数理解析研究所講究録
1478巻 2006年 28-40

Banach環の生い立ちと関数環の最近の1,2の話題

早稲田大学名誉教授
和田淳藏（Junzo Wada）

I. Banach環の生い立ち

Banach環の一般論の研究は1936年にM. Nagumo（南雲道夫）によって始められたとされている．しかしNagumoのほかにも，同じ頃にBanach環の概念を考えた人達がいた．それはA. D. Michal and R. S. Martin（J. Math. Pures et Appl. 13）である．だがこの論文ではBanach環の定義が彼等の研究のテーマであるFredholm型積分方程式の議論の中で一部行なわれており，明確な定義になっていない．Banach環の定義が明確に書かれ，しかもそこにおいて議論された研究のテーマが豊富なNagumoの論文（[6]）からBanach環の研究が始まったといってもよいと思う．Banach環の前にBanach空間がある．Banach空間の概念は1922年にS. BanachとN. Wienerによって独立に導入された．そして10年後の1932年にBanachの有名な書物[1]

が出版されている．このBanach空間に掛算を導入し，それがノルムによる連続性をもつものがBanach環である．

(a) この後Nagumoの論文の内容を紹介する．どのようにしてBanach環が使われ出したかを見る．

最初にBanach環の定義とそれのいくつかの例が書かれている．その定義は我々が知っている定義そのものである．NagumoはBanach環をLinearer, metrischer, vollständiger Ringと呼んだ．ここではそれをBanach環と呼ぶことにする．そしてその後の議論のための準備がなされている．ここで次のようにBanach環における指数関数の話に移る．

(1) Aを単位元eをもつBanach環とする．そのときAの元に対する指数関数を次のように定義する．

$$\exp a = e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (a \in A)$$

この級数はすべてのaで絶対収束するから$\exp a \in A$となる．ここで$a = \exp b$ $(b \in A)$のとき$b = \log a$とかき，aは対数をもつという．次は南雲の定理としてよく知られている．

Aの正則元全体の群をGとする．

<u>定理</u> Aの元aが対数をもつための必十条件は，aはGの1つの連結なアーベル部分群に含まれることである．

この定理の必要条件の方の証明は簡単である．Aの元aが対数をもつとすれば，ある$b \in A$で$b = \log a$．ゆえに

$a=\exp b$. $H=\{\exp(\alpha b):-\infty<\alpha<\infty\}$ とすれば、$xy=yx$ なら $(\exp x)(\exp y)=\exp(x+y)$ であるから H は a を含む G のアーベル部分群となる。そして $\alpha\to\exp(\alpha b)$ は $(-\infty,\infty)$ から H の上への連続写像であるから H は連結集合、ゆえに証明された。十分条件の証明は多少むづかしい (Rickart [7], 和田 [7] 参照)。

この後、上の定理のいくつかの応用が述べられている。

(2) $(-\infty,\infty)$ 上で定義され、値を Banach 環 A にとる連続関数を $f(t)$ とする。そのときつぎの定理が成り立つ。

定理 任意の $s,t\in(-\infty,\infty)$ で

$$f(s)f(t)=f(s+t),\qquad f(0)=e\quad(e\text{ は }A\text{ の単位元})$$

であれば、$f(t)=\exp(tc)\ (c\in A)$.

このような1パラメータ群は最初 M. H. Stone によって Hilbert 空間におけるユニタリ作用素の群 $\{T_t:-\infty<t<\infty\}$ で考えられた。その後1パラメータ半群の理論が発展して来ている。

(3) 次に複素平面上の領域 G 上で定義され、値を複素 Banach 環 A にとる関数 $f(z)$ を考える。任意の $z\in G$ で $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{df}{dz}\in A$ が存在すれば、$f(z)$ は G で正則という。ここで G の中の連続曲線 $\{z=z(t),\ a\leqq t\leqq b\}$ 上で、G で正則な関数の積分を考える。そして Cauchy の積分定理、Cauchy の積分公式などが複素関数の場合と同様に議論される。

(4) ここでリゾルベント (Resolvent) について述べられている. Aを複素Banach環、eをAの単位元とする. λを複素数とし、$a \in A$で $e+\lambda a$が逆元$(e+\lambda a)^{-1}$をもつとき

$$(e+\lambda a)^{-1} = e + \lambda a_\lambda$$

となるa_λをaのリゾルベントというとNagumoには定義されている. ここでXを複素Banach空間としたとき、TをXからXへのコンパクト作用素とし、Iを恒等作用素としたとき、$(I+\lambda T)^{-1}$が存在したとき$(I+\lambda T)^{-1} = I + \lambda T_\lambda$となるコンパクト作用素$T_\lambda$が存在する. ここで$\lambda I + T$の形の作用素の全体を$\mathcal{A}$としたとき$\mathcal{A}$はBanach環となる. 上の定義により$\mathcal{A}$の元$T$のリゾルベントは$T_\lambda$である. T_λはλが十分小さい所では$T_\lambda = -\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^{n-1}T^n$と展開できる.

しかし現在では、リゾルベルトはこれと異なる定義が与えられている. Tを複素Banach空間XからXへの閉作用素のときTのリゾルベントを$R(\lambda:T) = (\lambda I - T)^{-1}$ (これが存在するときに)と定義される. $R(\lambda:T)$は$|\lambda|$が十分大きい所では$R(\lambda:T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$と展開される.

ここでNagumoは、λ_0を彼の定義したリゾルベントの孤立特異点であるとき、リゾルベントはλ_0のまわりでローラン展開できることを示している. そしてこのローラン展開についていろいろくわしく述べている. 現在の定義によるリゾルベ

ントにおいても、ローラン展開が論じられている（たとえば、Yosida [11] の VIII.8）が、この節のコメントには、この節は一部 Nagumo の議論を改造したものであると述べられている。

(b) Nagumo のこの論文がのっている同じ雑誌の同じ号に K. Yosida（吉田耕作）の論文が2編のせられている。共に Nagumo が定義した Banach 環に関するものである。Yosida は Banach 環を metrical complete ring と呼んでいる。Yosida の1つの論文 [10] には次のような定理が証明されている。

定理　複素 Banach 環に含まれる群が連結でかつ局所コンパクトであれば、Lie 群となる。

ここで Lie 群の定義がなされている。それをこれから見ていこう。まず複素 Banach 環 A に含まれる群が、その元 a で微分可能であるという定義がなされている。次に A に含まれる群 G が局所コンパクトであれば G が至る所で微分可能であることが証明されている。群 G が至る所で微分可能であるとき、G の単位元 e における微分商全体を R とする。この R を G の Lie 環という。ここで G が局所コンパクトであり、$a \in R$ ならば $\exp a \in G$ となることが示される。G が Lie 群であるという定義は、$a \in R$ ならば $\exp a \in G$ ということ以外に2つの条件がみたされるということで与えられている。この定義は多少抽象的であるが、古典的な Lie 群 において

Lie群の群芽の単位元を通る曲線の単位元における接ベクトル全体である接ベクトル空間をそのLie環ということに通じている．この定理はvon Neumannが1929年にn次元マトリックス全体のBanach環において証明した定理の拡張となっている．

Yosidaのもう1つの論文は、上の(a)(2)のNagumoの定理の1パラメータ群の$(-\infty, \infty)$を、局所コンパクト連結位相群にかえた場合に論じられた．

(c) ここで余談として、これらの論文が書かれた頃、南雲先生、吉田先生はどのようになさっていたかを少し話してみよう．1984年に、日本数学会が創立100周年を迎えた機に、日本の数学100年史上下が出版された．その中に両先生のことがくわしく書かれている．それによると、南雲先生は1932年より2年間ゲッティンゲン大学に留学され、論文が書かれた年に大阪大学で教授になられている．31才の若い教授である．吉田先生も大阪大学で助教授で27才、そしてもう1人角谷静夫先生が助手で25才であった．大阪大学にはそのほかに三村征雄先生がおられた．1935年にN. Wienerが日本に来られ、東京大学と大阪大学で講演された．そのときの印象を後で著書に書いている．彼は大阪大学に特に好感をもち．吉田や角谷のようなすぐれた数学者がいると述べている．

(d) その後Banach環の研究は大変な発展をみせ、多くの論

文が出版されている．そして非可換の場合は作用素環として大きく進展して来ている．可換の場合もいろいろ研究が行なわれたが，その中で次の Gelfand の表現定理 (1941) が大きな意味をもっている．

定理　A を可換で単位元をもつ複素 Banach 環とする．そのとき A から $C(M)$ への連続な準同形写像が存在する．ここで M は A の極大イデアル空間である．

それゆえ $\varphi(A)$ はコンパクト Hausdorff 空間 M で $C(M)$ の部分環となっている．

(e)　A が関数環であるとは，A がコンパクト Hausdorff 空間 X で $C(X)$ の閉部分環であり，1 を含み X の 2 点を分離するものをいう．

関数環の中で重要な $C(X)$ (X の上の複素値連続関数全体の Banach 環) とかディスク環は以前は単に Banach 環の例として扱われていた．しかし関数環は 1950 年頃から活発な研究が始められた．関数環は複素関数論 (多変数関数論を含む) と密接な関連をもつものであるが，関数論は個々の関数の性質を深く追求するものであるのに対し，関数環の理論ではある種の性質を共有する関数の集合を問題とし，その集団における個の役割を論ずる．ゆえにその立脚点は関数解析学にある．そして関数環と関数論は両両相俟って発展して行く．関数環の

研究課題は、関数環の諸性質、関数の近似問題、Hardy 空間、解析構造などである。

著者は1970年から71年にかけて約1年エール大学に滞在し、角谷先生からよくお話を伺ったが、角谷先生は関数環に大変興味をお持ちであった。実際に Hardy 空間 H^∞ に関する研究をなさっている。その2つについて次に述べる。

(1) Corona 問題。H^∞ の極大イデアル空間を M とする。$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ としたとき、$D\subset M$ となる。Corona 問題とは D の M における閉包 $\bar{D}$ で $M\setminus\bar{D}$ に点が存在するかというものである。Corona とは太陽コロナのことで皆既日食の際、黒い太陽の周りに真珠色の輝いて見える太陽最外層の大気のことである。この conjecture は実は角谷先生が出されたものでそれは1941年とのことである。角谷先生はこのように早くから H^∞ の極大イデアルの研究をなさっていたわけであるが、そのほかにも論文[4]を出版されている。この問題は L. Carleson [2] によって否定的に解かれた。すなわち $M=\bar{D}$ ということである。

(2) 次の定理は角谷の定理として、よく知られている。

<u>定理</u> H^∞ の algebra automorphism Φ に対して、D から D の上への等角写像 τ が存在して

$$(\Phi f)(z)=f(\tau(z))\quad(f\in H^\infty,\ z\in D)$$

となる。ここで $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ である。

II. 関数環の最近の1,2の話題

関数環の最近の興味ある2つの事柄について述べる.

(a) 関数環における等長写像

関数空間における等長写像は、X, YをコンパクトHausdorff空間としたとき, $C(X)$から$C(Y)$の上への等長写像Tの特徴付けから始まる. 等長写像TとはTが線形作用素で$\|Tf\| = \|f\|$ $(f \in C(X))$. 次はBanach-Stoneの定理として知られている.

<u>定理</u>　Tを$C(X)$から$C(Y)$の上への等長写像とすれば、Yの上の複素値連続関数u $(|u|=1)$とYからXの上への位相同形写像τが存在して

$$(Tf)(y) = u(y) f(\tau(y)) \quad (f \in C(X),\ y \in Y).$$

その後いろいろの関数空間において上への等長写像が考えられた. そして次に中への等長写像が考えられたが, これは上への場合とくらべてむづかしい.

ここでは関数環の中への等長写像について最近A. Matheson[5]によって得られた結果を中心にして論を進めて行く.

いまAを$C(X)$の閉部分空間としたとき, 次が成り立つ.

<u>定理</u>　(1)　TをAからAの中への等長写像とすれば, ある閉集合$F \subset Sh(A)$と連続関数$u: F \to \mathbb{T}$と連続写像$\tau: F \to Sh(A)$ $\tau(F) = Sh(A)$が存在して

$$(Tf)(y) = u(y) f(\tau(y)) \quad (f \in A,\ y \in F)$$

ここで $Sh(A)$ は A の Shilov 境界，$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$.

(2) $Y=\{u\cdot f(\tau)\}\subset C(F)$ とする．そのときノルム 1 の linear extension operator $\mathcal{E}:Y\to A$ が存在して $Tf=\mathcal{E}(u\cdot f(\tau))$.

ここで $f\in A$, $f(F)=0$ のとき $f\equiv 0$ なら T を type 1，そうでないとき T を type 2 という．

いま A を X 上の関数環とし、A の Choquet 境界 $Ch(A)=X$ とする．そのとき T を A から A の中への codimension 1 の等長写像とすれば F は X か $X\setminus\{p\}$ (p は X のある孤立点)（[8] 参照）．ここで T は $F=X$ のとき type 1，$F=X\setminus\{p\}$ のとき type 2 である．

$K\subset\mathbb{C}$ をコンパクトとし、Ω を K の内部で $K=\overline{\Omega}$ とする．そのとき $A(K)$ を Ω で正則で K で連続な関数の全体である関数環とする．$A(K)$ や Ball algebra $A(B)$ の中への type 1 の等長写像の特徴付けがなされる．

(b) もう1つの話題はスペクトル保存写像の研究である．それは Banach 環上の線形汎関数が乗法的であるための十分条件をスペクトルに関する条件で与えた 1960 年代の Gleason-Kahane-Żelazko の定理に端を発する．ここでは関数環 A から A の上への全射の写像 T（線形性，乗法性 を仮定しない）で $f,g\in A$ に対し $\sigma(fg)=\sigma(Tf\cdot Tg)$ となるような T はどのような形であるかを考える．ここで $\sigma(f)$ は f のスペクトルを表わす．

これに関して 2001 年に L. Molnár は $A=C(X)$ の場合を考

え、それを2004年にN. V. Rao and A. K. Royが関数環の場合に拡張した。その結果は

<u>定理</u>　AをX上の関数環とし、XはAの極大イデアル空間と一致すると仮定する。TをAからAの上への全射な写像とし、$f, g \in A$ で $\sigma(fg) = \sigma(Tf \cdot Tg)$ とする。そのときXからXの上への位相同形写像 φ とその値が $\{-1, 1\}$ である関数 τ が存在して

$$T(f)(x) = \tau(x) f(\varphi(x)) \quad (x \in X,\ f \in A)$$

となる。その結果 $T(1) = 1$ となればTは等長同形写像となる。

<u>追記</u>　今回の共同研究の中のOpen problem sessionで羽鳥理さんがスペクトル保存の問題とその今後の展望について話された。

そして今年の12月23日から北大で行われた関数環研究集会でこの問題に関して、羽鳥、高木啓行、三浦毅のお三人の共同研究の結果が話された。それによると次の定理が得られている。([3])。これは上に述べたMolnárとRao and Royの定理のいずれもの拡張になっている。

<u>定理</u>　A, BをそれぞれコンパクトHausdorff空間X, Y上の関数環とする。TをAからBの上への写像とし

$$(Tf \cdot Tg)(Y) = (fg)(X) \quad (f, g \in A)$$

とする。そのとき ある $\psi \in B$ $(\psi(Y) \subset \{-1, 1\})$ と M_B から M_A 上へ

の位相同形写像φが存在して

$$\widehat{Tf}(y)=\hat{\psi}(y)\hat{f}(\varphi(y)) \quad (y\in M_B,\ f\in A),$$

もし$T1=1$ならTはAからB上への等長同形写像である.

ここでM_AはAの極大イデアル空間である.

このお三人の論文をProc. Amer. Math. Socに投稿されたとき、Rao and Royの論文はまだto appearであって、その内容をご存知でなかったとのことである.

これに関連するLuttman - Tonevを出す予定であり、羽鳥、高木、三浦のお三人の半単純可換Banach環や半単純可換Banach*-環における研究も進められている.

参考文献

[1] S. Banach : Théorie des Operations Lineaires, Warszawa 1932.

[2] L. Carleson : Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math. 76 (1962) 547-559.

[3] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi : Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via non-linear range-preserving properties, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[4] S. Kakutani : Rings of analytic functions, Lectures on functions of a complex variable, 1955.

[5] A. Matheson : Isometries into function algebras, Houton J. of Math. 30 (2004) 219-230.

[6] M. Nagumo : Einige analytische Untersuchungen in linearen, metrischen Ringen, Jap. J. of Math., 13 (1936) 61-80.

[7] C. E. Rickart : General Theory of Banach Algebras, D. Van nostrand company 1960.

[8] T. Takayama and J. Wada : Isometric shift operators on the disc algebra, Tokyo J. Math. 21 (1998) 115-120.

[9] 和田淳蔵：ノルム環　共立出版 1969.

[10] K. Yosida : On the group embedded in the metrical complete ring, Jap. J. of Math. 13 (1936) 7-26.

[11] K. Yosida : Functional Analysis, Springer, 1971.