数理解析研究所講究録
1478 巻 2006 年 9-14

連続関数環の（近似）n乗根について

筑波大学数理物質科学研究科数学専攻　川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)
Institute of Mathematics
University of Tsukuba

1 序論及び主結果

compact Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体に supremum norm $\|\cdot\|_\infty$ を入れた C^* 環を $C(X)$ で表す。Gel'fand の表現定理から，任意の可換 unitalC^* 環 A に対して，$C(X)$ が A と同型であるような compact Hausdorff 空間 X が，位相同型を除いて一意的に決まる。そこで $C(X)$ の C^* 環論的性質と X のトポロジーとの関係を考察することは，自然でかつ興味ある問題である。本稿では代数的閉な連続関数環を持つ compact Hausdorff 空間のトポロジーに関して，得られた結果を報告する。

定義 1.1 *(1)* 連続関数環 $C(X)$ が **代数的閉** であるとは，$C(X)$ に係数を持つ任意の *monic* な代数方程式が $C(X)$ に根を持つことである。

(2) $C(X)$ が **n乗根について閉じている** とは z についての代数方程式

$$z^n - f = 0, f \in C(X) \tag{1}$$

が常に $C(X)$ に根を持つことである。

(3) $C(X)$ が **近似n乗根について閉じている** とは、任意の $\epsilon > 0$ と任意の $f \in C(X)$ に対して，$g \in C(X)$ が

$$\| g^n - f \|_\infty < \epsilon \tag{2}$$

を満たすように取れることである.

代数的閉な連続関数環は任意の n に対して n 乗根について閉じており，また n 乗根について閉じている連続関数環は近似 n 乗根について閉じていることは明らかである．この文脈に於いて次は最も基本的な問題であり、かつ現在の所未解決である.

問題 1：$C(X)$ が代数的閉であるような compact Hausdorff 空間 X の位相的特徴付けを与えよ。

Deckard-Pearcy[5] は，X が完全不連結なら $C(X)$ はつねに代数的閉であることを示した。これに加えて現段階で得られている最良の結果は以下のものであり，X が第一可算なら問題 1 に完全解を与えている.

定理 1.2 ([7], [8], [11]) X は第一可算 *compact Hausdorff* 空間とする。このとき以下は同値である。

(1) $C(X)$ は代数的閉,

(2) $C(X)$ は *square-root closed,*　即ち 2 乗根 *(=平方根)* について閉じている.

(3) $\dim X \leq 1$ かつ $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{Z}) = 0$, ここで $\dim X$ は X の被覆次元を表し, また $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{Z})$ は X の整数係数 1 次元チェックコホモロジーを表す.

一般の compact Hausdorff 空間に対して問題 1 を考察するにあたって, まず次の問題を考察することは自然であろう.

問題 2　X を（第一可算とは限らない）compact Hausdorff 空間で $C(X)$ が代数的閉 (あるいは square-root closed) であるとする.

(1) $\dim X \leq 1$ が成り立つか?

(2) $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{Z}) = 0$ が成り立つか?

２００４年関数環研究集会において, Cole extension を用いることにより問題２（２）は否定的であることを報告した ([9],[3]). 本稿では問題２（１）についての反例を与えた以下の定理について概説する. 構成に当たっての基本的なアイディアは（１）と同様 Cole extension を用いることである.

定理 1.3 (N.Brodskiy, J.Dydak, A.Karasev, 川村 [2]) *(1)* 任意の自然数 n に対して、n 次元 *compact Hausdorff* 空間 X_n で $C(X_n)$ が任意の m 乗根について閉じているものが存在する.

(2) 任意の自然数 n に対して n 次元 *compact* 距離空間 Y_n で $C(Y_n)$ が任意の近似 m 乗根について閉じているものが存在する.

上の定理 (1) で得られた X_n の位相和 $\oplus_n X_n$ の Stone-Čech コンパクト化 $X_\infty = \beta(\oplus_n X_n)$ を取れば次が得られる.

系 1.4 無限次元コンパクトハウスドルフ空間 X_∞ で、$C(X_\infty)$ が任意の m 乗根について閉じているものが存在する.

2　定理１．３：証明の概略

前述の様に, compact Hausdorff 空間 X_n で $\dim X_n = n$ かつ $C(X_n)$ が任意の m 乗根について閉じているものを構成するために用いられる手法は, [3], [9] と同じく Cole extension とその variation である。以下記述を簡単にするため X_n を $C(X_n)$ が square-root closed であるように構成する. 以下の構成を, $C(X_n)$ が任意の m 乗根について閉じているように修正することは易しい.

compact Hausdorff 空間 X に対して,

$$S_X = \{(x, (z_f)_{f \in C(X)}) | f(x) = z_f^2 \ \ \forall f \in C(X)\} \subset X \times \mathbb{C}^{C(X)} \tag{3}$$

とおく. S_X は $X \times \prod\{f(X)|f \in C(X)\}$ の閉集合であり, 従って compact Hausdorff 空間である.
写像 $\pi : S_X \to X$ を

$$\pi_X((x, (z_f)_{f \in C(X)})) = x, (x, (z_f)_{f \in C(X)}) \in S_X$$

と定義すると, 任意の $x \in X$ に対して $\dim \pi_X^{-1}(x) = 0$ であるから, $\dim S_X \leq \dim X$ が成り立つ ([6] 参照). 鍵となるのは次の簡単な事実である.

(A): 任意の $f \in C(X)$ に対して、$g \in C(S_X)$ が $f \circ \pi_X = g^2$ を満たすように取れる。

実際, 与えられた $f \in C(X)$ に対して, $g\colon S_X \to \mathbb{C}$ を $g((x, (z_\varphi)_{\varphi \in C(X)})) = z_f$, $(x, (z_\varphi)_{\varphi \in C(X)}) \in S_X$ と定義すればよい.

さて ω_1 を最初の非可算順序数とする. compact Hausdorff 空間 X_0 を一つ固定し, compact Hausdorff 空間の射影系 $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\colon X_\beta \to X_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ を, 超限帰納法を用いて以下のように定義する.
i) 順序数 β が, 直前の順序数を持ち $\beta = \alpha + 1$ と表せるなら, $X_\beta = S_{X_\alpha}$, $\pi_\alpha = \pi_{X_\alpha}\colon X_\beta = S_{X_\alpha} \to X_\alpha$ とする.
ii) 順序数 β が極限順序数なら, $X_\beta = \varprojlim(X_\alpha, \pi_\alpha^\gamma\colon X_\gamma \to X_\alpha)$ と置き, $\alpha < \beta$ に対して, $\pi_\alpha^\beta = \varprojlim(\pi_\alpha^\gamma\colon X_\gamma \to X_\alpha)$ とする.

この様にして得られた射影系の射影極限 $R(X_0) = \varprojlim X_\alpha$ を考え, $\alpha < \omega_1$ に対して, $R(X_0)$ から X_α への標準射影を $\pi_\alpha : R(X_0) \to X_\alpha$ で表す. 任意の $\alpha < \omega_1$ に対して π_α の任意のファイバーは 0 次元である. 上の射影系が非可算の添数を持っていることを用いると, 次を示すことができる.

(B): 任意の連続関数 $f : R(X_0) \to \mathbb{C}$ に対して, ある順序数 $\alpha < \omega_1$ と連続関数 $f_\alpha : X_\alpha \to \mathbb{C}$ が存在して, $f = f_\alpha \circ \pi_\alpha$ を満たす.

(A) と (B) から $C(R(X_0))$ が square-root closed であることを示すことができる. 纏めると :

定理 2.1 (the Cole extension) 任意の *compact Hausdorff* 空間 X_0 に対して, *compact Hausdorff* 空間 $R(X_0)$ と連続写像 $\pi_0 : R(X_0) \to X_0$ が次のように取れる.

(1) 任意の $x \in X$ に対して, $\dim \pi_0^{-1}(x) = 0$. 特に $\dim R(X_0) \leq \dim X_0$.

(2) $C(R(X_0))$ は *square-root closed.*

$n \geq 1$ に対して $X_0 = S^n = n$ 次元球面として、上の構成法を適用して得られた空間 $X_n = R(S^n)$ を考える. 上記定理 (1) から $\dim X_n \leq n$ が得られるから、X_n が求めるものであることを示す

ためには，$\dim X_n \geq n$ が成り立つことを示せばよい．そのためには有理数係数チェックコホモロジーを用いて

$$(*)\quad \check{\mathrm{H}}^n(X_n;\mathbb{Q}) \neq 0$$

を示せばよい．これを示すために用いられるのが tranfer homomorphism と呼ばれる準同型写像である．

定理 2.2 ([1], p.139) 有限群 G がコンパクトハウスドルフ空間 Y に作用しているとし，その軌道空間を Y/G で表わす．$\pi : Y \to Y/G$ を射影とする．このとき準同型 $\mu^* : \check{\mathrm{H}}^*(Y;\mathbb{Q}) \to \check{\mathrm{H}}^*(Y/G;\mathbb{Q})$ が

$$\mu^* \circ \pi^* = |G| \cdot \mathrm{id}_{\check{\mathrm{H}}^*(Y;\mathbb{Q})}$$

が成立するように存在する．

上の μ^* を *transfer homomorphism* という．上の定理から特に次が得られる．
(C): $\pi^* : \check{\mathrm{H}}^*(Y/G;\mathbb{Q}) \to \check{\mathrm{H}}^*(Y;\mathbb{Q})$ は単射である．

(C) を 2 節冒頭の S_X に適用するため、S_X には自然な $\mathbb{Z}_2$ 作用があることに注意する．実際

$$(x,(z_f)_{f\in C(X)}) \mapsto (x,(-z_f)_{f\in C(X)})$$

が S_X 上の $\mathbb{Z}_2$ 作用を与えており，しかも軌道空間 $S_X/\mathbb{Z}_2$ が X と自然に同相であることを見ることは易しい．したがって (C) から
(D): $\pi_X^* : \check{\mathrm{H}}^*(X;\mathbb{Q}) \to \check{\mathrm{H}}^*(S_X;\mathbb{Q})$ は単射である．

次に射影系 $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ の構成方法を想起して，超限帰納法とチェックコホモロジーの連続性：

$$\check{\mathrm{H}}^*(\lim_{\leftarrow} X_\alpha;\mathbb{Q}) \cong \lim_{\rightarrow} \check{\mathrm{H}}^*(X_\alpha;\mathbb{Q}) \tag{4}$$

を用いることによって，　定理 1.3 における連続写像 $\pi_0 : X_n = R(S^n) \to S^n$ は単射準同型 $\pi_0^* : \check{\mathrm{H}}^*(S^n;\mathbb{Q}) \to \check{\mathrm{H}}^*(X_n;\mathbb{Q})$ を誘導することが分かる．$\check{\mathrm{H}}^n(S^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ だから $\check{\mathrm{H}}^n(X_n;\mathbb{Q}) \neq 0$ が結論され、$(*)$ が示された．

n 次元 compact 距離空間 Y_n で，$C(Y_n)$ が任意の近似 m 乗根について閉じているものを構成するアイディアも、本質的に上と同様である．まず compact 距離空間 Y に対して $C(Y)$ の稠密可算部分集合 $D \subset C(Y)$ を取って，S_Y を次の空間に置き換える：

$$M_Y = \{(y,(z_f)_{f\in D}) | f(y) = z_f^2 \ \ \forall f \in D\} \subset Y \times \mathbb{C}^D.$$

このとき M_Y は距離空間の可算直積の部分集合だから距離化可能であることに注意する．$\pi_Y : M_Y \to Y$ を前と同様

$$\pi_Y((y,(z_f)_{f\in C(X)})) = y, (y,(z_f)_{f\in D}) \in M_Y$$

と定義すれば π_Y の各ファイバーは 0 次元であり, 従って $\dim M_Y \leq \dim Y$ が成り立つ. ここで (A) に対応するのは次の事実である.

(A'): 任意の $f \in C(Y)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して、$g \in C(M_Y)$ が $\| f \circ \pi_Y - g^2 \| < \epsilon$ を満たすように取れる。

実際, 与えられた $f \in C(X)$ を D に属する関数 f' で近似し、$f' \circ \pi_Y = g^2$ を満たす関数 g を (A) と同様に取ればよい.

さてコンパクト距離空間 Y_0 を固定し、先に与えた射影系の構成法に多少の技術的修正を施すことによって, compact 距離空間の（可算）射影列 $\{Y_i; p_i : Y_{i+1} \to Y_i | i = 0, 1, \ldots\}$ を次を満たすように取ることができる. 各 $i = 0, 1, \ldots$ に対し,

$$Y_{i+1} = M_{Y_i}, p_i = \pi_{Y_i} : Y_{i+1} \to Y_i$$

が成り立ち, かつ
(A") 任意の i, 任意の連続関数 $f_i : Y_i \to \mathbb{C}$, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 連続関数 $f_{i+1} : Y_{i+1} \to \mathbb{C}$ が $\| f_{i+1} - f_i \circ p_i \|_\infty < \epsilon$ を満たすように存在する.

(注 : M_{Y_i} を構成するためには $C(Y_i)$ の適切な可算稠密部分集合を取らねばならない. ここが技術的な注意を必要とする箇所である.)

上の列に対して射影極限 $Y_\infty = \lim_{\leftarrow} Y_i$ を取り, $p_{i,\infty} : Y_\infty \to Y_i$ を極限空間 Y_∞ から Y_i への射影とする. このとき次が成り立つ.
(B'): 任意の連続関数 $f : Y_\infty \to \mathbb{C}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 i と連続関数 $f_i : X_i \to \mathbb{C}$ が存在して, $\| f - f_i \circ p_{i,\infty} \|_\infty < \epsilon$ を満たす.

(A") と (B') を用いれば $C(Y_\infty)$ が近似平方根について閉じていることが分かる. しかも Y_∞ は compact 距離空間の可算列の極限だから、compact 距離空間である. 先とまったく同様にして $\dim Y_\infty \leq \dim Y_0$ が成り立つ.
そこで $Y_0 = S^n$ として上の構成によって得られたコンパクト距離空間を $Y_n = M(S^n)$ とすると transfer homomorphism を用いた同様の議論によって $\dim Y_n = n$ を示すことができる.

問題 1 に関連して, 近似 m 乗根について閉じているような連続関数環を持つ compact Hausdorff 空間は次のように特徴付けることができる.

定理 2.3 ([2]) X を *compact Hausdorff* 空間とする. 次の 2 条件は同値である.

(1) $C(X)$ は近似 m 乗根について閉じている.

(2) 任意の X の閉集合 A に対して $\check{\mathrm{H}}^1(A; \mathbb{Z})$ は *$m-$divisible,* 即ち任意の $\alpha \in \check{\mathrm{H}}^1(A; \mathbb{Z})$ に対して, $\alpha = m\beta$ を満たす $\beta \in \check{\mathrm{H}}^1(A; \mathbb{Z})$ が存在する.

ただ上記（2）の条件は確かめやすいものとはいえない. 特に $\dim X \leq 1$ なら上の（1）及び (2) は以下と同値であることが示されている ([10]).

(3) $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ は $m-$divisible.

参考文献

[1] G.E.Bredon, *Sheaf theory, second edition*, GTM 170, Springer 1997.

[2] N.Brodskiy, J.Dydak, K. Karasev and K. Kawamura, *Root closed function algebras on compacta of large dimension*, arXiv:math.FA/0509006 v1, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] A. Chigogidze, A. Karasev, K. Kawamura and V. Valov, *C^*-algebras with the approximate n-th root property*, Bull. Austral. Math. Soc., 72 (2005), 197-212.

[4] R.S. Countryman, *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math. **20** (1967), 433-438.

[5] D.P. Deckard and C. Pearcy, *On matices over the ring of continuous complex-valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322-328.

[6] R. Engelking, *Theory of dimensions: Finite and Infinite* (Heldermann Verlag, Lemgo, 1995).

[7] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (1999), 239-242.

[8] D. Honma and T. Miura, *On a characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equations are solvable in $C(X)$*, preprint.

[9] 川村一宏, Cole extension　によって得られるsquare-root closedな連続関数環について, 2004年度関数環研究集会（平成１６年１２月２１－２２日　早稲田大学教育学部）報告集　平成１７年６月.

[10] K. Kawamura and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations*, preprint.

[11] T. Miura and K. Niijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2869-2876.

[12] S. Mardešič, *On covering dimension and inverse limit of compact spaces*, Illinois Journ. of Math. **4** (1960), 278-291.

[13] E.L. Stout, *The theory of uniform algebras*, Bogden-Quigley, 1971.

〒３０５－８５７１
茨城県つくば市天王台１－１－１
筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻
kawamura@math.tsukuba.ac.jp