数理解析研究所講究録
1479 巻 2006 年 103-118

半空間を基準にした等方性弾性方程式に対する散乱理論における散乱核の表示について

広島大・理　川下　美潮 (Kawashita, Mishio)
Graduate School of Science, Hiroshima University

川下　和日子 (Kawashita, Wakako)

茨城大・教育　曽我　日出夫 (Soga, Hideo)
Faculty of Education, Ibaraki University

1　序

地震波に代表される弾性体を伝わる波はいわゆる弾性波動方程式に従う。領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ は 密度 $\rho(\mathbf{x})>0$ の弾性体を、$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})={}^t(u_1(t,\mathbf{x}),u_2(t,\mathbf{x}),u_3(t,\mathbf{x}))$ は弾性体の各点 $\mathbf{x}\in\Omega$ の時刻 t における変位を表すものとする。Ω の境界で弾性体に及ぼされる外力がない場合、$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ は次の混合問題に支配される。

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (\rho(\mathbf{x})\partial_t^2-\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}}))\mathbf{u}(t,\mathbf{x})=\mathbf{0} & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega, \\ \mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u}(t,\mathbf{x})=\mathbf{0} & \text{on } \mathbb{R}\times\partial\Omega, \\ \mathbf{u}(0,\mathbf{x})=\mathbf{f}_1(\mathbf{x}),\ \partial_t\mathbf{u}(0,\mathbf{x})=\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

上で $\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u}=\sum_{i,j=1}^3\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_{x_j}\mathbf{u})$、$\mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u}=\sum_{i,j=1}^3\nu_i a_{ij}(\mathbf{x})\partial_{x_j}\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ (ただし $\nu={}^t(\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3)$ は $\partial\Omega$ の単位外向き法線ベクトル) である。また各 $a_{ij}(\mathbf{x})$ (3×3 実行列) の各 (p,q) 成分 $a_{ipjq}(\mathbf{x})$ はフックの法則に現れる係数で、弾性体のもつ物理的な性質はこの各係数がもつ性質によって数学的に表現される。

この報告では等方性弾性体、すなわち $a_{ipjq}(\mathbf{x})$ が次で与えられる 3×3 行列とする。

$$a_{ipjq}(\mathbf{x})=\lambda(\mathbf{x})\delta_{ip}\delta_{jq}+\mu(\mathbf{x})(\delta_{ij}\delta_{pq}+\delta_{iq}\delta_{jp}).$$

上で $\lambda(\mathbf{x})$ and $\mu(\mathbf{x})$ は Lamé 係数であり、δ_{ij} は Kronecker のデルタである。以下、常に Ω の境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級であるとし、$\rho,\,\lambda,\,\mu\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ かつ

$$\inf_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}\rho(\mathbf{x})>0,\quad \inf_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}(\lambda(\mathbf{x})+2\mu(\mathbf{x})/3)>0,\quad \inf_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}\mu(\mathbf{x})>0.$$

を満たすとする。さらに、ある定数 $R_0>0,\,\rho_0,\,\lambda_0,\,\mu_0\in\mathbb{R}$ で

$$\partial\Omega\cap(B_{R_0})^c=\partial\mathbb{R}^3_+\cap(B_{R_0})^c,$$
$$\rho(\mathbf{x})=\rho_0,\,\lambda(\mathbf{x})=\lambda_0,\,\mu(\mathbf{x})=\mu_0\quad({}^\forall\mathbf{x}\in(B_{R_0})^c)$$

となるものが存在するとする。但し、$B_{R_0}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3;|\mathbf{x}|<R_0\}$, $\mathbb{R}^3_+=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3_+;\mathbf{x}={}^t(x_1,x_2,x_3),x_3\geq 0\}$ である。また、$\rho(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ がそれぞれ ρ_0, λ_0, μ_0 の場合の $\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})$、$\mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})$ をそれぞれ $\mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{x}})$、$\mathcal{N}_0(\partial_{\mathbf{x}})$ と表す。

(1.1) に関する散乱問題を考える。この場合の自由な系は Ω が半空間 $\mathbb{R}^3_+$ で $\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})$, $\mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})$ がそれぞれ $\mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{x}})$, $\mathcal{N}_0(\partial_{\mathbf{x}})$ の場合のときの (1.1) で与えられる。双曲型方程式に関する散乱問題の定式化は大きく分けて、Wilcox [13] によるものと Lax-Phillips [6] によるものとの2種類あるが、ここでは Lax-Phillips による定式化を考える。そのために必要な自由な系に対する考察は既に M. Kawashita, W. Kawashita and Soga [3] で与えられている。(1.1) に対する散乱問題の Lax-Phillips 式の定式化については、奇数次元空間におけるスカラー値波動方程式に対する Morawetz[9] の議論（の弱い形）による波の分解を用いた Ikawa[1] による波動作用素の構成法を用いることにより示すことができる ([4] 参照)。半空間からの散乱問題の場合、対応する自由な系に対しても Huygens の原理が成り立たないので、[1] の議論をそのまま用いることは出来ない。しかし、[3] で与えられた Lax-Phillips 式の定式化における基本的な道具立てである自由な系に対する並進表現 (translation representation) や outgoing(または incoming) subspace の性質を用いることによりこの不都合を回避することができる ([4] 参照)。

Lax-Phillips [6] と同様にして、(1.1) に対する並進表現を用いて散乱作用素を導入する。散乱作用素の超関数核を散乱核と呼ぶ。スカラー値波動方程式の外部 Dirichlet 問題に対し、Majda [8] は ω 方向に進む入射平面波 $\delta(t-x\cdot\omega)$ に対する散乱波を用いて散乱核を表示する公式を与えた (§5, 注意 5.2 の (2) 参照)。この表示公式はある種の散乱逆問題を考えるのに有効である。

(1.1) に対しても散乱核の表示公式を与えることができる (定理 5.1 参照)。そのためには上記の入射平面波と散乱波に対応するものを求めなければならない。これは §4 で扱う。(1.1) に対しては境界上を伝わる表面波が存在するので、スカラー値波動方程式における入射波に相当する波の選び方についても改めて考え直さなくてはならない。さらに散乱波を決定するためには、いわゆる outgoing condition が必要になるが、スカラー値波動方程式に対する outgoing(または incoming) condition を (1.1) の場合にそのまま用いることは出来ない。通常の outgoing(または incoming) condition では表面波を含む場合の散乱波に相当する波を特徴付けることができないからである。このように、表面波に対応した解の一意性を保証する新たな条件の導入が必要になる。スカラー値波動方程式の場合は入射平面波、および入射平面波と散乱波を加えたものは、それぞれ自由な系、摂動系における一般化された固有関数の（逆）Fourier 像であるという特

徴を持っている。この事実に着目して、一般化された固有関数の Fourier 像を得るという立場に立てば、どのような条件を表面波に対応した解の一意性のための条件として導入すれば良いかが分かる。

散乱核の表示公式は初め Majda [8] によって与えられ、その後、Soga [11] により証明が改良された。この方法で Soga [12] は弾性方程式の外部問題の場合にも同様の表示公式を示した。これらの仕事における手法は時空間上の問題を直接扱うというものである。この時間に依存した方法は直感的には把握しやすいが、弾性方程式に対しては外部問題であってもかなり複雑になる。(1.1) に対してはそれ以上に複雑になることが予想されるので、この方法で扱うのは困難であると思われる。一方、表示公式を示す方法としては、時間によらない方程式、すなわち、(1.1) を時間に関して Laplace 変換したもの、を経由して行う方法がある。こちらは比較的容易に行うことができる（例えば、外部領域による散乱問題の場合は [2] 参照)。§5 では、時間によらない方法で表示公式を得ることを考える。なお、この着想の元は、Lax and Phillips [6], [7] が散乱振幅の表示を得る際に既に与えていることに注意する。

2 散乱問題の定式化と並進表現

初期データ $\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ に対する (1.1) の解 $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ に対して、写像 $U(t)$ を $U(t)\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{u}(t,\mathbf{x}), \partial_t\mathbf{u}(t,\mathbf{x}))$ で定める。エネルギー保存法則により $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は H 上の unitary 群に拡張できる。但し、$H = \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ は

$$\left(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}\right)_H = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_{x_j}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \partial_{x_i}\mathbf{g}_1(\mathbf{x})\right)_{\mathbb{C}^3} + \rho(\mathbf{x})\left(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\right)_{\mathbb{C}^3} \right\} d\mathbf{x},$$
$$({}^\forall\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \quad {}^\forall\vec{\mathbf{g}} = {}^t(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \in H)$$

を内積に持つ Hilbert 空間であり、$\dot{H}^m(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H^m_{loc}(\Omega); \partial^\alpha_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \in L^2(\Omega) \quad (1 \le |{}^\forall\alpha| \le m), \lim_{r\to\infty} r^{-2}\int_{r\le|\mathbf{x}|\le 2r} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0\}$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ である。$\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ の生成作用素 L は

$$L\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_2, (\rho(\mathbf{x}))^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})\mathbf{f}_1) \qquad \vec{\mathbf{f}} \in D(L) = \dot{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$$

で与えられる。但し、$\dot{H}^2_{\mathcal{N}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \dot{H}^2(\Omega); \mathcal{N}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}$ で $H^m(\Omega)$ は通常の Sobolev 空間である。自由な系に対しても上と同様にして Hilbert 空間 H_0 および unitary 群 $\{U_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を定めることができる。

自由な系 $\{U_0(t)\}$ に対する並進表現 T_0 は $B(H_0, L^2(\mathbb{R}; L^2(S^2_\alpha)))$ に属する 5 つの作用素 $T_{0,\alpha}$ $(\alpha \in \Lambda = \{P,\ SV,\ SVO,\ SH, R\})$ を用いて $T_0 = {}^t(T_{0,P},\ T_{0,SV},\ T_{0,SVO},$

$T_{0,SH}$, $T_{0,R}$) と表される。ここに、$S_P^2 = S_{SH}^2 = S_+^2 = \{\omega = {}^t(\omega', \omega_3) \in S^2\,;\,\omega_3 \geq 0\}$, $S_{SV}^2 = \{\omega \in S_+^2\,;\,|\omega'| \leq \frac{c_S}{c_P}\}$, $S_{SVO}^2 = \{\omega \in S_+^2\,;\,|\omega'| \geq \frac{c_S}{c_P}\}$, $S_R^2 = \{\zeta \in R^2\,;\,|\zeta| = 1\}$ であり、$B(X,Y)$ は Banach 空間 X, Y に対し、X から Y への有界線形作用素の作る集合を表す。上で $c_P = \sqrt{\rho_0^{-1}(\lambda_0 + 2\mu_0)}$, $c_S = \sqrt{\rho_0^{-1}\mu_0}$ はそれぞれ縦波、横波の伝播速度を表す。以下、$N = \oplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(S_\alpha^2)$ とおく。$2^{-1}(2\pi)^{-1}T_0 \in B(H_0, L^2(\mathbb{R}; N))$ は unitary 作用素、すなわち T_0 は全単射であり $\|T_0\vec{\mathbf{f}}\|_{L^2(\mathbb{R};N)}^2 = 4(2\pi)^2\|\vec{\mathbf{f}}\|_{H_0}^2$ ($^\forall\vec{\mathbf{f}} \in H_0$) を満たす。さらに

$$T_0(U_0(t)\vec{\mathbf{f}})(s) = T_0\vec{\mathbf{f}}(s-t) \qquad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, {}^\forall\vec{\mathbf{f}} \in H_0)$$

が成り立つ。このように T_0 は $U_0(t)$ の作用を $L^2(\mathbb{R}; N)$ の平行移動に移すので $\{U_0(t)\}$ の並進表現と呼ばれている (T_0 の構成や性質については [3] 参照)。

(1.1) に対する並進表現 $T^\pm : H \to L^2(\mathbb{R}; N)$ は $T^\pm = T_0W_\pm$ で与えることができる ([4] 参照)。但し、$W_\pm$ は波動作用素 (wave operators) であり、

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} U(-t)J_\psi U_0(t)$$

で定義されるものである。上で、$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $0 \leq \psi \leq 1$, $|\mathbf{x}| > R_0 + 4/3$ のとき $\psi(\mathbf{x}) = 1$, $|\mathbf{x}| < R_0 + 1$ のとき $\psi(\mathbf{x}) = 0$ をみたすものであり、$J_\psi\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\psi\mathbf{f}_1, \psi\mathbf{f}_2)$ である。$W_\pm \in B(H_0, H)$ は unitary 作用素で、$U(t)W_\pm = W_\pm U_0(t)$ をみたす。よって $T^\pm$ は $\{U(t)\}$ の並進表現である。$T^\pm$ に対応する outgoing (incoming) 部分空間、すなわち

(i) $U(t)D_\pm \subset D_\pm$, $(\pm{}^\forall t > 0)$, (ii) $\cap_{t\in\mathbb{R}} U(t)D_\pm = \{0\}$,
(iii) $\cup_{t\in\mathbb{R}} U(t)D^\pm$ は H で稠密である,

を満たす閉部分空間 $D_+ \subset H$ ($D_- \subset H$) は $D_\pm = W_\pm(D_\pm^0)$ で与えられる。但し、$D_\pm^0$ は自由な系における並進表現 T_0 に対する outgoing (incoming) 部分空間である。

3 スペクトル表現

$Fk(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma}k(s)ds$ を $k \in L^2(\mathbb{R}; N)$ に対する Fourier 変換とする。$\mathcal{T}_0 = F^{-1}T_0$, $\mathcal{T}^\pm = F^{-1}T^\pm$ をそれぞれ $\{U_0(t)\}$, $\{U(t)\}$ に対するスペクトル表現という。スペクトル表現は $\mathcal{T}^\pm \in B(H, L^2(\mathbb{R}; N))$ は全単射であり、$\|\mathcal{T}\vec{\mathbf{f}}\|_{L^2(\mathbb{R};N)}^2 = 4(2\pi)\|\vec{\mathbf{f}}\|_H^2$ かつ

$$\mathcal{T}^\pm(U(t)\vec{\mathbf{f}})(\sigma) = e^{i\sigma t}\mathcal{T}^\pm\vec{\mathbf{f}}(\sigma) \qquad ({}^\forall\sigma \in \mathbb{R}, {}^\forall\vec{\mathbf{f}} \in H)$$

を満たす ($\mathcal{T}_0$ については H, $U(t)$ をそれぞれ H_0, $U_0(t)$ としたものが成り立つ)。

自由な系に対するスペクトル表現 $\mathcal{T}_0 = {}^t(\mathcal{T}_{0,P}, \mathcal{T}_{0,SV}, \mathcal{T}_{0,SVO}, \mathcal{T}_{0,SH}, \mathcal{T}_{0,R})$ は

$$(\mathcal{T}_{0,\alpha}\vec{\mathbf{f}})(\sigma,\omega) = -2(2\pi)^{-1}\rho_0^{-1/2}c_\alpha^{-3/2}(\vec{\mathbf{f}}, \Psi_0^\alpha(\cdot;\sigma,\omega))_{\mathcal{H}_0},$$
$$({}^\forall\vec{\mathbf{f}} \in \mathcal{Y}_4^0,\ {}^\forall\sigma \in \mathbb{R},\ {}^\forall\omega \in S_\alpha^2 \qquad ({}^\forall\alpha \in \Lambda))$$

で与えられる。但し、$c_{SV} = c_{SVO} = c_{SH} = c_S$ であり、$0 < c_R (< c_S < c_P)$ は Rayleigh 波の伝播速度である。また、

$$\mathcal{Y}_{s_0}^0 = \{\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\,;\, \langle\cdot\rangle^{s_0}\mathbf{f}_1(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}_+^3),\ \langle\cdot\rangle^{s_0}\mathbf{f}_2 \in \mathcal{H}_0\}, \qquad \langle\mathbf{x}\rangle = (1+|\mathbf{x}|^2)^{1/2},$$
$$\Psi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega) = {}^t(\phi_0^\alpha(\mathbf{x};-\sigma,\omega), i\sigma\phi_0^\alpha(\mathbf{x};-\sigma,\omega))$$

である。上で $\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ $(\alpha \in \Lambda)$ は自由な系における一般化された固有関数であり、次で与えられる（詳しくは [3] 参照)。$\phi_0^R(\mathbf{x};\sigma,\zeta)$ は Rayleigh 波を表すもので、

$$\phi_0^R(\mathbf{x};\sigma,\zeta) = \sqrt{2\pi\rho_0}C_0^R e^{i\sigma c_R^{-1}\zeta\cdot\mathbf{x}'}\sum_{j=1}^{2} C_j^R e^{-|\sigma|c_R^{-1}\xi_R^{(j)}x_3}\mathbf{a}_R^{(j)}(\sigma,\zeta)$$

で与えられる。但し、$\xi_R^{(1)} = \sqrt{1-(c_R/c_P)^2}$, $\xi_R^{(2)} = \sqrt{1-(c_R/c_S)^2}$, $C_1^R = 2-(c_R/c_S)^2$, $C_2^R = -2\xi_R^{(1)}$, $\mathbf{a}_R^{(1)}(\sigma,\zeta) = {}^t(\zeta, \frac{i\sigma}{|\sigma|}\xi_R^{(1)})$, $\mathbf{a}_R^{(2)}(\sigma,\zeta) = {}^t(\xi_R^{(2)}\zeta, \frac{i\sigma}{|\sigma|})$ で、定数 $C_0^R > 0$ は $|\sigma|(2\pi\rho_0 c_R)^{-1}\int_0^\infty |\phi_0^R(\mathbf{x};\sigma,\zeta)|^2 dx_3 = 1$ を満たすように選ばれもので、c_P, c_S, c_R のみに依存する定数である。

それ以外のもの、すなわち $\alpha \in \Lambda' = \Lambda \setminus \{R\}$ のときは反射現象から起こる波を表し、$\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega) = \phi_0^{\alpha,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) + \phi_0^{\alpha,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ ($\phi_0^{\alpha,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ が入射波、$\phi_0^{\alpha,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ が反射波を表す) の形をしている。特に $\phi_0^{SVO}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ は全反射現象を表し、それ以外の $\phi_0^P(\mathbf{x};\sigma,\omega)$, $\phi_0^{SV}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$, $\phi_0^{SH}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ は通常の反射現象を表す。各入射波 $\phi_0^{\alpha,i} = \phi_0^{\alpha,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ $(\alpha \in \Lambda',\ \sigma \in \mathbb{R}, \omega \in S_\alpha^2)$ は

$$\begin{aligned}
\phi_0^{P,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= e^{i\sigma c_P^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_P(\check{\omega}),\ \phi_0^{SVO,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = \frac{\Delta_+^{SVO}(\sigma,\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}e^{i\sigma c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\check{\omega}),\\
\phi_0^{SV,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= e^{i\sigma c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\check{\omega}),\quad \phi_0^{SH,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = e^{i\sigma c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SH}(\check{\omega})
\end{aligned}$$

で与えられる。但し、$\check{\omega} = {}^t(\omega_1,\omega_2,-\omega_3)$, $\omega' = {}^t(\omega_1,\omega_2)$, $\mathbf{a}_P(\xi) = \xi = {}^t(\xi',\xi_3)$, $\mathbf{a}_{SV}(\xi) = {}^t(-\frac{\xi_3}{|\xi'|}\xi', |\xi'|)$, $\mathbf{a}_{SH}(\xi) = \frac{1}{|\xi'|}{}^t(-\xi_2,\xi_1,0)$,

$$\begin{aligned}
\Delta_\pm^{SVO}(\sigma,\omega) &= (\frac{c_P}{c_S})^2\left(1-2|\omega'|^2\right)^2 \pm 4\frac{i\sigma}{|\sigma|}\frac{c_P}{c_S}|\omega'|^2\omega_3\eta(\omega),\ \eta(\omega) = \sqrt{(\frac{c_P}{c_S})^2|\omega'|^2-1},\\
\Delta^{SVO}(\omega) &= |\Delta_\pm^{SVO}(\sigma,\omega)| = \sqrt{(\frac{c_P}{c_S})^4(1-2|\omega'|^2)^4 + 16(\frac{c_P}{c_S})^2|\omega'|^4\omega_3^2\eta(\omega)^2}
\end{aligned}$$

である。各反射波 $\phi_0^{\alpha,r}=\phi_0^{\alpha,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ は次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\phi_0^{P,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= -\frac{\Delta_-^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)}e^{i\sigma c_P^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_P(\omega)-\frac{\tilde{\Delta}^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)}e^{i\sigma c_S^{-1}\xi^P(\omega)\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\xi^P(\omega)),\\
\phi_0^{SV,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= -\frac{\tilde{\Delta}^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)}e^{i\sigma c_P^{-1}\xi^{SV}(\omega)\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_P(\xi^{SV}(\omega))-\frac{\Delta_-^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)}e^{i\sigma c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\omega),\\
\phi_0^{SH,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= e^{i\sigma c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SH}(\omega),\\
\phi_0^{SVO,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= -\frac{\tilde{\Delta}^{SVO}(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}e^{i\sigma c_S^{-1}\omega'\cdot\mathbf{x}'}e^{-|\sigma|c_P^{-1}\eta(\omega)x_3}\mathbf{a}_P(\xi^{SVO}(\sigma,\omega))\\
&\qquad -\frac{\Delta_-^{SVO}(\sigma,\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}e^{i\sigma c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\omega),
\end{aligned}
$$

但し $\mathbf{x}'={}^t(x_1,x_2)$, $\xi^P(\omega)={}^t\left(\frac{c_S}{c_P}\omega',\xi_3^P(\omega)\right)$, $\xi^{SV}(\omega)={}^t\left(\frac{c_P}{c_S}\omega',\xi_3^{SV}(\omega)\right)$, $\xi^{SVO}(\sigma,\omega)={}^t\left(\frac{c_P}{c_S}\omega',\frac{i\sigma}{|\sigma|}\eta(\omega)\right)$, $\xi_3^P(\omega)=\sqrt{1-(\frac{c_S}{c_P})^2|\omega'|^2}$, $\xi_3^{SV}(\omega)=\sqrt{1-(\frac{c_P}{c_S})^2|\omega'|^2}$,

$$
\begin{aligned}
\Delta_\pm^P(\omega) &= (\frac{c_P}{c_S})^2\left(1-2(\frac{c_S}{c_P})^2|\omega'|^2\right)^2\pm 4\frac{c_S}{c_P}|\omega'|^2\omega_3\xi_3^P(\omega),\\
\Delta_\pm^{SV}(\omega) &= (\frac{c_P}{c_S})^2\left(1-2|\omega'|^2\right)^2\pm 4\frac{c_P}{c_S}|\omega'|^2\omega_3\xi_3^{SV}(\omega),\\
\tilde{\Delta}^P(\omega) &= \frac{4c_S}{c_P}\omega_3|\omega'|((\frac{c_P}{c_S})^2-2|\omega'|^2),\quad \tilde{\Delta}^{SV}(\omega)=\tilde{\Delta}^{SVO}(\omega)=-\frac{4c_P}{c_S}\omega_3|\omega'|(1-2|\omega'|^2)
\end{aligned}
$$

である。

$\mathcal{T}^\pm$ に対しては (1.1) に対する一般化された固有関数 $\phi_\pm^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ を用いて表すことが出来る。$\phi_\pm^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ は次を満たすものとして定める。

$$
(3.1)\quad
\begin{cases}
(-(\rho(\mathbf{x}))^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})-\sigma^2)\phi_\pm^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)=0 & \text{in }\Omega,\\
\mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})\phi_\pm^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)=0 & \text{on }\partial\Omega,\\
\phi_+^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)-\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)\ \text{は outgoing condition を満たす、} & \\
\phi_-^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)-\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)\ \text{は incoming condition を満たす。} &
\end{cases}
$$

但し、(3.1) における outgoing (または incoming) condition を満たすとは次が成り立つことを指す。

「$\sigma\in\mathbb{R}$ のある近傍 $O\subset\mathbb{C}$ が存在して、$\phi_\pm^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)-\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ は $\{z\in O;\pm\mathrm{Im}\ z<0\}$（複号同順）を満たす領域に $H^2(\Omega\cap(B_{R_0+2})^c)$-値関数として解析接続できる。」

[5] にあるように、$z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ の場合は

$$
\begin{cases}
(-(\rho(\mathbf{x}))^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})-z^2)\mathbf{v}(\mathbf{x};z)=\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \text{in }\Omega,\\
\mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{v}(\mathbf{x};z)=\mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{on }\partial\Omega
\end{cases}
$$

に対して上の意味での outgoing (または incoming) condition を満たす解が一意的に存在することが示されている。この事実を用いることにより (3.1) を満たす $\phi_\pm^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)$

が一意的に存在することが示される。この $\phi^\alpha_\pm$ を用いれば、自由な系の場合と同様に、$\mathcal{T}^\pm = {}^t(\mathcal{T}^\pm_P, \mathcal{T}^\pm_{SV}, \mathcal{T}^\pm_{SVO}, \mathcal{T}^\pm_{SH}, \mathcal{T}^\pm_R)$ を表すことが出来る ([4] 参照)。

命題 3.1 任意の $\vec{\mathbf{f}} \in \mathcal{Y}_4$ と $\alpha \in \Lambda$ に対して次が成り立つ。

$$(\mathcal{T}^\pm_\alpha \vec{\mathbf{f}})(\sigma, \omega) = -2(2\pi)^{-1}\rho_0^{-1/2}c_\alpha^{-3/2}(\vec{\mathbf{f}}, \Psi^\alpha_\pm(\cdot; \sigma, \omega))_H \qquad (\sigma \in \mathbb{R}, \omega \in S^2_\alpha),$$

但し、$\mathcal{Y}_{s_0} = \{\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\, ;\, \langle\cdot\rangle^{s_0}\mathbf{f}_1(\cdot) \in H^1(\Omega),\, \langle\cdot\rangle^{s_0}\mathbf{f}_2 \in \mathcal{H}\}$ であり $\Psi^\alpha_\pm(\mathbf{x}; \sigma, \omega) = {}^t(\phi^\alpha_\pm(\mathbf{x}; -\sigma, \omega),\, i\sigma\phi^\alpha_\pm(\mathbf{x}; -\sigma, \omega))$ である。

命題 3.1 は $\mathcal{T}^\pm$ の一般化された固有関数（すなわち (1.1) に固有の波）による表現を与える。この表現は散乱核の表示公式を得るための基本的な役割を果たす。

4 一般化された固有関数の Fourier 像

Majda [8] は外部領域 $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ におけるスカラー値波動方程式の Dirichlet 問題に対する散乱核の表示を与えた。そこでは入射波 $\delta(t - \mathbf{x}\cdot\omega)$ に対する散乱波 $w_+(t, \mathbf{x}; \omega)$、すなわち

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)w_+(t, \mathbf{x}; \omega) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}), \\ w_+(t, \mathbf{x}; \omega) = -\delta(t - \mathbf{x}\cdot\omega) & \text{on } \mathbb{R} \times \partial(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}), \\ t < 0 \text{ が十分小さいとき } w_+(t, \mathbf{x}; \omega) = 0 \text{ となる} & \end{cases}$$

の解が用いられていた。(4.1) における最後の条件は過去には境界に入射波が到達していなかったということを表している。この入射波 $\delta(t - \mathbf{x}\cdot\omega)$ は $\mathbb{R}^n$ 上における $-\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j}$ の一般化された固有関数 $e^{i\sigma\omega\cdot\mathbf{x}}$ の（逆）Fourier 像である。また散乱波 $w_+(t, \mathbf{x}; \omega)$ は $\phi_+(\mathbf{x}, \sigma; \omega) - e^{i\sigma\omega\cdot\mathbf{x}}$ の（逆）Fourier 像である。ここに、$\phi_+(\mathbf{x}, \sigma; \omega)$ は outgoing condition を満たす一般化された固有関数、すなわち、スカラー値波動方程式の外部 Dirichlet 問題の場合に対して導入される方程式 (3.1) の outgoing condition を満たす解である。(1.1) に対しても同様の状況になる (§5, 定理 5.1 参照)。この節では §3 で導入された一般化された固有関数 $\phi^\alpha_\pm(\mathbf{x}; -\sigma, \omega)$ の（逆）Fourier 像

$$\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}(t, \mathbf{x}; \omega) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma t}\phi^\alpha_\mp(\mathbf{x}; -\sigma, \omega)d\sigma$$

を求める。

自由な系に対する逆 Fourier 像 $\mathbf{w}^\alpha_0(t, \mathbf{x}; \omega)$ $(= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma t}\phi^\alpha_0(\mathbf{x}; -\sigma, \omega)d\sigma)$ は直接計

算により次で与えられる。

$$\mathbf{w}_0^P(t,\mathbf{x};\omega)=\delta(t-c_P^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_P(\check{\omega})-\frac{\Delta_-^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)}\delta(t-c_P^{-1}\omega\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_P(\omega)$$
$$-\frac{\tilde{\Delta}^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)}\delta(t-c_S^{-1}\xi^P(\omega)\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SV}(\xi^P(\omega)),$$
$$\mathbf{w}_0^{SV}(t,\mathbf{x};\omega)=\delta(t-c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SV}(\check{\omega})-\frac{\Delta_-^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)}\delta(t-c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SV}(\omega)$$
$$-\frac{\tilde{\Delta}^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)}\delta(t-c_P^{-1}\xi^{SV}(\omega)\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_P(\xi^{SV}(\omega)),$$
$$\mathbf{w}_0^{SVO}(t,\mathbf{x};\omega)=\frac{(c_P/c_S)^2(1-2|\omega'|^2)^2}{\Delta^{SVO}(\omega)}\{\delta(t-c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SV}(\check{\omega})$$
$$+\delta(t-c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SV}(\omega)\}$$
$$+\frac{4(c_P/c_S)|\omega'|^2\omega_3\eta(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}\Big\{(Pv\frac{1}{s})|_{s=t-c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\check{\omega})$$
$$+(Pv\frac{1}{s})|_{s=t-c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\omega)\Big\}$$
$$-\frac{\tilde{\Delta}^{SVO}(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}\left\{\begin{pmatrix}\frac{c_P}{c_S}\omega'\\0\end{pmatrix}K_S^+(t,\mathbf{x};\omega)-\begin{pmatrix}0\\\eta(\omega)\end{pmatrix}K_S^-(t,\mathbf{x};\omega)\right\},$$
$$\mathbf{w}_0^{SH}(t,\mathbf{x};\omega)=\delta(t-c_S^{-1}\check{\omega}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SH}(\check{\omega})+\delta(t-c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}_{SH}(\omega),$$
$$\mathbf{w}_0^R(t,\mathbf{x};\omega)=\sqrt{2\pi\rho_0}C_R^0\sum_{j=1}^{2}\left\{C_{j,R}^{(1)}\begin{pmatrix}\omega\\0\end{pmatrix}K_{R,j}^+(t,\mathbf{x};\omega)+C_{j,R}^{(2)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}K_{R,j}^-(t,\mathbf{x};\omega)\right\},$$

但し、上で$K_S^\pm(t,\mathbf{x};\omega)=\pi^{-1}X_S^\pm\{(X_S^+)^2+(X_S^-)^2\}$, $X_S^+=c_P^{-1}\eta(\omega)x_3$, $X_S^-=c_S^{-1}\omega'\cdot\mathbf{x}'-s$, $\eta(\omega)=\sqrt{(c_Pc_S^{-1}\omega')^2-1}$ $(\omega={}^t\omega',\omega_3)\in S_{SVO}^2)$ であり $K_{R,j}^\pm(t,\mathbf{x};\omega)=\pi^{-1}X_{R,j}^\pm((X_{R,j}^+)^2+(X_{R,j}^-)^2)^{-1}$, $X_{R,j}^+=c_R^{-1}\xi_R^{(j)}x_3$, $X_{R,j}^-=c_R^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}'-t$ $(\omega\in S_R^2=S^1)$ である。

$\mathbf{w}_{\pm,tot}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)$ に関しては (3.1) を形式的に Fourier 変換すれば次の方程式を得る。

$$(4.2)\qquad\left\{\begin{array}{ll}(\rho(\mathbf{x})\partial_t^2-\mathcal{A}(x,\partial_\mathbf{x}))\mathbf{w}_{\pm,tot}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=0 & \text{in }\mathbb{R}\times\Omega,\\ \mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_\mathbf{x})\mathbf{w}_{\pm,tot}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=0 & \text{on }\mathbb{R}\times\partial\Omega.\end{array}\right.$$

問題は (3.1) における outgoing (または incoming) condition に対応する条件を求めることにある。

$\mathbf{w}_{\pm,tot}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)$ を次の形で求めることを考える。

$$(4.3)\qquad \mathbf{w}_{\pm,tot}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=\psi(\mathbf{x})\mathbf{w}_0^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)+\tilde{\mathbf{w}}_\pm^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)$$

但し ψ は§2で導入されたものとする。(4.2) より $\tilde{\mathbf{w}}_\pm^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)$ に関する次の方程式を得る。

$$\left\{\begin{array}{ll}(\partial_t^2-(\rho(\mathbf{x}))^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{x},\partial_\mathbf{x}))\tilde{\mathbf{w}}_\pm^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=\mathbf{q}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega) & \text{in }\mathbb{R}\times\Omega,\\ \mathcal{N}(\mathbf{x},\partial_\mathbf{x})\tilde{\mathbf{w}}_\pm^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=\mathbf{m}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega) & \text{on }\mathbb{R}\times\partial\Omega.\end{array}\right.$$

但し $\mathbf{q}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)$, $\mathbf{m}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)$ は次で与えられる。

$$
\left\{\begin{array}{lcl}\mathbf{q}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega) & = & \rho_0^{-1}[\mathcal{A}_0(\partial_\mathbf{x}),\psi]\mathbf{w}_0^\alpha(t,\mathbf{x};\omega),\\ \mathbf{m}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega) & = & -(\mathcal{N}_0(\partial_\mathbf{x})\psi)(\mathbf{x})\mathbf{w}_0^\alpha(t,\mathbf{x};\omega).\end{array}\right. \tag{4.4}
$$

$\alpha = P, SV, SH$ の場合、すなわち、弾性体の内部を伝わる波だけを考えている場合、(4.4) より $\mathbf{q}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=\mathbf{0}$, $\mathbf{m}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=\mathbf{0}$ $(|t|\geq c_R^{-1}(R_0+2))$ である。よってこの場合は $w^+(t,\mathbf{x};\omega)$ と同様、次の条件を考えれば良い。

(4.5) あるある $T_0>0$ が存在して、
$\mp t<-T_0$ のとき $\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}(t,\mathbf{x};\omega)-\psi(\mathbf{x})\mathbf{w}_0^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=\mathbf{0}$ となる。

上の条件は Payley-Wiener の定理から直ちに導くことが出来ることに注意する。一方、$\alpha=SVO, R$ のとき、すなわち全反射現象や Rayleigh 波など表面を伝わる波を含む場合は $\mathbf{q}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=O(t^{-1})$, $\mathbf{m}^\alpha(t,\mathbf{x};\omega)=O(t^{-1})$ までしか分からない。だから (4.5) では解 $\tilde{\mathbf{w}}^\alpha_\pm(t,\mathbf{x};\omega)$ を特徴づけることができない。

この場合は次で特徴付けることができる（[4] 参照)。

定義 4.1 関数 $\mathbf{w}_+(t,\mathbf{x})$ *(または* $\mathbf{w}_-(t,\mathbf{x})$*)* が (+)-条件 *(または* (−)-条件*)* を満たすとはある $T_0>0$ が存在して $\mathbf{w}_\pm\in C^\infty(I^\pm_{T_0};\dot{H}^\infty(\Omega))$, $\partial_t\mathbf{w}_\pm\in C^\infty(I^\pm_{T_0};H^\infty(\Omega))$ （但し、$I^+_{T_0}=(-\infty,-T_0]$, $I^-_{T_0}=[T_0,\infty)$）であり、さらに

$$
\lim_{t\to\mp\infty}\|{}^t(\mathbf{w}_\pm(t,\cdot),\partial_t\mathbf{w}_\pm(t,\cdot))\|_H=0
$$

を満たすことを指す。

定義 4.1 は (4.5) を弱めたものである。すなわち、(4.5) を満たせば定義 4.1 における (±)-条件を満たす。$\alpha=SVO,R$ のときは (4.5) を (±)-条件に替えれば $\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}(t,\mathbf{x};\omega)$ を求めることが出来る。

命題 4.2 任意の $\alpha\in\Lambda$ に対して (4.2) の解 $\tilde{\mathbf{w}}^\alpha_\pm(t,\mathbf{x};\omega)\in C^\infty(\overline{\Omega};\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t))$ で (±)-条件を満たすものがただ一つ存在する。さらに $\tilde{\mathbf{w}}^\alpha_\pm(t,\mathbf{x};\omega)$ を用いて *(4.3)* により $\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}(t,\mathbf{x};\omega)$ を定めると $\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}\in C^\infty(\overline{\Omega};\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t))$ であり $\int_\mathbb{R} e^{-i\sigma t}\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}(t,\mathbf{x};\omega)dt=\phi^\alpha_\mp(\mathbf{x};-\sigma,\,\omega)$ となる。

命題 4.2 によりスカラー値波動方程式の外部問題の場合の入射波と散乱波の和に相当するものが構成できた。命題 4.2 の証明等の詳細は [4] §5 で与えられている。

5 散乱核の表示

Lax and Phillips [6] に従い、散乱作用素 S を §2 で導入された並進表現 $T^{\pm}$ を用いて $S = T^{+}T^{-1}$ で定める。$S \in B(L^2(\mathbb{R};N))$ であるので

$$Sk = {}^t((Sk)_P, (Sk)_{SV}, \cdots, (Sk)_R) = {}^t(\sum_{\beta\in\Lambda} S_{P\beta}k_\beta, \cdots, \sum_{\beta\in\Lambda} S_{R\beta}k_\beta),$$
$$(^\forall k = {}^t(k_P, k_{SV}, \cdots, k_R) \in L^2(\mathbb{R};N))$$

となる。各 $S_{\alpha\beta}$ は $S_{\alpha\beta} \in B(L^2(\mathbb{R};L^2(S^2_\beta)), L^2(\mathbb{R};L^2(S^2_\alpha)))$ であり緩増加超関数核 $S_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega) \in C(S^2_\alpha \times S^2_\beta \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}_\sigma))$ により

$$S_{\alpha\beta}k_\beta(s,\theta) = \delta_{\alpha\beta}k_\beta(s,\theta) + \int_{\mathbb{R}\times S^2_\beta} S_{\alpha\beta}(s-s',\theta,\omega)k_\beta(s',\omega)ds'dS_\omega$$

と表される。上の超関数核を並べてできる行列 $S(s,\theta,\omega) = \left(S_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega)\right)_{\alpha\beta\in\Lambda}$ を散乱核という。

§4 で導入された $\mathbf{w}^\alpha_0(t,\mathbf{x};\omega)$ と $\mathbf{w}^\alpha_{\pm,tot}(t,\mathbf{x};\omega)$ を用いて散乱核の表示を行うことができる。

定理 5.1 $S_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega)$ $(\alpha,\beta\in\Lambda)$ は次の表示を持つ。

$$S_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega) = 2^{-1}(-2\pi i)^{-2}(c_\alpha c_\beta)^{-3/2}\rho_0^{-1}\tilde{S}_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega),$$

但し $\tilde{S}_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega)$ は

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega) &= \int_{\Omega\cap\mathbb{R}^3_+}\int_{\mathbb{R}} \partial_{s'}\mathbf{w}^\alpha_0(s',\mathbf{y};\theta)\cdot(\partial_s^2 - \rho_0^{-1}\mathcal{A}_0(\partial_\mathbf{y}))\mathbf{w}^\beta_+(s'-s,\mathbf{y};\omega)ds'\rho_0 d\mathbf{y} \\ &+ \int_{\partial(\Omega\cap\mathbb{R}^3_+)}\left\{\int_{\mathbb{R}} \partial_{s'}\mathbf{w}^\alpha_0(s',\mathbf{y};\theta)\cdot(\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_\mathbf{y})\mathbf{w}^\beta_+)(s'-s,\mathbf{y};\omega)ds'\right. \\ &\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_\mathbf{y})\partial_{s'}\mathbf{w}^\alpha_0)(s',\mathbf{y};\theta)\cdot\mathbf{w}^\beta_+(s'-s,\mathbf{y};\omega)ds'\right\} dS_\mathbf{y}\end{aligned}$$

で与えられる。上で、$\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_\mathbf{y})$ は $\partial\mathbb{R}^3_+$ 上で $\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_\mathbf{y}) = \mathcal{N}_0(\partial_\mathbf{y})$, $\partial\Omega$ 上で $\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_\mathbf{y})\mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^3 \nu_i(\mathbf{y})a^0_{ij}\partial_{y_j}\mathbf{u}$ で定まるものであり、$\mathbf{a} = {}^t(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{C}^3$ に対して $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 a_j b_j$ である。また $\mathbf{w}^\alpha_+(t,\mathbf{x};\omega) = \mathbf{w}^\alpha_{+,tot}(t,\mathbf{x};\omega) - \mathbf{w}^\alpha_0(t,\mathbf{x};\omega)$ である。

注意 5.2 *(1)* 任意の $\varepsilon > 0$ と $0 < \delta < 1/2$ に対して $(1+t^2)^{-(1+\delta)/2}\partial^\gamma_\mathbf{x}\mathbf{w}^\beta_+ \in C(\overline{\Omega}\times S^2_\beta \to H^{-|\gamma|-3}(\mathbb{R}_t))$ かつ $(1+t^2)^{(1+\delta)/2}\,\partial_s\partial^\gamma_\mathbf{x}\mathbf{w}^\beta_0 \in C(\overline{\mathbb{R}^3_+}\times S^2_\beta \to H^{-3/2-\varepsilon-|\gamma|}(\mathbb{R}_t))$ である。よって $\tilde{S}_{\alpha\beta}$ の表示において現れるすべての s' に関する合成積は *well-defined* である。

(2) Majda [8] による散乱核の表示式 *(n* 次元空間の場合*)* は $c_n = 2(-2\pi i)^{1-n}$ として

$$S(s,\theta,\omega) = c_n \int_{\partial\Omega} \Big\{ (\partial_t \partial_{\nu_{\mathbf{y}}} w_+)(\theta\cdot\mathbf{x} - s, \mathbf{y}; \omega) - \theta\cdot\nu(\partial_t^2 w_+)(\theta\cdot\mathbf{x} - s, \mathbf{y}; \omega) \Big\} dS_{\mathbf{y}}$$

で与えられる。定理 *5.1* における公式と上とは異なっているが、$\int_{\mathbb{R}}(\partial_{s'}^k \delta(s'-\theta\cdot\mathbf{x}))\mathbf{f}(s'-s,\mathbf{x})ds' = (-\partial_s)^k \mathbf{f}(\theta\cdot\mathbf{x} - s, \mathbf{x})$ と $\partial_{s'}\partial_{\nu_{\mathbf{x}}}(\delta(s'-\theta\cdot\mathbf{x})) = -\theta\cdot\nu\partial_{s'}^2(\delta(s'-\theta\cdot\mathbf{x}))$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} S(s,\theta,\omega) = c_n \int_{\partial\Omega} \Big[& \int_{\mathbb{R}} (\partial_{s'}\delta(s'-\theta\cdot\mathbf{x}))\partial_{\nu_{\mathbf{y}}} w_+(s'-s, \mathbf{y}; \omega) ds' \\ & - \int_{\mathbb{R}} \partial_{s'}\partial_{\nu_{\mathbf{x}}}(\delta(s'-\theta\cdot\mathbf{x})) w_+(s'-s, \mathbf{y}; \omega) ds' \Big] dS_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

となる。この形を見れば定理 *5.1* の表示公式は *Majda [8]* のものと対応していることがわかる。

定理 5.1 の証明であるが、外部領域による散乱問題の場合は Majda [8] や Soga [11], [12] にあるような直接的な方法は困難が多いと考えられる。ここでは、散乱作用素を Fourier 変換して得られるもの $\mathcal{S} = F^{-1}SF$ を考え、$\mathcal{S}$ を一般化された固有関数を用いて表示することを考える。この考え方の元は Lax and Phillips [6], [7] が散乱振幅の表示を得る際に既に与えている (外部領域による散乱問題の場合は [2] 参照)。

§3 で導入された $\{U(t)\}$ のスペクトル表現 $\mathcal{T}^{\pm}$ により $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{+}(\mathcal{T}^{-})^{-1}$ と表されるので、$\mathcal{S} \in B(L^2(\mathbb{R};N))$ は unitary 作用素である。さらにスペクトル表現の性質より、$\mathbb{R}$ 上の有界可測関数 ϕ と $k \in L^2(\mathbb{R};N)$ に対して $\mathcal{S}(\phi(\sigma)k(\sigma)) = \phi(\sigma)\mathcal{S}k(\sigma)$ となる。よって Lax and Phillips [6], Chap. II, Corollary 4.2 により、ほとんどすべての $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して unitary 作用素となる $\sigma \in \mathbb{R}$ 上の $B(N)$-値関数 $\mathcal{S}(\sigma)$ で、任意の $k \in L^2(\mathbb{R};N)$ に対して次を満たすものが存在する。

$$(\mathcal{S}k)(\sigma,\theta) = (\mathcal{S}(\sigma)k(\sigma,\cdot))(\theta) \qquad (\text{ほとんどすべての } \sigma \in \mathbb{R} \text{ と } \theta \in S_\alpha^2 \text{ について})$$

この $\mathcal{S}(\sigma)$ を散乱行列と呼んでいる。

$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = F^{-1}S_{\alpha\beta}F$ $(\alpha,\beta \in \Lambda)$ とおく。各 $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ に対して $\mathbb{R}$ 上の $B(L^2(S_\beta^2), L^2(S_\alpha^2))$-値関数 $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\sigma)$ で $\mathcal{S}_{\alpha\beta}k_\beta(\sigma,\theta) = (\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\sigma)k_\beta(\sigma,\cdot))(\theta)$ を満たすものが存在する。$\mathcal{S}(\sigma)$ は各成分を作用素に持つ 5×5 行列 $(\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\sigma))$ として表すことができる。

定理 5.3 散乱行列の各成分 $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\sigma)$ *(*α, $\beta \in \Lambda$*)* は、

$$(\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\sigma)k_\beta(\sigma,\cdot))(\theta) = \delta_{\alpha\beta}k_\beta(\sigma,\theta) + \int_{S_\beta^2} K_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)k_\beta(\sigma,\omega)dS_\omega \quad a.e.\ \sigma \in \mathbb{R}, \theta \in S_\alpha^2$$

と表される（但し $k_\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(S_\beta^2))$ は任意である）。上で

$$
\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega) &= \frac{i}{4\pi}\frac{-\sigma}{2\pi}(c_\alpha c_\beta)^{-3/2}\rho_0^{-1}\tilde{K}_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega),\\
\tilde{K}_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega) &= \int_{\Omega\cap\mathbb{R}^3_+}(-\rho_0^{-1}\mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{y}})-\sigma^2)\mathbf{v}_-^\beta(\mathbf{y};-\sigma,\omega)\cdot\overline{\phi_0^\alpha(\mathbf{y};-\sigma,\theta)}\rho_0 d\mathbf{y}\\
&\quad + \int_{\partial(\Omega\cap\mathbb{R}^3_+)}\Big\{\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_{\mathbf{y}})\mathbf{v}_-^\beta(\mathbf{y};-\sigma,\omega)\cdot\overline{\phi_0^\alpha(\mathbf{y};-\sigma,\theta)}\\
&\qquad - \mathbf{v}_-^\beta(\mathbf{y};-\sigma,\omega)\cdot\tilde{\mathcal{N}}_0(\partial_{\mathbf{y}})\overline{\phi_0^\alpha(\mathbf{y};-\sigma,\theta)}\Big\}\,dS_{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

であり、$\mathbf{v}_-^\beta(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ $(\mathbf{x}\in\Omega\cap\mathbb{R}^3_+)$ は $\phi_-^\beta(\mathbf{x};\sigma,\omega) = \phi_0^\beta(\mathbf{x};\sigma,\omega) + \mathbf{v}_-^\beta(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ で定まるものである。

$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = F^{-1}S_{\alpha\beta}F$ より $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(s,\theta,\omega) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s}K_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)d\sigma$ を得る。これと命題 4.2 より定理 5.1 と定理 5.3 とは互いに同値であることがわかる。このように、散乱核の表示公式を得るためには定理 5.3 を示せば良いことがわかる。定理 5.3 を示すために、散乱行列の作用を一般化された固有関数の関係に置き換えることから始める。

補題 5.4 次の *(i)* と *(ii)* は互いに同値である。

(i) 有界可測関数 $D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)$ $(\alpha,\beta\in\Lambda)$ で、任意の $k = {}^t(k_P,\cdots,k_R)\in C_0^\infty(\mathbb{R};N)$ とほとんどすべての $(\sigma,\theta)\in\mathbb{R}\times S_\alpha^2$ に対して

$$[(\mathcal{S}(\sigma))^* k(\sigma,\cdot)]_\alpha(\theta) = k_\alpha(\sigma,\theta) + \sum_{\beta\in\Lambda}\int_{S_\beta^2} D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)k_\beta(\sigma,\omega)dS_\omega$$

となるものが存在する。

(ii) 有界可測関数 $D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)$ $(\alpha,\beta\in\Lambda)$ で次を満たすものが存在する。

$$\varphi^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\theta) = \mathbf{0} \qquad (\text{すべての } \sigma\in\mathbb{R},\ \theta\in S_\alpha^2,\ \alpha\in\Lambda \text{ に対して}).$$

但し $\varphi^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\theta)$ は $D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)$ から次で定まるものである。

$$
\begin{aligned}
\varphi^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\theta) &= \phi_-^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\theta) - \phi_+^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\theta)\\
&\quad - \sum_{\beta\in\Lambda}\left(\frac{c_\alpha}{c_\beta}\right)^{3/2}\int_{S_\beta^2}\overline{D_{\alpha\beta}(-\sigma,\theta,\omega)}\phi_+^\beta(\mathbf{x};\sigma,\omega)dS_\omega.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{S}^* = \mathcal{T}^-(\mathcal{T}^+)^{-1}$ より補題 5.4 の (i) は次と同値である。

$$\mathcal{T}_\alpha^-\vec{\mathbf{f}}(\sigma,\theta) = \mathcal{T}_\alpha^+\vec{\mathbf{f}}(\sigma,\theta) + \sum_{\beta\in\Lambda}\int_{S_\beta^2} D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)\mathcal{T}_\beta^+\vec{\mathbf{f}}(\sigma,\omega)dS_\omega \qquad (\alpha\in\Lambda).$$

これとスペクトル表現の一般化された固有関数による表示（定理 3.1）から補題 5.4 は直ちに分かる。

補題 5.4 の (ii) により、定理 5.3 を示すためには次を示せばよいことがわかる。

補題 5.5 $D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)$ を $D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)=\overline{K_{\beta\alpha}(\sigma,\omega,\theta)}$ となるように選べば任意の $\mathbf{x}\in\Omega$, $\sigma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\omega\in S^2_\alpha$, $\alpha\in\Lambda$ に対して $\varphi^\alpha(\mathbf{x};\ \sigma,\theta)=\mathbf{0}$ となる。

補題 5.5 は補題 5.4 の (ii) が成り立つことを示している。これと補題 5.4 の (i) は次と同値である。

$$[(\mathcal{S}(\sigma))k(\sigma,\cdot)]_\alpha(\theta)=k_\alpha(\sigma,\theta)+\sum_{\beta\in\Lambda}\int_{S^2_\beta}\overline{D_{\beta\alpha}(\sigma,\omega,\theta)}k_\beta(\sigma,\omega)dS_\omega.$$

以上により、定理 5.3 を得るためには補題 5.5 を示せばよいことが分かる。

補題 5.5 を示すためには、$\varphi^\alpha(\mathbf{x};\ \sigma,\theta)$ が (3.1) における outgoing condition を満たすことを示せばよい。すなわち、補題 5.5 は $D_{\alpha\beta}(\sigma,\theta,\omega)=\overline{K_{\beta\alpha}(\sigma,\omega,\theta)}$ と選べば、$\varphi^\alpha(\mathbf{x};\ \sigma,\theta)$ に入っている incoming な部分を打ち消すことが出来るということを述べている。この打ち消しを行うためには outgoing および incoming 基本解 $G^\pm(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$ の差 $G^+(\mathbf{x},\mathbf{y};z)-G^-(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$ の具体的な形が必要になる。ここで、outgoing(または incoming) 基本解 $G^+(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$, (または $G^-(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$) とは、$\mathbf{f}$ に対して次の方程式

$$\left\{\begin{array}{lll}(-\mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{x}})-z^2)\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x};z)=\mathbf{f}(\mathbf{x}) & & \text{in } \mathbb{R}^3_+,\\ \mathcal{N}_0(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x};z)=\mathbf{0} & & \text{on } \partial\mathbb{R}^3_+,\\ \mathbf{v}^\pm(\cdot;z)\in L^2(\Omega) & \text{for } \pm\mathrm{Im}\ z<0 & \end{array}\right. \tag{5.1}$$

の解 $\mathbf{v}^+(\mathbf{x};z)$(または $\mathbf{v}^-(\mathbf{x};z)$) を対応させる線形作用素の超関数核のことを指す。スカラー値波動方程式の場合、Hankel 関数 $H^{(1)}_\nu(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z)$, $H^{(2)}_\nu(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z)$ を用いて

$$G^+(\mathbf{x},\mathbf{y};z)=-\frac{i}{4}\Big(\frac{z}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\Big)^{n/2-1}H^{(2)}_{\frac{n-2}{2}}(z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$$
$$G^-(\mathbf{x},\mathbf{y};z)=\frac{i}{4}\Big(\frac{z}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\Big)^{n/2-1}H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$$

と表されるので、Bessel 関数の積分表示

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\int_{-1}^1 e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}dt$$

により

$$G^+(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma)-G^-(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma)=\kappa_n(\sigma)\frac{i}{4\pi}\Big(\frac{-\sigma}{2\pi}\Big)^{n-2}\int_{S^{n-1}}e^{i\omega\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}dS_\omega \tag{5.2}$$

を得る。但し、n が奇数のときは $\kappa_n(\sigma)=1$, n が偶数のときは $\kappa_n(\sigma)=-\sigma/|\sigma|$ である。この関係を用いて上記の打ち消しを実行するのが Lax and Phillips [7] の考え方であった（[7] によれば、この考え方は G. Schmidt [10] によるものであるとのことである）。弾性方程式の外部問題の場合は、特殊関数を用いる代わりに $G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$ の Fourier 変換を用いた表示を用いることにより、上記の差を求めることを Poisson 積分の計算を行うことに帰着させた（[2] 参照）。しかし、上記の差を求めるためには $G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$ の具体的な形や表示はさほど必要ない。実は一般化された固有関数による一般化された Fourier 変換を定義するという散乱理論の基本的な考え方から直ちに従う。簡単のためにここでは波動方程式の場合に限定する。

A_0 を $-\Delta$ の $L^2(\mathbb{R}^n)$ における自己共役実現とし、$\{\Pi_0(\lambda)\}$ を A_0 のスペクトル族とする。Stone の定理により

$$(5.3)\qquad \Pi_0(\lambda)=s-\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\sqrt{\lambda}}2\sigma\{(A_0-(\sigma+i\epsilon)^2)^{-1}-(A_0-(\sigma-i\epsilon)^2)^{-1}\}\,d\sigma,$$

である ($A_0\geq 0$ だから $\lambda<0$ のとき $\Pi_0(\lambda)=0$ である)。また、$(\mathcal{F}^0(\sigma)f)(\omega)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\sigma\omega\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ とおく。$e^{i\sigma\omega\cdot\mathbf{x}}$ は A_0 の一般化された固有関数であり、この固有関数に対する一般化された Fourier 変換は $f\mapsto\mathcal{F}^0(\sigma)f$ である。Fourier の反転公式により

$$L^2(\mathbb{R}^n)\ni f\mapsto(2\pi)^{-n/2}\sigma^{(n-1)/2}\mathcal{F}^0(\sigma)f\in L^2([0,\infty);L^2(S^{n-1}))$$

は unitary 作用素であり、A_0 のスペクトル表現を与える（これは、一般化された Fourier 変換の用語で言えば、完全性が成り立つことを意味していることに注意する）。よって

$$(5.4)\quad \left(\Pi_0(\beta)f,g\right)_{L^2(S^2)}=(2\pi)^{-n}\int_0^{\sqrt{\beta}}\left(\mathcal{F}^0(\sigma)f,\mathcal{F}^0(\sigma)g\right)_{L^2(S^{n-1})}d\sigma\quad({}^\forall f,g\in L^2(\mathbb{R}^n))$$

が成り立つ。

極限吸収原理により $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $z\mapsto(A_0-z^2)^{-1}f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\pm\mathrm{Im}\,z\leq 0,\ z\neq 0$ で連続である。この事実と (5.3), (5.4) を合わせると、任意の $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}\Big(s-\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\sigma}{i\pi}\{(A_0-(\sigma+i\epsilon)^2)^{-1}-(A_0-(\sigma-i\epsilon)^2)^{-1}\}f,g\Big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}&\\ =(2\pi)^{-n}\left(\mathcal{F}^0(\sigma)f,\mathcal{F}^0(\sigma)g\right)_{L^2(S^{n-1})}&\end{aligned}$$

を得る。$\mp\mathrm{Im}\,z\leq 0,\ z\neq 0$ のとき $(A_0-z^2)^{-1}f(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^n}G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};z)f(\mathbf{y})d\mathbf{y}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ だから、上は

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\sigma}{i\pi}\int_{\mathbb{R}^n}\{G^-(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma)-G^+(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma)\}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}\overline{g(\mathbf{x})}d\mathbf{x}\\ &\qquad=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\sigma^{n-1}}{(2\pi)^n}\int_{S^{n-1}}e^{i\omega\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}f(\mathbf{y})\overline{g(\mathbf{x})}dS_\omega d\mathbf{x}d\mathbf{y}\end{aligned}$$

と同値である。よって $\sigma > 0$ のときは (5.2) を得る。$\sigma < 0$ のときは $G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma) = G^{\mp}(\mathbf{x},\mathbf{y};|\sigma|)$ に注意すればよい。

(1.1) の場合も同じ考え方で容易に示すことができる。得られる結論のみを記す (詳細は [4] 参照)。

補題 5.6 *(5.1) の基本解 $G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};z)$ は次を満たす。*

$$
\begin{aligned}
&{}^tG^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x};z) = G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};z) \qquad in\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3_+),\ ({}^\forall z\in\widetilde{\mathbb{C}}_\pm),\\
&\overline{G^{\mp}(\mathbf{x},\mathbf{y};\overline{z})} = G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y};z) \qquad in\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3_+),\ ({}^\forall z\in\widetilde{\mathbb{C}}_\pm),\\
&G^{+}(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma) - G^{-}(\mathbf{x},\mathbf{y};\sigma)\\
&\qquad = \frac{i}{4\pi}\frac{-\sigma}{2\pi}\rho_0^{-1}\sum_{\alpha\in\Lambda}c_\alpha^{-3}\int_{S^2_\alpha}\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)\otimes\overline{\phi_0^\alpha(\mathbf{y};\sigma,\omega)}dS_\omega\\
&\qquad = \frac{i}{4\pi}\frac{-\sigma}{2\pi}\rho_0^{-1}\sum_{\alpha\in\Lambda}c_\alpha^{-3}\int_{S^2_\alpha}\overline{\phi_0^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\omega)}\otimes\phi_0^\alpha(\mathbf{y};\sigma,\omega)dS_\omega.
\end{aligned}
$$

上で $\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^3_+,\ \sigma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ である。但し、$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ *(*$\mathbf{a},\ \mathbf{b}\in\mathbb{C}^3$*)* は任意の $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^3$ について $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$ となる 3×3-行列である。

補題 5.6 を用いて $\varphi^\alpha(\mathbf{x};\sigma,\theta)$ が outgoing condition を満たすようにすることに関する詳細は [4] で与えられている。

References

[1] M. Ikawa *"Scattering Theory"*,(in Japanese) Iwanami Syoten, 1999.

[2] M. Kawashita, *"Another proof of the representation formula of the scattering kernel for the elastic wave equation"*, Tsukuba J. Math. **18** (1994), 351-369.

[3] M. Kawashita, W. Kawashita and H. Soga, *"Relation between scattering theories of the Wilcox and Lax-Phillips types and a concrete construction of the translation representation"*, Comm. P. D. E. **28,** (2003), 1437-1470.

[4] M. Kawashita, W. Kawashita and H. Soga, *"Scattering theory for the elastic wave equation in perturbed half-spaces* (preprint)

[5] M. Kawashita and W. Kawashita(née Dan) *"Analyticity of the resolvent for elastic waves in a perturbed isotropic half space"*, to appear in Math. Nachr..

[6] P. D. Lax and R. S. Phillips, "Scattering theory", Academic Press, New York, 1967.

[7] P. D. Lax and R. S. Phillips, *"Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions"*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 101-134.

[8] A. Majda, *"A Represetation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies"*, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), 165-194.

[9] C. S. Morawetz, *"Exponential decay of solutions of the wave equation"*, Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 439-444.

[10] G. Schmidt, *"A uniqueness theorem for the equation $(\Delta + V + k^2)u = 0$ and the representation of the potential scattering operator"*, MRC Tech. Sum. Rep. 783 (1967).

[11] H. Soga, *"Singularities of the scattering kernel for convex obstacles"*, J.Math. Kyoto Univ. **22** (1983), 729–765.

[12] H. Soga, *"Representation of the scattering kernel for the elastic wave equation and singularities of the back-scattering"*, Osaka J. Math. **29** (1992), 809-836.

[13] C. H. Wilcox, "Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains", Lect. Notes in Math., no. 442, Springer, Berlin 1975.

KAWASHITA, MISHIO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, HIROSHIMA UNIVERSITY, HIGASHI-HIROSHIMA, 739-8526 JAPAN
KAWASHITA, WAKAKO
KAGAMIYAMA 360 2-1-303, HIGASHI-HIROSHIMA, 739-0046 JAPAN
SOGA, HIDEO
FACULTY OF EDUCATION, IBARAKI UNIVERSITY, MITO, IBARAKI, 310-8512, JAPAN