数理解析研究所講究録
1478巻 2006年 81-86

Kantorovich 不等式の周辺
- 可換 vs 非可換 -

藤井 正俊 (大阪教育大学)
Masatoshi Fujii, Osaka Kyoiku University
Asahigaoka, Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan

本共同研究の題目は、「可換 Banach 環と種々の分野との交流」ということでありますので、Kantorovich 不等式の近隣の不等式における可換と非可換の相違を見ていきたいと思います。なお、この小論は、泉野佐一、中本律男両氏との共同研究を基にしています。

1. 算術-調和平均の不等式. まず、Hilbert space 上の positive (invertible) operators A, B に対して、算術平均と調和平均は、正数のときと同様、

$$A\nabla B=\frac{1}{2}(A+B),\ A\,!\,B=2((A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

によって定義します。このとき、原風景として現れるのが算術-調和平均の不等式です：

(1) $$A\nabla B\geq A\,!\,B.$$

この不等式の可換化は、次のようにして成されます：

$$A\nabla B=A^{\frac{1}{2}}(1\nabla A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$
$$A\,!\,B=A^{\frac{1}{2}}(1\,!\,A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

より

$$D_{A,B}=A\nabla B-A\,!\,B=A^{\frac{1}{2}}(\nabla C-1\,!\,C)A^{\frac{1}{2}}.$$

ただし、$C=A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$. つまり、

$$D_{A,B}\geq 0\iff D_{1,C}\geq 0$$

ということになりますので、可換の世界の話になってしまうことになります。
一方、次のような綺麗な等式が知られています (Anderson-Morley-Trapp [1]):

(2) $$D_{A,B}=\frac{1}{2}(A-B)(A+B)^{-1}(A-B).$$

この基本等式は、次のように簡単に確かめられます。

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

より、

$$B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$$

従って、

$$\begin{aligned}2\ D_{A,B}&=A+B-4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\\&=(A+B)(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A+B)-2B(A+B)^{-1}A-2A(A+B)^{-1}B\\&=(A-B)(A+B)^{-1}A+(B-A)(A+B)^{-1}B\\&=(A-B)(A+B)^{-1}(A+B).\end{aligned}$$

2. 逆不等式. 本節では、算術-調和平均の不等式の逆不等式を考えたいと思います。まず、前節のような考察からすると、次のようなことが成立するかのように思えます：

Conjecture 1. *If* $0 < m \leq A, B \leq M$, *then*

$$D_{A,B} \leq \frac{(M-m)^2}{2(M+m)}. \tag{3}$$

この予想に対して、基本等式を利用して反例を組み立てることができます。

Example 2.

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \quad \text{and} \quad B_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon.$$

ここで、$\epsilon > 0$ は十分小さく取っておく。

反例になっていることは、次のようにして検証できます。

$$\begin{aligned} \text{予想 1 が成立} &\Longleftrightarrow (A-B)(A+B)^{-1}(A+B) \leq \frac{(M-m)^2}{M+m} \\ &\Longleftrightarrow (A+B)^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2(A+B)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{(M-m)^2}{M+m} \\ &\Longleftrightarrow (A-B)^2 \leq \frac{(M-m)^2}{M+m}(A+B) \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{A-B}{M-m}\right)^2 \leq \frac{A+B}{M+m}. \end{aligned}$$

簡単の為、$\epsilon = 0$, i.e., $m = 0$ とすると、

$$(A-B)^2 \leq 2(A+B)$$

が成立しなければならなくなります。しかし、これが無理なことはすぐにわかります。($m > 0$ にしたい場合は、小さい $\epsilon > 0$ を加えてやれば十分です。)

ところで、既成事実として、次のことが知られています, cf. [2, Theorem 6].

Theorem 3. *If* $0 < m \leq A, B \leq M$, *then*

$$D_{A,B} = A \nabla B - A \,!\, B \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2. \tag{4}$$

より一般的には、[4, Theorem 1.32] で、次のことが知られています。

Theorem 3'. *If* $0 < m \leq A, B \leq M$, *then*

$$\Phi(A) - \Phi(A^{-1})^{-1} \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2 \tag{5}$$

なお、Theorem 3 は Theorem 3' において、

$$\Phi(A \oplus B) = A \nabla B$$

と置くことにより得られます, cf. [3]。Theorem 3 と Conjecture 1 に出てくる 2 つの定数の間の乖離については、次のことがわかります。

$$(\sqrt{M} - \sqrt{m})^2 - \frac{(M-m)^2}{2(M+m)} = \frac{(\sqrt{M} - \sqrt{m})^4}{2(M+m)} \geq 0.$$

つまり、予想 1 の方の定数が既知のものより better であるということになります。

3. 定数 $(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2$ の最良性. 本節では、定数 $(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2$ が実現することを示します。

Example 4. A, B を次のように取ります：

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 11\end{pmatrix}.$$

すると、A, B もスペクトルは共に $\{1,4\}$ なので、$m=1, M=4$ とすることができます。さらに、

$$A\nabla B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 7\end{pmatrix},\quad A\,!\,B=\frac{2}{9}\begin{pmatrix}8 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 7\end{pmatrix}$$

という面白い現象が起こります。この結果、

$$D_{A,B}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 7\end{pmatrix}$$

となること、また $D_{A,B}$ のスペクトルは、$\frac{2}{3}, 1$ もわかりますので、$1=(\sqrt{4}-\sqrt{1})^2$ が最良値であることが示せました。

以下では、この例の構成について説明します。まず、A の置き方はについては、問題は無いと思います。そこで、B ということになります。普通に考えて、$B=UAU^*$ (U は unitary) でしょう。さらに、$U=U_\theta$; θ-回転の unitary, i.e.,

$$U=U_\theta=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix};\ c=\cos\theta,\ s=\sin\theta$$

とします。ここで、基本等式を活用する為、A と $B=B_\theta$ の和と差を計算します。

$$A+B=\begin{pmatrix}4+4c^2+s^2 & 3cs\\ 3cs & 1+4s^2+c^2\end{pmatrix};\ A-B=3\begin{pmatrix}s^2 & -cs\\ -cs & -s^2\end{pmatrix}=3s\begin{pmatrix}s & -c\\ -c & -s\end{pmatrix}.$$

ここで、次の（attain することも含めた）同値性に注意します：

$$\begin{aligned}D_{A,B}\le 1 &\Longleftrightarrow (A-B)(A+B)^{-1}(A-B)\le 2\\ &\Longleftrightarrow (A+B)^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2(A+B)^{-\frac{1}{2}}\le 2\\ &\Longleftrightarrow (A-B)^2\le 2(A+B)\end{aligned}$$

また、都合のよいことに、$(A-B)^2=9s^2$ なので、結局、

$$D_{A,B}\le 1\Longleftrightarrow A+B\ge\frac{9}{2}s^2$$

ということで、

$$A+B-\frac{9}{2}s^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+15c^2 & 6cs\\ 6cs & 1+3c^2\end{pmatrix}$$

が 0 を固有値として持つように, 言い換えれば、行列式の値が 0 となるように $c=\cos\theta$ を定めることができれば良い事に行き着きます。

$$0=(1+15c^2)(1+3c^2)-36c^2s^2=(9c^2-1)^2;$$

$$U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 1\end{pmatrix};\quad B=UBU^*=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 11\end{pmatrix}.$$

とすることにより、望みのものを得ることとなりました。

4. Conjecture 1. 前節で、差の逆不等式の定数の最良値が $(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2$ であることがわかりましたが、それでは予想1の意味するものは; これこそ、正に可換性です。

Theorem 5. A, B が可換であれば、予想1が成立する。

Proof. 基本不等式より、$a,\ b>0$ に対して、

$$a\nabla b - a\,!\,b = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

に注意して、与えられた $\alpha > 0$ に対して、次のような関数

$$f_\alpha(t) = \frac{(t-\alpha)^2}{t+\alpha} \text{ for } t \geq 0.$$

を考えます。これに対して、

$$f_\alpha(s) - f_\alpha(t) = \frac{(s-t)((s+\alpha)(t+\alpha)-4\alpha^2)}{(s+\alpha)(t+\alpha)}$$

であるので、$f_\alpha(t)$ は次のような単調性を持ちます：

(a) $0 < s < t \leq \alpha \Longrightarrow f_\alpha(s) \geq f_\alpha(t)$,

(b) $\alpha \leq s < t \Longrightarrow f_\alpha(s) \leq f_\alpha(t)$.

この結果、$0 < m \leq a,\ b \leq M$ ならば、

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \leq \frac{(M-m)^2}{M+m}.$$

これは、上の (a),(b) を順に使うだけです：

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} = f_b(a) \leq f_b(m) = f_m(b) \leq f_m(M) = \frac{(M-m)^2}{M+m}.$$

なお、任意の対称平均 σ (cf. [5]) は、算術平均と調和平均に挟まれる, すなわち、

$$A\,!\,B \leq A\,\sigma\,B \leq A\nabla B.$$

という事実に目を向けると、次のような Theorem 5 の一般化に至ります。

Theorem 6. A, B が可換で $0 < m \leq A,\ B \leq M$ であれば、任意の対称な（作用素）平均 σ に対して、

$$A\nabla B - A\,\sigma\,B \leq m\nabla M - m\,\sigma\,M$$

が成立する。

この証明ですが、A, B が可換なので、それらを正数と考えてよいことになります。f を σ の表現関数として、$[m,M]^2$ 上の2変数関数

$$\phi = \phi(x,y) = x\nabla y - x\,\sigma\,y = \frac{x+y}{2} - xf(\frac{y}{x})$$

の最大値が $m\nabla M - m\,\sigma\,M$ となることを確かめればよいことになります。そこで、ヘッセ行列式を計算すると、

$$H_\phi = \det\begin{pmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{x,y} & \phi_{yy} \end{pmatrix} = -\frac{1}{x^3}f''(\frac{y}{x})\det\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -x,y & x^2 \end{pmatrix}.$$

ここで、f が凹、すなわち、$f''(t) \leq 0$ に注意すると、$H_\phi \geq 0$ となるので、ϕ の最大値は、$[m,M]^2$ 上の端点で与えられることとなり、最大値 $\phi(m,M)$ を取ることになります。

5. 非可換 Kantorovich 不等式. 最後に、Kantorovich 不等式に戻ります。Kadison の Schwarz 不等式は次のような逆不等式も持っています：

$$\Phi(A) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}\Phi(A^{-1})^{-1} \text{ for } 0 < m \le A \le M,$$

cf. [4, Theorem 1.32]. これより、 $0 < m \le A, B \le M$ のもとで、

$$A\nabla_\mu B \le \frac{(m+M)^2}{4mM} A \,!_\mu\, B \tag{6}$$

成り立ちますが、これはとりもなおさず [2] において非可換 Kantorovich 不等式 と名付けられた不等式です。ここで、次の事実に注目します：

(1) The Kantorovich constant $\frac{(m+M)^2}{4mM}$ は $(m\nabla M) : (m\,!\,M)$ と理解できます。すなわち、

$$\frac{(m+M)^2}{4mM} = \frac{m\nabla M}{m\,!\,M}.$$

(2) The Kantorovich constant は、$\max\{\frac{m\nabla_\mu M}{m\,!_\mu\, M}; \mu \in [0,1]\}$.

(1),(2) をまとめると、

$$\frac{(m+M)^2}{4mM} = \frac{m\nabla M}{m\,!\,M} \ge \frac{m\nabla_\mu M}{m\,!_\mu\, M} \quad (\mu \in [0,1]).$$

となります。これらを踏まえて、つぎのような改良を提示します：

Theorem 7. A, B が $0 < m \le A, B \le M$ のとき、各 $\mu \in [0,1]$ に対して、

$$A\nabla_\mu B \le \frac{m\nabla_\mu M}{m\,!_\mu\, M} A \,!_\mu\, B. \tag{7}$$

成立する。

Proof. $C = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$, $K_\mu = \frac{m\nabla_\mu M}{m!_\mu M}$, そして $h = \frac{M}{m}$ と置くとき、証明すべきことは transformer 不等式より、

$$1\nabla_\mu C \le K_\mu\; 1!_\mu C,$$

あるいは、

$$1\nabla_\mu t \le K_\mu\; 1\,!_\mu\, t \quad \text{for } t \in [h^{-1}, h].$$

となりますが、$K_\mu = \frac{1\nabla_\mu h}{1\,!_\mu\, h}$ なので、次のことを確かめれば十分です：

$$K_\mu = \max\left\{\frac{1\nabla_\mu t}{1\,!_\mu\, t}; t \in [h^{-1}, h]\right\}.$$

なお、これは

$$t + t^{-1} \le h + h^{-1} \quad \text{for } t \in [h^{-1}, h]$$

に帰着します。

References

[1] W.N.Anderson, T.D.Morley and G.E.Trapp, *Characterization of parallel subtraction*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 76(1979), 3599-3601.

[2] J.I.Fujii, M.Nakamura, J.E.Pečarić and Y.Seo, *Bounds for the ratio and difference between parallel sum and series via Mond-J.E.Pečarić method*, preprint.

[3] M.Fujii and M.Nakamura, *Kadison's Schwarz inequality and noncommutative Kantorovich inequality*, Sci. Math. Japon., to appear.

[4] T.Furuta, J.Mićić, J.E.Pečarić and Y.Seo , *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 1, Element, Zagreb, 2005.

[5] F.Kubo and T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., 246(1980), 205-224.