数理解析研究所講究録
1478巻 2006年 66-70

順序付き可換群の作用と Arveson スペクトル部分空間に対する竹崎双対定理の類似物について

渡邉 恵一 (新潟大学)
Keiichi Watanabe (Niigata University, Japan)

Abstract

Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann algebra, and G be a locally compact abelian ordered group with its positive semigroup G_+. Suppose α is a continuous action of G on $\mathcal{M}$. Let $\mathcal{M}^{\alpha}(E)$ be the spectral subspace associated to a closed subsemigroup E of $\hat{G}$. Then we show that the second crossed product $(\mathcal{M}^{\alpha}(E)\rtimes_{\alpha}G_+)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ is isomorphic to the tensor product $\mathcal{M}^{\alpha}(E)\bar{\otimes}LT(L^2(G))$ of $\mathcal{M}^{\alpha}(E)$ and the lower triangular operator algebra on $L^2(G)$.

$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に作用する von Neumann 環, G を局所コンパクト可換群, α を連続作用とする, つまり, α は G から $\mathcal{M}$ の $*$-自己同型群への準同型写像で, 各 $x\in\mathcal{M},\varphi\in\mathcal{M}_*$ に対して, $g\mapsto\varphi(\alpha_g(x))$ が連続. ここで $\mathcal{M}_*$ は $\mathcal{M}$ 上の σ-弱連続線型汎関数の全体を表す. $\mathcal{M}$ と G の α による接合積を $\mathcal{M}\rtimes_{\alpha}G$ と表す. これは Hilbert 空間 $L^2(G,\mathcal{H})$ 上の作用素

$$\pi_{\alpha}(x), x\in\mathcal{M} \quad \text{および} \quad \lambda(g), g\in G$$

によって生成される von Neumann 環として定義される. これらは,

$$(\pi_{\alpha}(x)\xi)(h)=\alpha_{-h}(x)\xi(h), \quad \xi\in L^2(G,\mathcal{H}), \quad h\in G$$

および

$$(\lambda(g)\xi)(h)=\xi(h-g), \quad \xi\in L^2(G,\mathcal{H}), \quad h\in G$$

によって定義されている. G の双対群を $\hat{G}$ と書き, $g\in G$ と $\gamma\in\hat{G}$ に対して, 指標 γ の g における値を $\langle g,\gamma\rangle$ と表す. $\hat{G}$ の $\mathcal{M}\rtimes_{\alpha}G$ への双対作用 $\hat{\alpha}$ は以下で定義される;

$$\hat{\alpha}_{\gamma}(X)=\mu(\gamma)X\mu(\gamma)^*, \quad X\in\mathcal{M}\rtimes_{\alpha}G, \quad \gamma\in\hat{G}.$$

ここで $\mu(\gamma),\gamma\in\hat{G}$ は $L^2(G,\mathcal{H})$ 上のユニタリ作用素で,

$$(\mu(\gamma)\xi)(h)=\overline{\langle h,\gamma\rangle}\xi(h), \quad \xi\in L^2(G,\mathcal{H}), \; h\in G$$

によって定義されている. Arveson のスペクトル部分空間論の必要部分を思い出そう. 各 $f \in L^1(G)$ に対して, Fourier 変換を $\hat{f}$ と書く;

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G \overline{\langle g, \gamma \rangle} f(g) dg, \quad \gamma \in \hat{G}.$$

各 $f \in L^1(G)$ および $x \in \mathcal{M}$ に対して, $\alpha_f(x) \in \mathcal{M}$ が一意に存在して以下を満たす;

$$\varphi(\alpha_f(x)) = \int_G \varphi(\alpha_g(x)) f(g) dg, \quad \varphi \in \mathcal{M}_*.$$

各 $x \in \mathcal{M}$ に対して, Arveson スペクトル $Sp_\alpha(x)$ は次のように定義される;

$$Sp_\alpha(x) = \bigcap \{Z(f); f \in L^1(G), \alpha_f(x) = 0\}.$$

ここで $Z(f) = \{\gamma \in \hat{G}; \hat{f}(\gamma) = 0\}$ である. $\hat{G}$ の各閉集合 E に対して, スペクトル部分空間 $\mathcal{M}^\alpha(E)$ は次のように定義される;

$$\mathcal{M}^\alpha(E) = \{x \in \mathcal{M}; Sp_\alpha(x) \subset E\}.$$

スペクトル部分空間の基本事項は, 例えば [A] や [S] にある. 以下, 常に G は正半群 G_+ をもつ順序付き可換群であると仮定する. つまり, G の部分集合 G_+ が存在して以下を満たす;

1. $G_+ + G_+ \subset G_+$,
2. $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$,
3. $G_+ \cup (-G_+) = G$ 　および
4. $G_+ = \overline{int(G_+)}$ (i.e., G_+ はその内部の閉包と等しい).

$\pi_\alpha(x), x \in \mathcal{M}^\alpha(E)$ および $\lambda(g), g \in G_+$ が生成する σ-弱閉部分環を $\mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+$ と表す. また, $\pi_{\hat{\alpha}}(X), X \in \mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+$ および $\lambda(\gamma), \gamma \in \hat{G}$ が生成する σ-弱閉部分環を $(\mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ と表す.

定理. G を正半群 G_+ をもつ順序付き局所コンパクト可換群, $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする. α を G の $\mathcal{M}$ への連続作用とする. このとき, $\hat{G}$ の各閉半群 E に対して, $(\mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ は $\mathcal{M}^\alpha(E)$ と $L^2(G)$ 上の下半三角作用素環のテンソル積 $\mathcal{M}^\alpha(E) \overline{\otimes} LT(L^2(G))$ に同型である.

幾つかの命題, 補題を積み重ねることによって定理の証明の概略を述べよう. ただし, 竹崎双対定理の良く知られている整理された証明を, ほぼそのまま, なぞって行くだけである.

$(\mathcal{M}, G, \alpha)$ の正則共変表現を考えることにより, G の $\mathcal{H}$ 上の強連続ユニタリ表現 V が存在して $\alpha_g = Ad(V_g)$ であると仮定して良い.

$L^2(G, \mathcal{H})$ 上のユニタリ作用素 U を以下で定義する;

$$(U\xi)(g) = V_g \xi(g), \quad \xi \in L^2(G, \mathcal{H}).$$

また, $L^2(\hat{G}, L^2(G,\mathcal{H}))$ 上のユニタリ作用素 U' を以下で定義する;

$$(U'f)(\gamma) = \mu(\gamma)f(\gamma), \quad f \in L^2(\hat{G}, L^2(G,\mathcal{H})).$$

このとき, 次の関係が成り立つ;

$$\begin{aligned} Ad(U)(\pi_\alpha(x)) &= x \otimes 1, \quad x \in \mathcal{M} \\ Ad(U)(\lambda(g)) &= V_g \otimes \lambda_g, \quad g \in G \\ Ad(U')(\pi_{\hat{\alpha}}(X)) &= X \otimes 1, \quad X \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G \\ Ad(U')(\lambda(\gamma)) &= \mu(\gamma) \otimes \lambda_\gamma, \quad \gamma \in \hat{G}. \end{aligned}$$

ここで, λ_g および μ_γ は以下で定義される $L^2(G)$ 上のユニタリ作用素である;

$$\begin{aligned} (\lambda_g \xi)(h) &= \xi(h-g), \quad \xi \in L^2(G), \quad h \in G \\ (\mu_\gamma \xi)(h) &= \overline{\langle h, \gamma \rangle} \xi(h), \quad \xi \in L^2(G), \quad h \in G. \end{aligned}$$

命題 1. $(\mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ は, $\mathcal{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(\hat{G})$ 上の

$$\{x \otimes 1 \otimes 1, V_g \otimes \lambda_g \otimes 1, 1 \otimes \mu_\gamma \otimes \lambda_\gamma ; x \in \mathcal{M}^\alpha(E), g \in G_+, \gamma \in \hat{G}\}.$$

で生成される σ-弱閉環 $\mathfrak{A}_1$ に空間的に同型である.

証明. $(\mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ は, $Ad(U')$ によって, $\mathcal{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(\hat{G})$ 上の

$$\{X \otimes 1, 1 \otimes \mu_\gamma \otimes \lambda_\gamma ; X \in \mathcal{M}^\alpha(E) \rtimes_\alpha G_+, \gamma \in \hat{G}\}.$$

で生成される σ-弱閉環 $\mathfrak{A}_0$ に空間的に同型である. さらに, $\mathfrak{A}_0$ は, $Ad(U \otimes 1)$ によって, $\mathfrak{A}_1$ に空間的に同型である. ∎

$L^2(\hat{G})$ から $L^2(G)$ への Fourier-Plancherel 変換を $\mathcal{F}$ と表す. このとき, 以下の関係が成り立つ;

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \lambda_\gamma \mathcal{F}^* &= \mu_\gamma, \quad \gamma \in \hat{G} \\ \mathcal{F} \mu_g \mathcal{F}^* &= {\lambda_g}^*, \quad g \in G. \end{aligned}$$

命題 2. $\mathfrak{A}_1$ は, $Ad(1 \otimes 1 \otimes \mathcal{F}^*)$ によって, $\mathcal{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(G)$ 上の

$$\{x \otimes 1 \otimes 1, V_g \otimes \lambda_g \otimes 1, 1 \otimes \mu_\gamma \otimes \mu_\gamma ; x \in \mathcal{M}^\alpha(E), g \in G_+, \gamma \in \hat{G}\}.$$

で生成される σ-弱閉環 $\mathfrak{A}_2$ に空間的に同型である.

$L^2(G \times G)$ 上のユニタリ作用素 W を以下で定義する;

$$(W\xi)(g,h) = \xi(g+h, h), \quad \xi \in L^2(G \times G).$$

このとき, 次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} W^*(\lambda_g \otimes 1)W &= \lambda_g \otimes 1, \quad g \in G \\ W^*(\mu_\gamma \otimes \mu_\gamma)W &= \mu_\gamma \otimes 1, \quad \gamma \in \hat{G}. \end{aligned}$$

命題 3. $\mathfrak{A}_2$ は, $Ad(1 \otimes W^*)$ によって, $\mathcal{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(G)$ 上の σ-弱閉環 $\mathfrak{A}_3 \overline{\otimes} \mathbb{C}1$ に空間的に同型である, ここで $\mathfrak{A}_3$ は $\mathcal{H} \otimes L^2(G)$ 上の

$$\{x \otimes 1, V_g \otimes \lambda_g, 1 \otimes \mu_\gamma; x \in \mathcal{M}^\alpha(E), g \in G_+, \gamma \in \hat{G}\}.$$

によって生成される σ-弱閉環である.

補題 4. $U^*(\mathcal{M}^\alpha(E) \overline{\otimes} L^\infty(G))U = \mathcal{M}^\alpha(E) \overline{\otimes} L^\infty(G)$.

証明. $U^*(\mathcal{M} \overline{\otimes} L^\infty(G))U = \mathcal{M} \overline{\otimes} L^\infty(G)$ であることはよく知られている. G の $\mathcal{M} \overline{\otimes} L^\infty(G)$ 上の作用 β を, $\beta_g = \alpha_g \otimes id.$ によって定まるものとする, このとき, $(\mathcal{M} \overline{\otimes} L^\infty(G))^\beta(E) = \mathcal{M}^\alpha(E) \overline{\otimes} L^\infty(G)$. 各 $x \in \mathcal{M}, \xi \in L^2(G, \mathcal{H})$ および $h \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}
(\beta_g(U(x \otimes 1)U^*)\xi)(h) &= ((V_g \otimes id.)(U(x \otimes 1)U^*)(V_g^* \otimes id.)\xi)(h) \\
&= V_g V_h x V_h^* V_g^* \xi(h) \\
&= V_h \alpha_g(x) V_h^* \xi(h) \\
&= (U(\alpha_g(x) \otimes 1)U^* \xi)(h).
\end{aligned}$$

ゆえに $\beta_g(U(x \otimes 1)U^*) = U(\alpha_g(x) \otimes 1)U^*, g \in G$. 従って, 各 $f \in L^1(G)$ に対して, $\beta_f(U(x \otimes 1)U^*) = 0$ であることは $\alpha_f(x) = 0$ であることと同値. ゆえに $Sp_\beta(U(x \otimes 1)U^*) = Sp_\alpha(x)$. これより $U^*(\mathcal{M}^\alpha(E) \overline{\otimes} L^\infty(G))U \supset \mathcal{M}^\alpha(E) \overline{\otimes} L^\infty(G)$. 逆の包含関係も同様. ∎

$\mathbb{T}$ をトーラス群 $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ とする. $\mathbb{T}$ の $B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ への作用 α を以下で定義されるものとする; $\alpha_\gamma = Ad(\mu_\gamma), \gamma \in \mathbb{T}$.

命題 5. $T \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ に対して, 以下の条件は互いに同値;

1. $(T\xi_k | \xi_j) = 0, \quad j < k$
2. T は
$$\{\lambda_n, \mu_\gamma; n \in \mathbb{Z}_+, \gamma \in \mathbb{T}\}$$
で生成される σ-弱閉環 $\mathfrak{A}$ に属する
3. T はスペクトル部分空間 $B(\ell^2(\mathbb{Z}))^\alpha(\mathbb{Z}_+)$ に属する.

前命題が, 順序付き可換群 G に対する下半三角作用素の定義を自然に導く. この定義は, もちろん, 新しいものではない.

定義. G を正半群 G_+ をもつ順序付き局所コンパクト可換群とする. $\hat{G}$ の $B(L^2(G))$ への作用 α が以下で定義されるものとする; $\alpha_\gamma = Ad(\mu_\gamma), \gamma \in \hat{G}$. $L^2(G)$ 上の有界線型作用素 T が下半三角であるとは, T が

$$\{\lambda_g, \mu_\gamma; g \in G_+, \gamma \in \hat{G}\}.$$

で生成される σ-弱閉環に属するときをいう. $L^2(G)$ 上の下半三角作用素全体を $LT(L^2(G))$ と表す.

定理の証明. $\mathfrak{A}_3$ がテンソル積 $\mathcal{M}^\alpha(E)\,\overline{\otimes}\,LT(L^2(G))$ と同型であることを示せば十分. $U^*\mathfrak{A}_3U$ は $\mathcal{H}\otimes L^2(G)$ 上の

$$U^*\{x\otimes 1, 1\otimes\mu_\gamma; x\in\mathcal{M}^\alpha(E), \gamma\in\hat{G}\}U \quad \text{および} \quad U^*\{V_g\otimes\lambda_g; g\in G_+\}U.$$

で生成された σ-弱閉環である. $\{\mu_\gamma;\gamma\in\hat{G}\}$ は掛算作用素環 $L^\infty(G)$ を生成するから, $U^*\mathfrak{A}_3U$ は

$$U^*(\mathcal{M}^\alpha(E)\,\overline{\otimes}\,L^\infty(G))U \quad \text{および} \quad U^*\{V_g\otimes\lambda_g; g\in G_+\}U.$$

で生成される. 補題 4 より, $U^*\mathfrak{A}_3U$ は

$$\mathcal{M}^\alpha(E)\,\overline{\otimes}\,L^\infty(G) \quad \text{および} \quad \{1\otimes\lambda_g; g\in G_+\},$$

で生成され, $\mathcal{M}^\alpha(E)\,\overline{\otimes}\,LT(L^2(G))$ となる. ∎

系. $(\mathcal{M},\mathbb{R},\alpha)$ を W*-力学系とし, $H^\infty(\alpha)$ を α によって定まる $\mathcal{M}$ の解析的部分環とする. このとき,

$$(H^\infty(\alpha)\rtimes_\alpha\mathbb{R}_+)\rtimes_{\hat{\alpha}}\mathbb{R} = H^\infty(\alpha)\,\overline{\otimes}\,LT(L^2(\mathbb{R})).$$

Acknowledgements. 著者は, 高井博司先生から幾つかのコメントをいただいております。この場を借りて感謝致します。

References

[A] Arveson, W., On groups of automorphisms of operator algebras, J. Functional Analysis, vol.15, 1974, 217–243

[S] Strătilă, S., *Modular Theory in Operator Algebras*, Abacus Press, Tunbridge Wells, England, 1981

[Th] Takai, H., On a duality for crossed products of C*-algebras, J. Functional Analysis, vol.19, 1975, 25–39

[Tm] Takesaki, M., Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math., vol.131, 1973, 249–310