数理解析研究所講究録
1478 巻 2006 年 105-110

上半平面上のある種の Privalov 空間について

岩手医科大学教養部　飯田　安保 (Yasuo Iida)
Department of Mathematics, School of Liberal Arts and Sciences,
Iwate Medical University

1. 単位円板上での Nevanlinna-type space について

定義 1-1　f を $U=\{z\in \mathbf{C}\,|\,|z|<1\}$ 上の正則関数とする。また、$T=\{z\in \mathbf{C}\,|\,|z|=1\}$ とする。

1. $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta<\infty$ を満たすとき、$f\in N$ とする。
   ここで $\log^+ x:=max(\log x\,,\,0)$ である。
   (注意) $f\in N$ のとき $f^*(e^{i\theta}):=\displaystyle\lim_{r\to 1^-}f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta}\in T$ で存在する。
2. ある $\phi\in L^1(T)\,,\,\phi\geqq 0$ に対し $\log^+|f(z)|\leqq Q[\phi](z)\ \ (z\in U)$ を満たすとき、$f\in N_*$ とする。ただし右辺は U 上の Poisson 積分を表す。
3. $p>1$ とする。$\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta<\infty$ を満たすとき、$f\in N^p$ とする。
4. $0<q<\infty$ とする。$\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta<\infty$ を満たすとき、$f\in H^q$ とする。

N を Nevanlinna class、N_* を Smirnov class、N^p を Privalov space、H^q を Hardy space とよぶ。これらの空間のあいだには、包含関係　$H^q\subset N^p\subset N_*\subset N\ \ (p>1\,,\,0<q<\infty)$　が成り立つ。
また N とその部分空間を総称して **Nevanlinna-type space** と呼ぶ。

定理 1-2　f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：
(1)　$f\in N.$

(2) $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\log(1+|f(re^{i\theta})|)d\theta<\infty$ が成り立つ.

(3) $\log^+|f(z)|$ が U 上 harmonic majorant を持つ.

定理 1-3 f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1) $f\in N_*$.

(2) $f\in N$ かつ $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta=\int_0^{2\pi}\log^+|f^*(e^{i\theta})|d\theta$ が成り立つ.

(3) ある strongly convex な関数 φ に対して、

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\varphi(\log^+|f(re^{i\theta})|)d\theta<\infty \quad \text{が成り立つ.}$$

（注意）**R** 上の凸関数 φ が、$\varphi\geqq 0$ かつ非減少で、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty$ であるとき、**strongly convex** と呼ぶ。
strongly convex な関数の例として、たとえば

・$\varphi(t)=e^{pt}\ \ (p>0)$　　　・$p>1$ に対し $\varphi(t)=\begin{cases} t^p & (t\geqq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$

などがある。

定理 1-4 $p>1$ とする。また、f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である。

(1) $f\in N^p$.

(2) $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\Big(\log(1+|f(re^{i\theta})|)\Big)^p d\theta<+\infty$ が成り立つ.

(3) $\Big(\log^+|f(z)|\Big)^p$ が U 上 harmonic majorant を持つ.

定理 1-2 〜定理 1-4 の結果のように、単位円板 U 上の Nevanlinna-type space については定義と同値な条件がいくつか知られており、それぞれの条件を各空間の定義として採用することもある。

しかし、このような U では互いに同値である条件を上半平面 $D=\{z\in \mathbf{C}\mid \mathrm{Im}z>0\}$ 上に“そのまま”適用しても、それらが同値にならない場合がある。

2. 上半平面上の Nevanlinna-type space について

上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ における Nevanlinna-type space には、以下の①〜3の流儀がある。

① harmonic majorant による定義

定義 2-1　f を D 上の正則関数とする。

1. $\log^+|f(z)|$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in N_0(D)$ とする。
2. ϕ を strongly convex な関数とする。$\phi(\log^+|f(z)|)$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in H_\phi(D)$ とする。
   また $N_0^*(D) := \bigcup\{H_\phi(D) \mid \phi : \mathit{strongly\ convex}\}$ とする。

（注意）$H_\phi(D)$ は Hardy-Orlicz space とよばれる。

3. $p > 1$ とする。$(\log^+|f(z)|)^p$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in N_0^p(D)$ とする。

② Krylov(& Iida) による定義

定義 2-2　f を D 上の正則関数とする。

1. $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log^+|f(x+iy)|\,dx < \infty$ を満たすとき、$f \in \mathfrak{N}$ とする。
2. ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log^+|f(z)| \leqq P[\phi](z)$ $(z \in D)$ を満たすとき $f \in \mathfrak{N}_*$ とする。ただし右辺は D 上の Poisson 積分を表す。
3. $p > 1$ とする。$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \left(\log^+|f(x+iy)|\right)^p dx < \infty$ を満たすとき、$f \in \mathfrak{N}^p$ とする。

③ Mochizuki(& Iida) による定義

定義 2-3　f を D 上の正則関数とする。

1. $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log(1+|f(x+iy)|)\,dx < \infty$ を満たすとき、$f \in N(D)$ とする。
2. ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log(1+|f(z)|) \leqq P[\phi](z)$ $(z \in D)$ を満たすとき、$f \in N_*(D)$ とする。ただし右辺は D 上の Poisson 積分を表す。
3. $p > 1$ とする。$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \left(\log(1+|f(x+iy)|)\right)^p dx < \infty$ を満たすと

き、 $f \in N^p(D)$ とする。

ここで注意が必要なのは単位円板の場合とは違って、上半平面上の Nevanlinna class の定義に相当する定義 2-1 の 1、定義 2-2 の 1、定義 2-3 の 1 は互いに同値ではないことである。

同様に、上半平面上の Smirnov class の定義に相当する定義 2-1 の 2、定義 2-2 の 2、定義 2-3 の 2 も互いに同値ではなく、上半平面上の Privalov space の定義に相当する定義 2-1 の 3、定義 2-2 の 3、定義 2-3 の 3 も互いに同値ではない。

このように、上半平面の場合はいろいろと異なる Nevanlinna-type space が知られている。ここでは、①の「harmonic majorant による定義」での Privalov space に関する結果を報告する。

3. ①の定義による上半平面上の Nevanlinna-type space に関する結果

まず最初に、上半平面上の Hardy space の定義を与える。この場合は２通りの空間が考えられる。

定義 3-1 $p > 0$ とする。また f を D 上の正則関数とする。

1. $|f(z)|^p$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in H^p(D)$ とする。
2. $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+iy)|^p \, dx < \infty$ を満たすとき、 $f \in \mathfrak{H}^p$ とする。

次の２つの定理は、Rosenblum と Rovnyak の著書の中で紹介されているものである。

定理 3-2([5]) f を D 上の正則関数とする。また、D 上の有界正則関数全体を $H^\infty(D)$ で表す。

(1) $f \in N_0(D) \Longleftrightarrow f = \dfrac{g}{h} \quad (g\,,\, h \in H^\infty(D)\,,\, h \neq 0)$.

(2) $f \in N_0^*(D) \Longleftrightarrow f = \dfrac{g}{h} \quad (g\,,\, h \in H^\infty(D)\,,\, h$ は D での外関数) .

ここで $h(t) \geq 0\,,\, \log h \in L^1\left(\mathbf{R}\,,\, (1+t^2)^{-1}dt\right)$ に対し、

$d(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \dfrac{1+tz}{t-z}\dfrac{1}{1+t^2}\log h(t)\, dt\right)$ の形の関数を上半平面 D での外関数とよぶ。

定理 3-3([5]) f を D 上の正則関数とする。

(1) $f \in N_0(D) \Longleftrightarrow \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ |f(x+iy)|}{x^2+(y+1)^2} dx < \infty.$

(2) $f \in N_0^*(D) \Longleftrightarrow$ ある strongly convex な関数 ϕ に対して

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{\phi(\log^+ |f(x+iy)|)}{x^2+(y+1)^2} dx < \infty.$$

4. $N_0^p(D)$ に関する結果

定理 3-2、定理 3-3 を $N_0^p(D)$ について考えたのが次の定理である。

定理 4-1([2]) $p > 1$ とする。また f を D 上の正則関数とする。

(1) $f \in N_0^p(D) \Longleftrightarrow f = \dfrac{g}{h}$ $(g, h \in H^\infty(D)$, h は $N_0^p(D)$ で可逆$)$.

(2) $f \in N_0^p(D) \Longleftrightarrow \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{(\log^+ |f(x+iy)|)^p}{x^2+(y+1)^2} dx < \infty.$

また、Nevanlinna 型空間に属する関数については因数分解定理が知られているが、$N_0^p(D)$ では次のようになる：

定理 4-2([2]) $p > 1$ とする。$f \in N_0^p(D)$, $f \neq 0$ は

$$f(z) = ae^{i\alpha z} b(z) d(z) g(z) \quad (z \in D) \cdots\cdots (*)$$

の形に一意に分解される。ここで、

(i) $a \in T$, $\alpha \geqq 0$.

(ii) $b(z)$ は f の零点から構成される Blaschke 積.

(iii) $d(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} \frac{1}{1+t^2} \log h(t)\, dt\right)$,

ただし $h(t) \geqq 0$, $\log h \in L^1(\mathbf{R}, (1+t^2)^{-1}dt)$ で、さらに $\log^+ h \in L^p(\mathbf{R}, (1+t^2)^{-1}dt)$ が成り立つ.

(iv) $g(z) = \exp\left(\dfrac{1}{i} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} d\mu(t)\right)$, ただし μ は $\mathbf{R}$ 上の有限実測度で、Lebesgue 測度に関して特異である.

逆に、f が $(*)$ の形で表されるとき $f \in N_0^p(D)$ である。

定理 4-3([2]) $p > 1$ とする。また f を D 上の正則関数とする。このとき、以下が成り立つ。

f が $N_0^p(D)$ で可逆である $\Longleftrightarrow$ $f(z) = e^{g(z)}$ $(g(z) \in \mathfrak{H}^p)$ と表される。

参考文献

[1] Y. Iida, *Nevanlinna-type spaces on the upper half plane*, Nihonkai Math. J. **12** (2001), 113-121.

[2] Y. Iida, *On Privalov space on the upper half plane*, submitted.

[3] V. I. Krylov, *On functions regular in a half-plane*, Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. **32** (2) (1963), 37-81.

[4] N. Mochizuki, *Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.

[5] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994.