数理解析研究所講究録
1478巻 2006年 5-8

Monomial curves associated with balanced semigroups

日本工大 (Nippon Inst. Tech.)
衛藤和文 (Kazufumi Eto)

ここでは, Herzinger らの論文 [5] の中で提出された問題の解答を与える.

定義 1. $\mathbb{N}$ は 0 と自然数全体からなる集合とし, S を 4 元で minimal に生成された numerical semigroup とする. すなわち, S は $\mathbb{N}$ の部分集合で, 以下の条件をみたす.

$$S = n_1\mathbb{N} + n_2\mathbb{N} + n_3\mathbb{N} + n_4\mathbb{N},$$
$$n_i \notin n_j\mathbb{N} + n_k\mathbb{N} + n_l\mathbb{N} \text{ for } \{i, j, k.l\} = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$\gcd(n_1, n_2, n_3, n_4) = 1.$$

さらに, $n_1 + n_4 = n_2 + n_3$ が成り立つとき, S は balanced であるという. S が balanced semigroup で, さらに, $n_1 + n_4 = \gcd(n_1, n_4)\gcd(n_2, n_3)$ が成り立つときに, unitary であるという.

Herzinger らは次の定理を証明した.

定理 1 ([5]). S が unitary semigroup のとき, S のイデアル $I = (0, d) = S \cup (d+S)$, $d = n_4 - n_3$ に対し, $S - I$ は 2 元で生成され, $S - \{0\} = I + (S - I)$ が成り立つ.. ここで, $S - I = \{a \in S : a + z \in S, \forall z \in I\}$ である.

彼らはまた, この逆が成立するか, という問題を論文 ([5]) の中で与えている. この問題に対し, 次の定理をえた.

定理 2 ([3]). S が balanced semigroup のとき, $I = (0, d)$, $d = n_4 - n_3$ に対し, $S - I$ が 2 元で生成され, かつ $S - \{0\} = I + (S - I)$ が成り立つことと, S が unitary であることとは同値である.

(証明の概略) k を体とする. S に対し, semigroup ring

$$k[S] = \bigoplus_{n \in S} k \cdot t^n$$

を考える. S が n_1, n_2, n_3, n_4 で生成されるとき, 環準同型写像

$$\varphi : A = k[X_1, X_2, X_3, X_4] \longrightarrow k[S], \qquad \varphi(X_i) = t^{n_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

は全射である．Ker φ を J とおく．まず, S が balanced semigroup であることと $X_1X_4 - X_2X_3$ が J に含まれることは同値である．さらに, Gastinger の定理 ([4]) を用いると, S が unitary semigroup であることと

$$J = (X_1X_4 - X_2X_3, X_1^{a_1} - X_4^{a_4}, X_2^{a_2} - X_3^{a_3}),$$

すなわち J は $X_1X_4 - X_2X_3$ を含むような complete intersection ideal であることが同値である, ここで, $a_1 = n_4/\gcd(n_1, n_4)$, $a_2 = n_3/\gcd(n_2, n_3)$, $a_3 = n_2/\gcd(n_2, n_3)$, $a_4 = n_1/\gcd(n_1, n_4)$ である．

$k[S]$ のイデアル (t^{n_1}, t^{n_2}) を考える．このイデアルは S のイデアル $(n_1, n_2) \cong (0, d)$ に対応している．さらに, その φ による引き戻しを考えると, それは $J + (X_1, X_2)$ で, イデアル

$$(X_1, X_2, X_1X_4 - X_2X_3, X_1^{a_1} - X_4^{a_4}, X_2^{a_2} - X_3^{a_3}) = (X_1, X_2, X_3^{a_3}, X_4^{a_4})$$

を含む．したがって, $\dim_k k[S]/(t^{n_1}, t^{n_2}) \leq a_3a_4$ が成り立ち, 等号成立は S が unitary のときである．完全列

$$0 \longrightarrow (t^{n_1}, t^{n_2})/(t^{n_1}) \longrightarrow k[S]/(t^{n_1}) \longrightarrow k[S]/(t^{n_1}, t^{n_2}) \longrightarrow 0$$

$\dim_k k[S]/(t^{n_1}) = n_1$ より, $\dim_k (t^{n_1}, t^{n_2})/(t^{n_1}) \geq n_1 - a_3a_4$ をえる．一方, $(t^{n_1}, t^{n_2})/(t^{n_1}) \cong (t^{n_2})/(t^{n_1}) \cap (t^{n_2})$, (t^{n_2}) の φ による引き戻しは $(X_2) + J$, $(t^{n_1}) \cap (t^{n_2})$ の引き戻しは $((X_1) + J) \cap ((X_2) + J)$ なので,

$$((X_1) + J) \cap ((X_2) + J) \supset (X_1X_2, X_1X_4) + J$$

より,

$$\dim_k (t^{n_1}, t^{n_2})/(t^{n_1}) \leq a_2a_4$$

をえる．また, J が complete intersection のときは上の式は等号である．以上より, S が unitary であることと

$$((X_1) + J) \cap ((X_2) + J) = (X_1X_2, X_1X_4) + J$$

が成り立つ, すなわち

$$(t^{n_1}) \cap (t^{n_2}) = (t^{n_1+n_2}, t^{n_1+n_4})$$

が成り立つことが同値である．これを semigroup の言葉になおすと定理をえる． $\square$

注意 1. この問題の起源は, Huneke, Wiegand の論文 ([6]) の中にある I, J が fractional ideal のとき, 自然な写像 $I \otimes J \to IJ$ は同型か, 同値な言い換えで $I \otimes J$ は torsion element を持つか? である. 今の場合, 1 次元 semigroup ring において, $I \otimes I^{-1}$ が torsion element を持つか? という問題を考えている.

さらに, Huneke, Wiegand はこの観察から, Tor の rigidity, intersection multiplicity に関する考察をおこなっている.

注意 2. balanced semigroup はもう少し弱い条件に定義しなおすことができる (cf, [3]). すなわち, $n_1+n_4=n_2+n_3$ の条件の替わりに, $d_1n_1+d_4n_4=d_2n_2+d_3n_3$ を考える, ただし, $d_i=\gcd\{n_j\}_{j\neq i}$ である. この条件をみたすとき semigroup S は extended balanced であるという. 前の定理は extended balanced semigroup に対しても成り立つ.

例 1. n_1,n_2,n_3,n_4 で定義される semigroup を $H(n_1,n_2,n_3,n_4)$ とあらわす. このとき, $H(14,15,20,21)$ は unitary semigroup である. 一方, $H(7,16,18,20)$, $H(20,21,48,54)$ は extended balanced semigrooup である.

注意 3. k を体とする. semigroup $H(n_1,n_2,\ldots,n_N)$ に対し, アフィン曲線

$$\{(t^{n_1},t^{n_2},\ldots,t^{n_N}) : t \in k\}$$

を (affine) monomial curve という. また, この曲線の座標環は semigroup ring $k[t^{n_1},t^{n_2},\ldots,t^{n_N}]$ である. そこで, 全射環準同型写像

$$\varphi : A = k[X_1,X_2,\ldots,X_N] \longrightarrow k[S], \qquad \varphi(X_i)=t^{n_i} \quad (i=1,2,\ldots,N)$$

を考え, その kernel を I とおく. 条件

$$\exists f_1,f_2,\ldots,f_{N-1} \in I \text{ s.t. } I=\sqrt{(f_1,f_2,\ldots,f_{N-1})}$$

が成り立つとき, I は set-theoretic complete intersection であるという. このことは, アフィン N 次元空間の中で, monomial curve が $N-1$ 個の方程式の共通零点としてあらわされることを意味している. また, Kronecker によって, 一般に, アフィン N 次元空間の代数曲線が $N-1$ 個の方程式の共通零点としてあらわされることが予想されている. この問題に対し, balanced semigroup, または extended balanced semigroup に associate した monomial curve は set-theoretic complete intersection であることが示

されている ([2, 3]). さらにこの場合, [1] で, 上の条件をみたす f_1, f_2, f_3 の中で, binomial (monomial の差であらわされる多項式) が 2 つ以上あらわれるための必要十分条件が示され, また $S = (17, 19, 25, 27)$ のときはこの条件をみたさないことも示されている. したがって, その中に binomial は高々 1 個しかあらわれることができなくて, しかも, 実際, 1 個しかあらわれない f_1, f_2, f_3 の例が与えられている ([2]). この S は balanced semigroup であることを注意しておく.

参考文献

[1] K. Eto, Set-theoretic complete intersection lattice ideals in monoid rings, to appear in J. Algebra.

[2] K. Eto, An example of set-theoretic complete intersection lattice ideal, to appear in Tokyo J. Math..

[3] K. Eto, The monomial curves associated with balanced semigroups, (submitted)

[4] W. Gastinger, Über die Verschwindungsideale monomialer Kurven, PhD thesis, Univ. Regensburg, Landshut, 1989.

[5] K. Herzinger, S. Wilson, N. Sieben, J. Rushall, Perfect pairs of ideals and duals in numerical semigroups, arXiv:math.AG/0508631.

[6] C. Huneke and R. Wiegand, Tensor products of modules and the rigidity of Tor, *Math. Ann.* **299** (1994), 449–476.