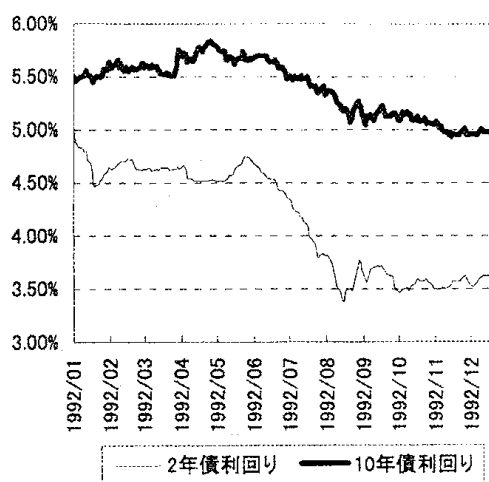


Fig.4 : Yield history(1992)

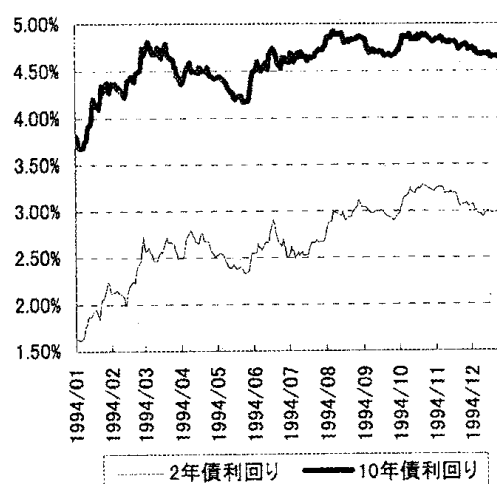


Fig.5 : Yield history(1994)

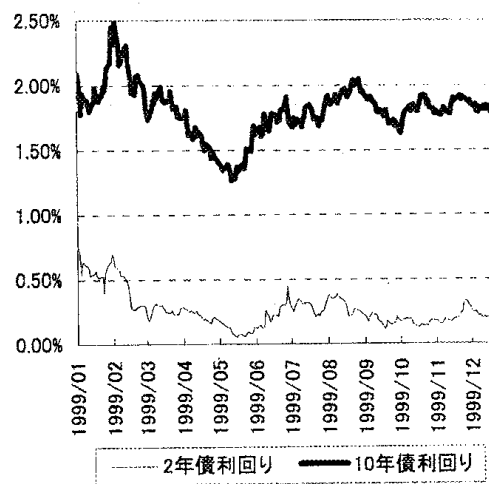
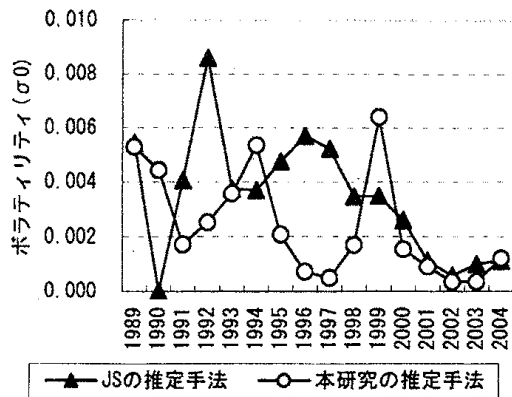
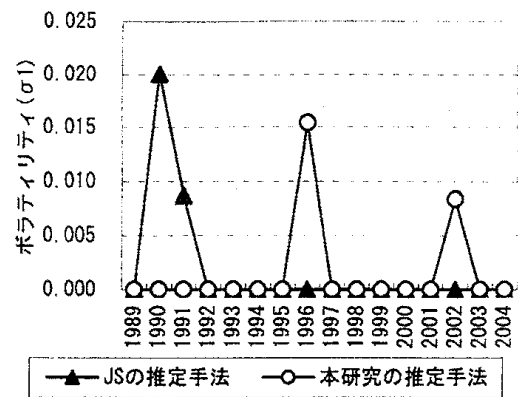


Fig.6 : Yield history(1999)

《ボラティリティ (パラメータ  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ): Fig.7, Fig.8 参照》

- JSの推定手法, 本研究の推定手法の双方において, Vasicek型のボラティリティを支持した.
- JSの推定手法, 本研究の推定手法の双方において, 推定されたパラメータに大きな違いは見られなかった.

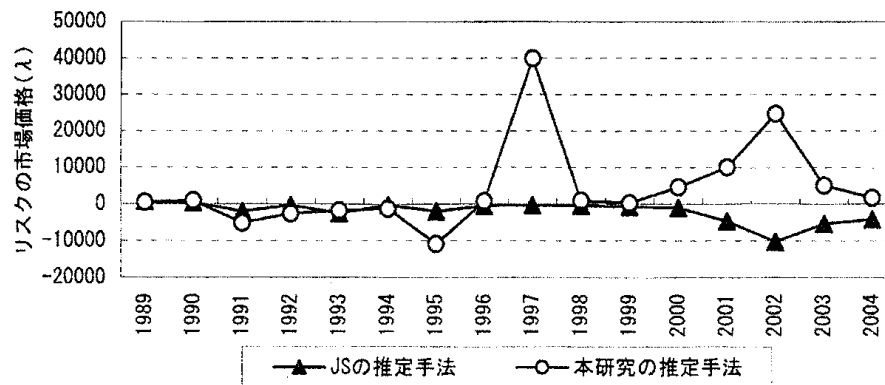
Fig.7 と Fig.8 を見ると, 多くの年において, スポットレート  $r(t)$  の大きさに依存する部分  $\sigma_1$  は概ね0となり, スポットレートのボラティリティは主に  $\sigma_0$  によって構成される. これは, ボラティリティ構造にアフィン型の自由度を持たせても, 現実には, Vasicek型のボラティリティで十分であることを意味している. また, 両推定手法で大きな差異は見られなかったのは, 推定手法の相違が, ボラティリティ部分に関するものではなかったためであると考えられる.

Fig. 7 : Volatility parameters  $\sigma_0$ Fig. 8 : Volatility parameters  $\sigma_1$ 

《リスクの市場価格 (パラメータ  $\lambda$ ) : Fig. 9 参照》

- JS の推定手法ではリスクの市場価格の符号は負であるが、本研究の推定手法では正の値となり、JS の推定手法の方が適切なパラメータ与えている。

HJM モデルから構成した債券価格のボラティリティはマイナスの値をとるため、リスクの市場価格の符号  $\lambda$  は負となるべきものである。Fig.9 によれば、1995 年以前は、JS の推定手法も本研究の推定手法によってもパラメータ  $\lambda$  は概ね 0 に近い値が推定されている。1996 年以降では、本研究の推定手法では HJM モデル上不適切と考えられるプラスの推定値が得られているが、JS の推定手法ではマイナスの推定値が得られる。これは JS における恣意的な単純化の影響で、符号が偶然に適切なものとなったと考えられる。

Fig.9 : Parameter  $\lambda$  in market price of risk

《スポットレート  $r$  の推移 : Fig. 10, Fig. 11 参照》

- JS の推定手法よりも本研究の推定手法の方が、現実に即した状態変数  $r(t)$  が得られた。

JS の推定手法では、1996 年以降のスポットレート  $r(t)$  は概ねマイナスで推移していたのに対し、本研究の推定手法では概ねプラスで推移していた。勿論、ここでのスポットレート  $r(t)$  を利回りを構成するための一つの状態変数として捉えるなら、見過ごされてもよいが、通常は、コールレートなどが意識されるものであり、マイナスの値をとるのはエコノミックに相応しいものとはいえない。

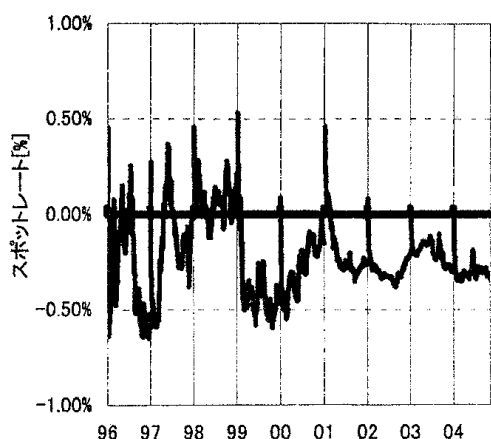


Fig10 : State variable (spot rate)  
JS Estimation

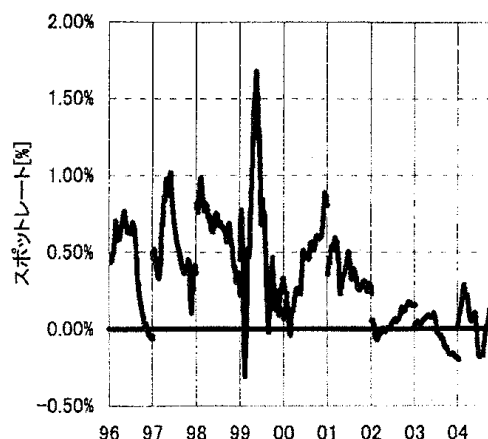


Fig11 : State variable (spot rate)  
Our Estimation

## 5. まとめと結語

本論文では、JS が、カルマンフィルターを用いて HJM モデルのパラメータ推定を行うための道筋を提示しておきながら、実行するに当たって不用意な単純化を行ったために、推定結果が妥当なものとは言えない可能性を指摘した。また、日本国債利回りを対象にして、不用意な単純化を行う JS の推定法と忠実に HJM モデルの枠組みで推定を行う本研究推定法とで推定されるパラメータ値がどの様に異なるのかを検証した。実証分析結果によれば、JS では、スポットレート水準や平均回帰係数のパラメータが妥当なものとはならず、本研究推定手法を用いた場合でもリスクの市場価格の符号が適切なものとはならず、カルマンフィルターを用いて HJM モデルのパラメータ推定を行うことの妥当性には疑問符が付くことがわかった。

## 参考文献

- [1] Babbs, S. H. and K. B. Nowman, "Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models.", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.34, No.1, (March, 1999), 115-130.
- [2] Brace, A., and M. Musiela, "A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow, Morton.", *Mathematical Finance*, Vol.2, (1994), 259-283.
- [3] Carverhill, A., "When is the Short Rate Markovian?", *Mathematical Finance*, Vol.4, (1994), 305-312.
- [4] Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders, "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate.", *Journal of Finance*, Vol.47, (1992), 1209-1227.
- [5] Chen, R.-R. and L. Scott., "ML Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure.", *Journal of Fixed Income*, Vol.3, (1993), 14-31.
- [6] Cox, J.C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross., "A Theory of the Term Structure of Interest Rates.", *Econometrica*, Vol.53, (1985), 385-407.
- [7] de Jong, Frank and Pedro Santa-Clara, "The Dynamics of the Forward Interest Rate Curve :A



- Formulation with State Variables.”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.34, No.1, (March, 1999), 131-157.
- [8] Geyer, A. L. J., and S. Pichler, “A state-space approach to estimate and test multifactor Cox-Ingersoll-Ross models of the term structure.”, *Journal of Financial Research*, Vol.22, (1999), 107-130.
- [9] Hamilton, James D., “Time Series Analysis.”, Princeton University Press, Princeton, (1994).
- [10] Harvey, Andrew C., “Forecasting, structural time series models and the Kalman filter.”, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- [11] Heath, D., R. A. Jarrow and A. Morton, “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation.”, *Econometrica*, Vol.60, (1992), 77-105.
- [12] Ho, T. S. Y., and S. Lee, “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims.”, *Journal of Finance*, Vol.41, (1986), 1011-1029.
- [13] Inui, K. and M. Kijima, “A Markovian Framework in Multi-Factor Heath-Jarrow-Morton Models.”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.33, No.3, (September, 1998), 423-440.
- [14] Jeffrey, A., “Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics.”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.30, (1995), 619-642.
- [15] Miyazaki, K. and H. Tsubaki, “Comparison of JGB and Bank Debenture Credit Spread Models.”, *The Journal of Fixed Income*, Vol.9, (June, 1999), 63-70.
- [16] Pearson, N. D., and T. S. Sun, “Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model.”, *Journal of Finance*, Vol.49, (1994), 1279-1304.
- [17] Vasicek, O, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure.”, *Journal of Financial Economics*, Vol.50, (1982), 1-25.