数理解析研究所講究録
1479 巻 2006 年 142-161

複数の δ 関数を初期データに持つ非線形シュレーディンガー方程式について

宮崎大学・教育文化学部　北　直泰 (Naoyasu Kita)
Faculty of Education and Culture, Miyazaki University

概要

非線形シュレーディンガー方程式の初期データに複数の δ 関数を与えて解を構成する. 本講究録では特に δ 関数が 1 本, 2 本および 3 本の場合を考察する. 注目すべきことは, 初期データが 2 本以上の δ 関数からなるときに「モードの生成」が生ずることである. この効果は非線形特有のものである.

1 Introduction

この講究録では非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題を考える. (初期データには複数の δ 関数を課していることに注意.)

$$\text{(NLS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u + \lambda \mathcal{N}(u), \\ u(0,x) = (\text{superposition of } \delta\text{-functions}), \end{cases}$$

ここで, $(t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial_x$ および未知関数 $u = u(t,x)$ は複素数の値を取る. ゲージ不変性のあるベキタイプの非線形項 $\mathcal{N}(u)$ には次のような形を仮定する.

$$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u \quad (\text{ただし } 1 < p < 3)$$

また, 非線形項の係数 λ は任意の複素数である. 特に $\mathrm{Im}\lambda < 0$ のときには非線形的散逸効果を意味している. ここでは初期データとして主に $u(0,x) = \mu_0\delta_0$, $u(0,x) = \mu_0\delta_0 + \mu_1\delta_a$ あるいは $u(0,x) = \mu_{00}\delta_0 + \mu_{10}\delta_a + \mu_{01}\delta_b$ のような具体的なものを与えて解を構成する. ただし, δ_a は $x = a \in \mathbf{R}$ に台を持つディラックの δ-関数を表す. そして, 重ね合わせの係数 μ_k, μ_{jk} $(j,k = 0,1)$ は複素数とする.

非線形シュレーディンガー方程式の物理的な背景としてよく引き合いに出されるのは, 3次の非線形項の場合 (つまり, $p = 3$ の場合. しかし, のちに紹介する数学的な要求によ

り残念ながらこの講究録ではカバーされていない.）である. より具体的には, 流体中における渦糸形状の時間発展を記述する方程式と言われている. [10].

測度を初期データに与えて非線形発展方程式の研究を行ったものにはいろいろなものがある. 例えば, 非線形熱方程式 $\partial_t u - \partial_x^2 u + |u|^{p-1}u = 0$, $u(0,x) = \delta_0$ については, Brezis-Friedman [2] が考察しており, そこでは可解性に関する非線形ベキの臨界値が決定されている. 詳しくは $3 \leq p$ のとき初期データに超関数の意味で連続につながる解が無いことが証明されており, $1 < p < 3$ のとき解の存在が証明されている（解の存在については一般の測度初期データでも証明可能）. 証明のアイデアは比較定理と熱方程式特有の平滑効果である. KdV 方程式の場合では, Tsutsumi [23] により一般的な測度を初期データとして解の存在が示されている. その際カギになったのが Miura 変換 [17] である. また, 複素ギンツブルグ-ランダウ方程式については, 測度のように特異性の強い初期データで Abe-Okazawa [1] が解の構成を示している. いづれも解の構成については線形部分の強い平滑効果もしくは特殊な変数変換を利用している. しかしながら, 非線形シュレーディンガー方程式には熱方程式ほどの強い平滑効果や KdV 方程式のような巧みな変数変換が期待できないので, δ 関数以外の抽象的な測度初期データで解が構成できるか否か今だに未解決である.

ここで Kenig-Ponce-Vega [15] の結果にも注目しておこう. 彼らは初期データが $u(0,x) = \delta_0$ で非線形ベキが $3 \leq p$ の場合に非線形シュレーディンガー方程式が非適切であることを示した. より詳しく述べると, (NLS) は関数空間 $C([0,T];\mathcal{S}'(\mathbf{R}))$ において解を持たないかあるいは持つとしても複数存在することを示した. 彼らはこの結果を証明する際, ガリレイ変換 $u_N(t,x) = e^{-itN^2}e^{iNx}u(t,x-2tN)$ による解の不変性を利用している.

非線形シュレーディンガー方程式については $L^2(\mathbf{R})$ や $H^s(\mathbf{R})$ $(s>0)$ の枠組みで解の構成が行われてきた. ([5, 6, 8, 11, 12, 13, 18, 19, 21, 22] などを参照). その理由はこれらの関数空間が保存則やエネルギー評価および Strichartz 型評価 [20, 24] と相性が良いからである. しかし, 我々が扱う δ-関数初期データはもちろんこれらの枠組みから外れるものなので, 先に挙げた参考文献内の方法では解の構成ができない. そこで, δ-関数初期データの特性を生かして偏微分方程式 (NLS) を常微分方程式 (ODE) に帰着させるといったアイデアを用いる. このアイデアを用いると特に初期データが１本の δ 関数のときには, 解が陽的に得られる（第２節を参照）. さらに初期データが２本以上の δ 関数になると非線形相互作用により無限個のモードが解の表示に現れる（第３，４節参照）. 以降の節では δ 関数の本数に応じて個別に議論を展開していこう.

2 $u(0,x) = \mu_0\delta_0$ の場合

この場合は非線形シュレーディンガー方程式を陽的に解くことができる. つまり, 解の表示として,

$$u(t,x) = A(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_0, \tag{2.1}$$

が得られる. ここで, $\exp(it\partial_x^2)\delta_0 = (4\pi it)^{-1/2}\exp(ix^2/4t)$ そして, 非線形効果による振幅 $A(t)$ は,

$$A(t) = \begin{cases} \mu_0 \exp\left(\dfrac{2\lambda|\mu_0|^{p-1}}{i(3-p)}|4\pi t|^{-(p-1)/2}t\right) & \text{if } \mathrm{Im}\lambda = 0, \\ \mu_0\left(1 - \dfrac{2(p-1)\mathrm{Im}\lambda|\mu_0|^{p-1}}{3-p}|4\pi t|^{-(p-1)/2}t\right)^{\frac{i\lambda}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda}} & \text{if } \mathrm{Im}\lambda \neq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

のように表される. 実際, (2.1) を (NLS) に代入してみると, 次のような $A(t)$ の常微分方程式 (ODE) が得られる.

$$\begin{cases} i\dfrac{dA}{dt} = \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\mathcal{N}(A), \\ A(0) = \mu_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

(2.3) を解くために, まず $\overline{A(t)}$ を (2.3) の両辺に掛ける. すると関係式

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2|4\pi t|^{-(p-1)/2}\mathrm{Im}\lambda|A|^{p+1}$$

が導かれるので, これから

$$|A(t)| = \left(|\mu_0|^{-(p-1)} - (p-1)\mathrm{Im}\lambda\int_0^t |4\pi\tau|^{-(p-1)/2}\,d\tau\right)^{-1/(p-1)} \tag{2.4}$$

となることが分かる. (2.4) の右辺括弧内の時間積分は $p < 3$ であるが故, 意味をもつ. (2.4) を (2.3) に代入し簡単な常微分方程式を解くことで (2.2) が得られる. ここで, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ では正の有限時刻で $A(t)$ が無限大に爆発することに注意しておく.

3 $u(0,x) = \mu_0\delta_0 + \mu_1\delta_a$ の場合

この節では, 初期データが δ 関数の重ね合わせで与えられると解に「モードの生成」が現れることを見ていこう. 結果を述べる前に記号の説明をする. $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ は周期 2π

の1次元トーラスである（ここで, $\mathbf{Z}$ は整数の集合）．この節では $L^q(=L^q(\mathbf{T}))$ はトーラス上の q 乗可積分関数の集合を表し, ソボレフ空間 $H^s(=H^s(\mathbf{T}))$ は

$$H^s=\{f(\theta)\in L^2;\ \|f\|_{H^s}^2<\infty\},$$

で定義されるものである．ここで, $\|f\|_{H^s}^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+|k|)^{2s}|C_k|^2$ $(C_k=(2\pi)^{-1}\int f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta)$ である．また, ℓ_α^2 は α 次の重みつき数列空間で,

$$\ell_\alpha^2=\{\{A_k\}_{k\in\mathbf{Z}};\ \|\{A_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2}^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+|k|)^{2\alpha}|A_k|^2<\infty\}.$$

によって定義される．表現を簡略化するために $\{A_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ の代わりに $\{A_k\}$ という記法をよく用いる．以上の準備のもと時間局所解に関する結果を紹介する．

Theorem 3.1 (local result) ある $T>0$ に対して, 次のような表示を持つ *(NLS)* の解が一つ存在する．

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}A_k(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka},\tag{3.1}$$

ここで, $\{A_k(t)\}\in C([0,T];\ell_1^2)\cap C^1((0,T];\ell_1^2)$ であり, $A_0(0)=\mu_0$, $A_1(0)=\mu_1$ $A_k(0)=0$ *$(k\neq 0,1)$* である．

Remark 3.1. Theorem 3.1 の解に見受けられる $A_k(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka}$ を「k 番目のモード」と呼ぶことにしよう．すると初期データが 0 番目と 1 番目のモードのみから構成されているにも関わらず, (3.1) には 0, 1 番目以外の新しいモードが現れている．この性質は非線形問題特有のものである．

Remark 3.2. Theorem 3.1 の証明を見ると, 解の構成についてはやや一般的な初期データでも可能であることがわかる．やや一般的な初期データとは直線 $\mathbf{R}$ 上に等間隔に δ 関数が並ぶようなデータのことで, $u(0,x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k\delta_{ka}$ のように書き表せる場合のことである．ただし, 係数には $\{\mu_k\}\in\ell_1^2$ のような減衰条件を課す．係数のこのような減衰条件は非線形項を評価する際に役立つ．

Remark 3.3. (3.1) にあるような級数は $L^\infty_{loc}((0,T];L^\infty(\mathbf{R}))$ の意味で収束している．なぜなら任意の $\tau\in(0,T)$ に対して,

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\le t\le T}\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} &\le (4\pi\tau)^{-1/2}\sup_{\tau\le t\le T}\sum_k|A_k(t)|\\ &\le C(4\pi\tau)^{-1/2}\|\{A_k(t)\}\|_{L^\infty([\tau,T];\ell_1^2)}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

となるからである．これによって (NLS) の非線形項 $\mathcal{N}(u(t,x))$ は $t \neq 0$ のとき，関数として意味を持つことになる．また，(3.1) で与えられる解は $C([0,T];\mathcal{S}'(\mathbf{R}))$ にも属しており，超関数の意味で初期データに連続につながることにも注意しておく．

Remark 3.4. (3.1) のような解の表現は以下のおおまかな議論から自然に予想できる．つまり，非線形解は時刻 $t > 0$ が小さいとき，線形解 $u_1(t,x) = \exp(it\partial_x^2)(\mu_0\delta_0 + \mu_1\delta_a)$ で良く近似されていることを認めると，第２近似 $u_2(t,x)$ は方程式

$$
\begin{aligned}
(3.2) \qquad (i\partial_t + \partial_x^2)u_2 &= \mathcal{N}(u_1) \\
&= \mathcal{N}((2\pi)^{-1/2}e^{ix^2/4t}D(\mu_0 + \mu_1 e^{-iax}e^{ia^2/4t})) \\
&= |4\pi t|^{-(p-1)/2}(2\pi)^{-1/2}e^{ix^2/4t}D\mathcal{N}(1 + e^{-iax}e^{ia^2/4t}),
\end{aligned}
$$

の解として与えられるであろう．ここで非線形項の式変形については，

$$
u_1 = e^{ix^2/4t}D\mathcal{F}e^{ix^2/4t}u(0,x),
$$

(ただし $Df(t,x) = (2it)^{-n/2}f(t,x/2t)$ そして $\mathcal{F}$ はフーリエ変換) という表現を用いた．さて，e の肩にある ax を別の変数 θ で置き換えてみると，(3.2) の非線形項は θ の 2π 周期関数とみなすことができる．従ってフーリエ級数展開を用いると

$$
\begin{aligned}
((3.2)\text{ の右辺}) &= |4\pi t|^{-(p-1)/2}(2\pi)^{-1/2}e^{ix^2/4t}D\sum_{k\in\mathbf{Z}} B_k(t)e^{i(ka)^2/4t}e^{-ik\theta} \\
&= |4\pi t|^{-(p-1)/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} B_k(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka},
\end{aligned}
$$

となる．ここで $B_k(t)e^{i(ka)^2/4t}$ の部分がフーリエ係数に相当している．あとは Duhamel の原理を適用すると第２近似 u_2 が (3.1) のような形になることがわかる．

時間局所解の構成ができると次に関心があるのは時間大域解に関する議論である．以下の Theorem 3.2 を見ればわかることだが，$\mathrm{Im}\lambda$ の正負が有限時間爆発もしくは時間大域解の存在を決定する．

Theorem 3.2 (blowing up or global result) *(1) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ とする．このとき，Theorem 3.1 の解は正の有限時刻で爆発する．正確には $\{A_k(t)\}$ の ℓ_0^2 ノルムがある正の時刻 T^* で無限大になる．*

(2) $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ とする．このとき，Theorem 3.1 のような表現をもつ時間大域解が一つ存在する．ただし，$\{A_k(t)\} \in C([0,\infty);\ell_1^2) \cap C^1((0,\infty);\ell_1^2)$ である．

さて, Theorem 3.1 および 3.2 の証明に移ろう. アイデアは (NLS) を変形して, $\{A_k(t)\}$ の常微分方程式系に帰着させることである. 問題は非線形項に表現 (3.1) を当てはめた後の処理方法であるが, それについては次の Lemma によって克服できる.

Lemma 3.3 $\{A_k(t)\} \in C([0,T];\ell_1^2)$ とする. このとき,

$$\mathcal{N}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k(t)\exp(it\partial)\delta_{ka}) = |4\pi t|^{-(p-1)/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \widetilde{A}_k(t)\exp(it\partial)\delta_{ka}, \tag{3.3}$$

が成り立つ. ただし, $\widetilde{A}_k(t) = (2\pi)^{-1}e^{-i(ka)^2/4t}\langle\mathcal{N}(v), e^{-ik\theta}\rangle_\theta$ とし,

$$v = v(t,\theta) = \sum_j A_j(t)e^{-ij\theta}e^{i(ja)^2/4t}$$

および $\langle f,g\rangle_\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta$ である.

Lemma 3.3 の証明. 線形シュレーディンガー方程式の解作用素が次のように分解できることに注意しておく.

$$\begin{aligned}\exp(it\partial_x^2)f &= (4\pi it)^{-1/2}\int \exp(i|x-y|^2/4t)f(y)dy\\ &= MD\mathcal{F}Mf,\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}Mg(t,x) &= e^{ix^2/4t}g(x),\\ Dg(t,x) &= (2it)^{-1/2}g(x/2t),\\ \mathcal{F}g(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int e^{-i\xi x}g(x)dx \quad (g \text{ のフーリエ変換}).\end{aligned}$$

すると,

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(\sum_j A_j(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{ja})\\ &= \mathcal{N}((2\pi)^{-1/2}MD\sum_j A_j(t)e^{-ijax+i(ja)^2/4t})\\ &= |4\pi t|^{-(p-1)/2}(2\pi)^{-1/2}MD\mathcal{N}(\sum_j A_j(t)e^{-ijax+i(ja)^2/4t}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

となる. なお, (3.4) の最後の等式を示すときに, 非線形項のゲージ不変性を利用した. e の肩にある ax を θ で置き換えると, $\mathcal{N}(\sum_j A_j(t)e^{-ij\theta+i(ja)^2/4t})$ の部分は θ の 2π 周期関数と

見なせるので, フーリエ級数展開によって

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\sum_j A_j(t)e^{-ij\theta+i(ja)^2/4t}) &= \sum_k C_k(t)e^{-ik\theta} \\ &= \sum_k \widetilde{A}_k(t)e^{i(ka)^2/4t}e^{-ik\theta} \\ &= (2\pi)^{1/2}\sum_k \widetilde{A}_k(t)\mathcal{F}M\delta_{ka},\end{aligned}$$

と書くことができる. ここで, $C_k(t) = (2\pi)^{-1}\langle\mathcal{N}(v), e^{-ik\theta}\rangle_\theta$ であり, $C_k(t) = \widetilde{A}_k(t)e^{i(ka)^2/4t}$ と書き換えた. この表現を (3.4) に代入すると Lemma 3.3 を得ることができる. □

さて, 以降では (NLS) をどのように常微分方程式系に変換するのかを紹介する. $u = \sum_k A_k(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka}$ を (NLS) に代入し, $i\partial_t \exp(it\partial_x^2)\delta_{ka} = -\partial_x^2\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka}$ であることに注意した上で Lemma 3.3 を利用すると

$$\sum_k i\frac{dA_k}{dt}\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka} = \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\sum_k \widetilde{A}_k\exp(it\partial_x^2)\delta_{ka}$$

が得られる. 両辺を比較すると次のような常微分方程式系に到達する.

$$i\frac{dA_k}{dt} = \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\widetilde{A}_k \tag{3.5}$$

この常微分方程式系に初期条件 $A_k(0) = \mu_k$ を付与して解けばよい. そうすれば $\{A_k(t)\}$ を決定することが (NLS) の解を構成することにつながる. (3.5) を解くために積分方程式に変形しておく.

$$\begin{aligned}\{A_k(t)\} &= \{\Phi_k(\{A_j(t)\})\} \\ &\equiv \{\mu_k\} - i\lambda\int_0^t |4\pi\tau|^{-(p-1)/2}\{\widetilde{A}_k(\tau)\}\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.6}$$

写像 $\{\Phi_k\}$ に対して縮小写像の原理を適用したいのだが, その際次の Lemma にあるような評価が有用になる.

Lemma 3.4 $I = [0,T]$ とおく. すると以下の不等式が成り立つ.

$$\|\{\widetilde{A}_k\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)} \le C\|\{A_k\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}^p, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}&\|\{\widetilde{A}_k^{(1)}\} - \{\widetilde{A}_k^{(2)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_0^2)} \\ &\le C(\max_{j=1,2}\|\{A_k^{(j)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)})^{p-1}\|\{A_k^{(1)}\} - \{A_k^{(2)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_0^2)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Lemma 3.4 の証明. Lemma 3.3 の $\tilde{A}_k$ に対して部分積分を適用すると

$$k\tilde{A}_k = (2\pi)^{-1} i e^{-i(ka)^2/4t} \langle \partial_\theta \mathcal{N}(\sum_j A_j e^{-ij\theta} e^{i(ja)^2/4t}), e^{-ik\theta} \rangle_\theta$$

となる. Parseval の等式と不等式 $\| \sum_j A_j e^{-ij\theta + i(ja)^2/4t} \|_{L^\infty} \le C \| \{A_j\} \|_{\ell_1^2}$ によって,

$$\begin{aligned} \| \{k\tilde{A}_k\} \|_{\ell_0^2} &= (2\pi)^{-1/2} \| \partial_\theta \mathcal{N}(\sum_j A_j e^{-ij\theta} e^{i(ja)^2/4t}) \|_{L^2} \\ &\le C \| \sum_j A_j e^{-ij\theta} e^{i(ja)^2/4t} \|_{L^\infty}^{p-1} \| \sum_j j A_j e^{-ij\theta} e^{i(ja)^2/4t} \|_{L^2} \\ &\le C \| \{A_j\} \|_{\ell_1^2}^p . \end{aligned}$$

が得られる. これで (3.7) が得られた. (3.8) の証明については (3.7) の導出方法と同様である. 今, 非線形項のベキが $1 < p < 3$ であるため, $u = 0$ で $\mathcal{N}(u)$ が特異性を持つので, $\{A_k^{(1)}\} - \{A_k^{(2)}\}$ を重みのない ℓ^2-ノルムで評価している. □

次に Theorem 3.1 の証明に移ろう.

Theorem 3.1 の証明. 写像 $\{\Phi_k(\{A_j\})\}$ に対して縮小写像の原理を適用する. $\|\{\mu_k\}\|_{\ell_1^2} \le \rho_0$ とし,

$$\overline{B}_{2\rho_0} = \{ \{A_k\} \in L^\infty([0,T]; \ell_1^2);\ \|\{A_k\}\|_{L^\infty([0,T];\ell_1^2)} \le 2\rho_0 \}$$

とおく. この集合 $\overline{B}_{2\rho_0}$ には $L^\infty([0,T]; \ell_0^2)$ のノルムによる距離を入れておく. 注意すべきことは $\overline{B}_{2\rho_0}$ がこの距離で閉になっていることである. Lemma 3.4 を用いると

$$\begin{aligned} &\|\{\Phi_k(\{A_j\})\}\|_{L^\infty([0,T];\ell_1^2)} \le \rho_0 + CT^{(3-p)/2}(2\rho_0)^p, \\ &\|\{\Phi_k(\{A_j^{(1)}\})\} - \{\Phi_k(\{A_j^{(2)}\})\}\|_{L^\infty([0,T];\ell_0^2)} \\ &\le CT^{(3-p)/2}(2\rho_0)^{p-1} \|\{A_k^{(1)}\} - \{A_k^{(2)}\}\|_{L^\infty([0,T];\ell_0^2)} \end{aligned}$$

を示せるので, 時間幅 T を小さく絞れば写像 $\{\Phi_k(\{A_j\})\}$ が $\overline{B}_{2\rho_0}$ 上で縮小写像になることが分かる. これにより積分方程式 (3.6) の解が $L^\infty([0,T]; \ell_1^2)$ で存在することがわかる. $\{A_k(t)\}$ の時間方向の滑らかさについては以下のように考えるとよい. まず $\int_0^t |4\pi\tau|^{-(p-1)/2} \{\tilde{A}_k\}\, d\tau$ が $C([0,T]; \ell_1^2)$ に属することは Lebesgue の収束定理からわかるので, 積分方程式の解は ℓ_1^2 に値をとる連続関数になっている. 再び積分方程式による $\{A_k(t)\}$ の表現を見ると解が $C^1((0,T]; \ell_1^2)$ に属することが分かる. 解の一意性については標準的な議論から肯定的に示すことができる. 以上により Theorem 3.1 が証明できた.

□

Theorem 3.2 を証明するとき, アプリオリ評価を利用するのだが, その際に次の Lemma にあるような関係式が役立つ.

Lemma 3.5 $\{A_k(t)\}$ は *(3.5)* の $C([0,T];\ell_1^2)\cap C^1((0,T];\ell_1^2)$ における解とする.

(1) このとき, 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{d\|\{A_k(t)\}\|_{\ell_0^2}^2}{dt}=\frac{Im\lambda}{\pi}(4\pi t)^{-(p-1)/2}\|v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \tag{3.9}$$

ここで $v(t,\theta)=\sum_k A_k(t)e^{-ik\theta}e^{i(ka)^2/4t}$ である.

(2) さらに $Im\lambda\le 0$ であれば, 次の不等式が成り立つ.

$$\|\{kA_k(t)\}\|_{\ell_0^2}\le Ce^{2t}, \tag{3.10}$$

ここで定数 C は時間幅 T に依存しない.

Remark 3.5 (3.10) の評価はより精密な議論によっていくらか良くできるが, 証明の煩雑さを回避したいのであまり評価の精密化にはこだわらないでおく.

Lemma 3.5 証明. (3.5) を利用すると, $v=v(t,\theta)$ は次のような偏微分方程式を満たす.

$$i\partial_t v=-\frac{a^2}{4t^2}\partial_\theta^2 v+\lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\mathcal{N}(v). \tag{3.11}$$

本当は $\partial_t v$ や $\partial_\theta^2 v$ が超関数だと以降の議論に不都合が生ずるが, そのあたりについては軟化子を用いて方程式を正則化すれば正当化できる. 従って以後形式的な議論を行う. パーセバルの等式から $\sqrt{2\pi}\|\{A_k(t)\}\|_{\ell_0^2}=\|v(t)\|_{L^2}$ および $\sqrt{2\pi}\|\{kA_k(t)\}\|_{\ell_0^2}=\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}$ が成り立つことに注意しよう. すると (3.11) に $\overline{v}$ を掛けて両辺の虚部をとることにより (3.9) を得る. 一方, (3.11) の両辺に $\overline{\partial_t v}$ を掛けて実部をとると

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{a^2}{4t^2}\frac{d}{dt}\|\partial_\theta v\|_{L^2}^2+\frac{2\mathrm{Re}\lambda}{p+1}|4\pi t|^{-(p-1)/2}\frac{d}{dt}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}\\ &\quad -2(\mathrm{Im}\lambda)|4\pi t|^{-(p-1)/2}\mathrm{Im}\langle\mathcal{N}(v),\partial_t v\rangle_\theta.\end{aligned} \tag{3.12}$$

が得られる. (3.12) にある $\mathrm{Im}\langle\mathcal{N}(v),\partial_t v\rangle_\theta$ を評価するために, (3.11) の両辺に $\overline{\mathcal{N}(v)}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\langle\mathcal{N}(v),\partial_t v\rangle_\theta &= -\frac{a^2}{4t^2}\mathrm{Re}\langle\partial_\theta^2 v,\mathcal{N}(v)\rangle_\theta+(\mathrm{Re}\lambda)|4\pi t|^{-(p-1)/2}\|v\|_{L^{2p}}^{2p}\\ &\ge (\mathrm{Re}\lambda)|4\pi t|^{-(p-1)/2}\|v\|_{L^{2p}}^{2p}\end{aligned} \tag{3.13}$$

が得られる．ここで最後の不等式を導く際に不等式 $\mathrm{Re}\langle\partial_\theta^2 v, \mathcal{N}(v)\rangle_\theta \leq 0$ を利用した．(3.12) と (3.13) を組み合わせると，

$$(3.14)\quad \frac{d}{dt}\|\partial_\theta v\|_{L^2}^2 + K_1(\mathrm{Re}\lambda)t^{(5-p)/2}\frac{d}{dt}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - K_2(\mathrm{Im}\lambda)(\mathrm{Re}\lambda)t^{3-p}\|v\|_{L^{2p}}^{2p} \leq 0,$$

が得られる．ここで $K_1 = \dfrac{8}{(p+1)a^2(4\pi)^{(p-1)/2}}$ および $K_2 = \dfrac{8}{a^2(4\pi)^{p-1}}$.

$$E(t) = \|\partial_\theta v\|_{L^2}^2 + K_1(\mathrm{Re}\lambda)t^{(5-p)/2}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - K_2(\mathrm{Im}\lambda)(\mathrm{Re}\lambda)\int_{t_0}^t \tau^{3-p}\|v(\tau)\|_{L^{2p}}^{2p}\, d\tau.$$

とおけば

$$(3.15)\qquad \frac{d}{dt}E(t) \leq \frac{(5-p)K_1\mathrm{Re}\lambda}{2}t^{(3-p)/2}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

となる．最初に $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ かつ $\mathrm{Re}\lambda < 0$ の場合を考えよう．(3.15) によって，$t > t_0$ のとき $E(t) \leq (\mathrm{const.})$ が得られる．したがって

$$(3.16)\qquad \|\partial_\theta v\|_{L^2}^2 \leq C_1 + C_2 t^{(5-p)/2}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + C_3\int_{t_0}^t \tau^{3-p}\|v(\tau)\|_{L^{2p}}^{2p}\, d\tau$$

を得る．右辺に次のような Gagliardo-Nirenberg の不等式を適用しよう．

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} &\leq C\|v\|_{H^1}^{(p+1)\beta}\|v\|_{L^2}^{(p+1)(1-\beta)}, \\ \|v\|_{L^{2p}}^{2p} &\leq C\|v\|_{H^1}^{2p\gamma}\|v\|_{L^2}^{2p(1-\gamma)}, \end{aligned}$$

ここで $1/(p+1) = \beta(1/2-1) + (1-\beta)/2$ および $1/(2p) = \gamma(1/2-1) + (1-\gamma)/2$ である．そして Young の不等式によって

$$(3.17)\qquad \begin{aligned} \|v(t)\|_{H^1}^2 &\leq C + Ct^{(5-p)/2}\|v(t)\|_{H^1}^{(p+1)\beta}\|v(t)\|_{L^2}^{(p+1)(1-\beta)} \\ &\quad + C\int_{t_0}^t \tau^{3-p}\|v(\tau)\|_{H^1}^{2p\gamma}\|v(\tau)\|_{L^2}^{2p(1-\gamma)}\, d\tau \\ &\leq C + Ct^{(5-p)/2}\|v(t)\|_{H^1}^{(p-1)/2} + C\int_{t_0}^t \tau^{3-p}\|v(\tau)\|_{H^1}^{p-1}\, d\tau \\ &\leq C(1+t)^3 + \frac{1}{2}\|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_{t_0}^t \|v(\tau)\|_{H^1}^2\, d\tau. \end{aligned}$$

を得る．この評価を得る際に $\|v(t)\|_{L^2} < C$ となることを用いた（これは等式 (3.9) から従う）．Gronwall の不等式を (3.17) に適用すると (3.10) が得られる．

次に $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ かつ $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ の場合を考えよう．(3.14) によって，

$$\frac{d}{dt}\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2 + K_1(\mathrm{Re}\lambda)t^{(5-p)/2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq 0.$$

が得られる. $F(t) = \|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2 + K_1(\mathrm{Re}\lambda)t^{(5-p)/2}\|v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ とおくとこの不等式から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &\le \frac{5-p}{2}K_1(\mathrm{Re}\lambda)\|v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\le \frac{5-p}{2}t^{-1}F(t).\end{aligned}$$

となる. Gronwall の不等式より $F(t) \le F(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{(5-p)/2}$ が導かれる. 今, $\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2 \le F(t)$, なので, $\|v(t)\|_{H^1}^2 \le C(1+t)^{(5-p)/2}$ が得られる. 以上より (3.10) が得られた. □

Theorem 3.2 の証明. $\mathrm{Im}\lambda > 0$ のとき, Lemma 3.5 (3.9) と Hölder の不等式 $\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \ge (2\pi)^{-(p-1)/2}\|v\|_{L^2}^{p+1}$ から

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{L^2}^2 \ge C\mathrm{Im}\lambda t^{-(p-1)/2}\|v\|_{L^2}^{p+1}.$$

が得られる. これから $\|v(t)\|_{L^2} = \|\{A_k(t)\}\|_{\ell_0^2}$ が有限時間で爆発することが示される. 一方, $\mathrm{Im}\lambda \le 0$ のとき, Lemma 3.5 は正の時刻に対する $\|\{A_k(t)\}\|_{\ell_1^2}$ の有限性を保障している. 従って (3.5) の時間局所解を大域的につなげることが出来る. □

4 $u(0,x) = \mu_{00}\delta_0 + \mu_{10}\delta_a + \mu_{01}\delta_b$ $(a/b \notin \mathbf{Q})$ の場合

この節では, 初期データが3つの δ-関数からなる場合について非線形シュレーディンガー方程式の解を構成する. δ 関数の台が $x = 0, a$ および b にあるものとする. もし $a/b \in \mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$ は有理数の集合) のとき, δ-関数の配置は Remark 3.2 で述べられているように等間隔配置の特別なものだから, (NLS) は Theorem 3.1 と 3.2 で言及されているような解を持つ. 問題は $a/b \notin \mathbf{Q}$ の場合である. この節の主定理を紹介する前に記号の準備をいくつか行う. 2次元格子点上の数列空間 $\ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2)$ には次のようなノルムを入れておく.

$$\|\{A_{k_1,k_2}\}_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2} = \Big(\sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}}(1+|k_1|+|k_2|)^{2\alpha}|A_{k_1,k_2}|^2\Big)^{1/2}.$$

$\mathbf{T}^2$ は周期 2π の2次元トーラスとし, $\|f\|_{L^q(\mathbf{T}^2)}$ は $\left(\int_{\mathbf{T}^2}|f(\theta_1,\theta_2)|^q\,d\theta_1 d\theta_2\right)^{1/q}$ を表す. さらに2次元周期関数に対して Besov 型ノルムを以下のように定義する. $[s]$ は s を超えない最大の整数を表すものとする. s が非整数のとき $1 < q, r < \infty$ に対して, Besov 空間 $B_{q,r}^s(\mathbf{T}^2)$ を

$$B_{q,r}^s(\mathbf{T}^2) = \{f \in L^q(\mathbf{T}^2);\ \|f\|_{B_{q,r}^s(\mathbf{T}^2)} < \infty\},$$

で定義する．ここで，

$$\begin{aligned}\|f\|_{B^s_{q,r}(\mathbf{T}^2)} &\equiv \|f\|_{L^q(\mathbf{T}^2)} + \|f\|_{\dot{B}^s_{q,r}} \\ &\equiv \|f\|_{L^q(\mathbf{T}^2)} + \left(\int_0^\infty \tau^{-rs-1} \sup_{|h|<\tau} \|d_h^{[s]+1} f\|^r_{L^q(\mathbf{T}^2)}\, d\tau\right)^{1/q}\end{aligned}$$

である．ただし，$h=(h_1,h_2)$ および $d_h^N f(\theta_1,\theta_2) = \sum_{j=0}^N \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} (-1)^k f(\theta_1+jh_1, \theta_2+jh_2)$．である．このように定義された Besov 空間の性質として，$0\le\sigma\le 1$ かつ $1/q=\sigma/q_1+(1-\sigma)/q_0$ のとき，Gagliardo-Nirenberg 型の不等式：$\|f\|_{\dot{B}^{\sigma s}_{q,r/\sigma}(\mathbf{T}^2)} \le C\|f\|^{\sigma}_{\dot{B}^s_{q_1,r}} \|f\|^{1-\sigma}_{L^{q_0}(\mathbf{T}^2)}$ が成り立つことに注意しておこう．さらに $\|f\|_{B^s_{2,2}(\mathbf{T}^2)}$ は

$$\|f\|_{H^s(\mathbf{T}^2)} \equiv \left(\sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} (1+|k_1|+|k_2|)^{2\alpha} |C_{k_1,k_2}|^2\right)^{1/2},$$

と同値であることにも注意．ここで，C_{k_1,k_2} は $(2\pi)^{-2}\int_{\mathbf{T}^2} f(\theta_1,\theta_2) e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}\, d\theta_1 d\theta_2$ で与えられるフーリエ係数である．Besov 空間に関する詳しい事項については例えば [4] を参照してほしい．

以後 $\{A_{k_1,k_2}\}_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}}$ の代わりに $\{A_{k_1,k_2}\}$ のような記号を用いる．この節の最初の結果は以下のとおり．

Theorem 4.1 (local result) $1<\alpha<p$ とする．このとき，ある $T>0$ に対して，次のような表現を有する *(NLS)* の解が一つ存在する．

$$u(t,x) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} A_{k_1,k_2}(t) \exp(it\partial_x^2) \delta_{k_1 a + k_2 b}, \tag{4.1}$$

ここで，係数については $\{A_{k_1,k_2}(t)\} \in C([0,T];\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)) \cap C^1((0,T];\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))$ を満たし，$(k_1,k_2)=(0,0),(1,0),(0,1)$ のとき $A_{k_1,k_2}(0)=\mu_{k_1,k_2}$ であり，それ以外のときには $A_{k_1,k_2}(0)=0$ を満たす．

Remark 4.1. 前節の Remark 3.1 で述べられていたように Theorem 4.1 の解は新しいモードの生成を示唆している．しかし，Theorem 3.1 と著しく異なる点は，$\exp(-it\partial_x^2)u$ が直線上稠密に分布する δ-関数になっていることである．この台の稠密性は a/b が無理数であることによる．また，Theorem 4.1 の証明を見るとわかるが，初期データが $u(0,x)=\sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} \mu_{k_1,k_2}\delta_{k_1a+k_2b}$ のように与えられ，$\{\mu_{k_1,k_2}\}\in\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)$ なる条件を満たすときにも解

の構成は可能である.

Theorem 3.2 と同様に, $\mathrm{Im}\lambda$ の正負が解の有限時間爆発と時間大域的存在を決める.

Theorem 4.2 (blowing up or global result) *(1) $Im\lambda > 0$ とする. このとき, Theorem 4.1 の解は正の有限時刻で爆発する. 詳しく述べると $\{A_{k_1,k_2}(t)\}$ の $\ell_0^2(\mathbf{Z}^2)$-ノルムがある時刻 $T^* > 0$ において無限大になる.*

(2) $Im\lambda \le 0$ とし, さらに $|Re\lambda| \le \dfrac{2\sqrt{p}}{p-1}|Im\lambda|$ とする. このとき, Theorem 4.1 のような表現をもつ解が時間大域的に一つ存在する. また,

$$\{A_{k_1,k_2}(t)\} \in C([0,\infty); \ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2)) \cap C^1((0,\infty); \ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2)).$$

となる.

Remark 4.2. Theorem 4.2 (2) について, 付加的な条件 $|\mathrm{Re}\lambda| \le \dfrac{2\sqrt{p}}{p-1}|\mathrm{Im}\lambda|$ を取り除けるかどうかについてはまだ未解決である. 証明の中ではこの付加的条件は $\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell_1^2(\mathbf{Z}^2)}$ の時間大域的評価を得る際に有用である. この時間大域的結果を得る鍵は Liskevich-Perelmuter の不等式 [16] である. つまり, $\mathrm{Im}\lambda \le 0$ かつ $|\mathrm{Re}\lambda| \le \dfrac{2\sqrt{p}}{p-1}|\mathrm{Im}\lambda|$ ならば $\mathrm{Im}\left(\lambda(\mathcal{N}(v_1) - \mathcal{N}(v_2))\overline{(v_1 - v_2)}\right) \le 0$ という不等式が成り立つ.

Theorem 4.1 を証明するアイデアは Theorem 3.1 の導出方法と似ている. すなわち (NLS) を常微分方程式系に帰着させることであるが, その過程で以下の Lemma を用いる.

Lemma 4.3 $\alpha > 1$ とする. このとき, $\{A_{k_1,k_2}(t)\} \in C([0,T]; \ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2))$ に対して

$$\mathcal{N}\Big(\sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} A_{k_1,k_2}(t)U(t)\delta_{k_1a+k_2b}\Big) = |4\pi t|^{-(p-1)/2} \sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} \widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)U(t)\delta_{k_1a+k_2b}, \tag{4.2}$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{A}_{k_1,k_2}(t) = (2\pi)^{-2}e^{-i(k_1a+k_2b)^2/4t}\langle\mathcal{N}(w), e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}\rangle_{\theta_1,\theta_2}$ とし,

$$w = w(t,\theta_1,\theta_2) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} A_{k_1,k_2}(t)e^{i(k_1a+k_2b)^2/4t}e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}$$

そして

$$\langle f, g\rangle_{\theta_1,\theta_2} = \int_{\mathbf{T}^2} f(\theta_1,\theta_2)\overline{g(\theta_1,\theta_2)}\, d\theta_1 d\theta_2.$$

である.

Lemma 4.3 の証明. Lemma 3.3 の証明で用いられた線形シュレーディンガー方程式の解作用素の分解 $\exp(it\partial_x^2)f = MD\mathcal{F}Mf$ を利用すると

$$
\begin{aligned}
(4.3)\qquad & \mathcal{N}(\sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{k_1a+k_2b}) \\
&= \mathcal{N}((2\pi)^{-1/2}MD\sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t)e^{-i(k_1ax+k_2bx)+i(k_1a+k_2b)^2/4t}) \\
&= |4\pi t|^{-(p-1)/2}(2\pi)^{-1/2}MD\mathcal{N}(\sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t)e^{-i(k_1ax+k_2bx)+i(k_1a+k_2b)^2/4t}).
\end{aligned}
$$

ax と bx をそれぞれ θ_1 と θ_2 で置き換えると,

$$
\mathcal{N}(\sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t)e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)-i(k_1a+k_2b)^2/4t})
$$

は θ_1 と θ_2 の 2π-周期関数と見なせる. そこでフーリエ級数展開を用いると

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{N}(\sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t)e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)+i(k_1a+k_2b)^2/4t}) \\
&= \sum_{k_1,k_2} C_{k_1,k_2}(t)e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)} \\
&= \sum_{k_1,k_2} \widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)e^{i(k_1a+k_2b)^2/4t}e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)} \\
&= (2\pi)^{1/2}\sum_{k_1,k_2} \widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)\mathcal{F}M\delta_{k_1a+k_2b},
\end{aligned}
$$

となる. 上の等式で $C_{k_1,k_2}(t) = (2\pi)^{-1}\langle\mathcal{N}(w), e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}\rangle_{\theta_1,\theta_2}$ を使った. また, $C_{k_1,k_2}(t) = \widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)e^{i(k_1a+k_2b)^2/4t}$ である. 上式の表現を (4.3) に当てはめると, Lemma 4.3 が得られる. □

次に (NLS) を常微分方程式系に帰着させる. $u(t,x) = \sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t)\exp(it\partial_x^2)\delta_{k_1a+k_2b}$ を (NLS) に代入した後 $i\partial_t\exp(it\partial_x^2)\delta_{k_1a+k_2b} = -\partial_x^2\exp(it\partial_x^2)\delta_{k_1a+k_2b}$ に注意し, Lemma 4.3 を用いると

$$
\sum_{k_1,k_2} i\frac{dA_{k_1,k_2}}{dt}\exp(it\partial_x^2)\delta_{k_1a+k_2b} = \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\sum_{k_1,k_2}\widetilde{A}_{k_1,k_2}\exp(it\partial_x^2)\delta_{k_1a+k_2b}
$$

が得られる. これから

$$
(4.4)\qquad \sum_{k_1,k_2} i\frac{dA_{k_1,k_2}}{dt}\delta_{k_1a+k_2b} = \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\sum_{k_1,k_2}\widetilde{A}_{k_1,k_2}\delta_{k_1a+k_2b}.
$$

が導かれる. (4.4) の両辺の係数を比較すると, 次のような常微分方程式系に到達する.

$$i\frac{dA_{k_1,k_2}}{dt} = \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\widetilde{A}_{k_1,k_2}. \tag{4.5}$$

(4.5) を初期値 $A_{k_1,k_2}(0)=\mu_{k_1,k_2}$ で解くために, 積分方程式に変形しておく.

$$\begin{aligned}\{A_{k_1,k_2}(t)\} &= \{\Phi_{k_1,k_2}(\{A_{j_1,j_2}(t)\})\} \\ &\equiv \{\mu_{k_1,k_2}\} - i\lambda\int_0^t |4\pi\tau|^{-(p-1)/2}\{\widetilde{A}_{k_1,k_2}(\tau)\}\,d\tau.\end{aligned} \tag{4.6}$$

この積分方程式を縮小写像の原理で解くために以下の非線形評価が有用である.

Lemma 4.4 $1<\alpha<p$ とする. このとき, $f=f(\theta_1,\theta_2)\in B^{\alpha}_{2,2}(\mathbf{T}^2)$ に対して,

$$\||f|^{p-1}f\|_{B^{\alpha}_{2,2}(\mathbf{T}^2)} \le C\|f\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbf{T}^2)}\|f\|_{B^{\alpha}_{2,2}(\mathbf{T}^2)}. \tag{4.7}$$

が成り立つ.

Lemma 4.4 の証明. [7, 9] にある議論を参照. □

Lemma 4.4 を用いると Lemma 4.3 にある点列 $\{\widetilde{A}_{k_1,k_2}\}(=\{\widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)\})$ を評価できる.

Corollary 4.5 $I=[0,T]$ とする. すると

$$\|\{\widetilde{A}_{k_1,k_2}\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))} \le C\|\{A_{k_1,k_2}\}\|^p_{L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))}, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}&\|\{\widetilde{A}^{(1)}_{k_1,k_2}\}-\{\widetilde{A}^{(2)}_{k_1,k_2}\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_0(\mathbf{Z}^2))} \\ &\le C\left(\max_{j=1,2}\|\{A^{(j)}_{k_1,k_2}\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))}\right)^{p-1}\|\{A^{(1)}_{k_1,k_2}\}-\{A^{(2)}_{k_1,k_2}\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_0(\mathbf{Z}^2))}\end{aligned} \tag{4.9}$$

が成り立つ.

Corollary 4.5 の証明. Parseval の等式より,

$$\|\{\widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)} = (2\pi)^{-1}\|\mathcal{N}(w(t))\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)},$$

が成り立つ. ここで, $w(t)=w(t,\theta_1,\theta_1)=\sum_{k_1,k_2\in\mathbf{Z}} A_{k_1,k_2}(t)e^{i(k_1a+k_2b)^2/4t}e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}$ である.
Lemma 4.4 を適用すると

$$\begin{aligned}\|\{\widetilde{A}_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)} &\le C\|\mathcal{N}(w(t))\|_{B^{\alpha}_{2,2}(\mathbf{T}^2)} \\ &\le C\|w(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbf{T}^2)}\|w(t)\|_{B^{\alpha}_{2,2}(\mathbf{T}^2)}\end{aligned}$$

が成り立つ. $\|w(t)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \le C\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)} = 2\pi C\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)}$ なので, (4.8) が得られる. (4.9) の証明は同様にできる. □

Theorem 4.1 の証明. $I=[0,T]$ および $\|\{\mu_{k_1,k_2}\}\|_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)} \le \rho_0$ とする. また,

$$\overline{B}_{2\rho_0} = \{\{A_{k_1,k_2}\} \in L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2));\ \|\{A_{k_1,k_2}\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))} \le 2\rho_0\}$$

とする. $\overline{B}_{2\rho_0}$ は $L^\infty(I;\ell^2_0(\mathbf{Z}^2))$ の距離で閉であることに注意. まず, (4.6) の $\{\Phi_{k_1,k_2}(\{A_{j_1,j_2}\})\}$ が $\overline{B}_{2\rho_0}$ 上 $L^\infty(I;\ell^2_0(\mathbf{Z}^2))$ を距離として縮小写像になっていることを示そう. Corollary 4.5 より,

$$\begin{aligned}
&\|\{\Phi_{k_1,k_2}(\{A_{j_1,j_2}\})\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))} \le \rho_0 + CT^{(3-p)/2}(2\rho_0)^p,\\
&\|\{\Phi_{k_1,k_2}(\{A^{(1)}_{j_1,j_2}\}) - \{\Phi_{k_1,k_2}(\{A^{(2)}_{j_1,j_2}\})\|_{L^\infty(I;\ell^2_0(\mathbf{Z}^2))}\\
&\le CT^{(3-p)/2}(2\rho_0)^{p-1}\|\{A^{(1)}_{k_1,k_2}\} - \{A^{(2)}_{k_1,k_2}\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_0(\mathbf{Z}^2))}
\end{aligned}$$

が言える. 従って, $T>0$ を十分小さくとれば $\{\Phi_{k_1,k_2}(\{A_{j_1,j_2}\})\}$ が縮小写像であることが分かる. これから (4.6) の解が $L^\infty(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))$ で存在することが分かる. さらに $\int_0^t |4\pi\tau|^{-(p-1)/2}\{\tilde{A}_{k_1,k_2}\}\,d\tau$ は $C(I;\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))$ に属することが Lebesgue の収束定理から分かるので, 積分方程式の解が $\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)$ に値を取る連続関数になることも分かる. 再び積分方程式を利用すると $\{A_{k_1,k_2}(t)\}$ が $C^1((0,T];\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))$ に属することが分かる. 解 $\{A_{k_1,k_2}(t)\}$ の一意性は容易に示せる. □

次に Theorem 4.2 を示そう. 常微分方程式系 (4.5) の時間局所解を大域的につなげるために $\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)} (\simeq \|w(t)\|_{B^\alpha_{2,2}(\mathbf{T}^2)})$ の時間大域的な評価が必要になる. それには $\|w(t)\|_{B^1_{2,2}(\mathbf{T}^2)}$ の評価および Brezis-Gallouet [3] による対数型 Sobolev 不等式を用いる.

Lemma 4.6 $\{A_{k_1,k_2}\}$ を $C([0,T];\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)) \cap C^1((0,T];\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))$ に属する *(4.5)* の解とする.

(1) このとき,

$$\frac{d}{dt}\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|^2_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)} = \frac{Im\lambda}{2\pi^2|4\pi t|^{(p-1)/2}}\|w(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbf{T}^2)}, \tag{4.10}$$

が成り立つ. ここで, $w(t) = w(t,\theta_1,\theta_2) = \sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}(t) e^{i(k_1a+k_2b)^2/4t} e^{-i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}$ である.

(2) $Im\lambda \leq 0$ かつ $|Re\lambda| \leq \dfrac{2\sqrt{p}}{p-1}|Im\lambda|$ ならば,

$$\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell_1^2(\mathbf{Z}^2)} \leq C, \tag{4.11}$$

が成り立つ. ここで正定数 C は時間幅 T に依存しない.

Lemma 4.6 の証明. $\{A_{k_1,k_2}(t)\}$ が常微分方程式系 (4.5) を満たすことから, $w(t,\theta_1,\theta_2)$ が

$$i\partial_t w = -(4t^2)^{-1}(a\partial_{\theta_1} + b\partial_{\theta_2})^2 w + \lambda|4\pi t|^{-(p-1)/2}\mathcal{N}(w). \tag{4.12}$$

を満たすことに注意しよう. (4.12) の両辺に $\overline{w}$ を掛けると

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbf{T}^2)} = 2\mathrm{Im}\lambda|4\pi t|^{(p-1)/2}\|w(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbf{T}^2)}.$$

が得られる. さらに $\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbf{T}^2)} = (2\pi)^2\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell_0^2(\mathbf{Z}^2)}$ に注意すれば (4.10) が得られる. 次に (4.11) を示そう. (4.12) の 2 階の微分作用素が退化しているため, 前節 Lemma 3.5 の証明と同様の議論ではうまくいかない. しかし, 非線形散逸の効果を大きくすること（$\mathrm{Im}\lambda$ を負の方向に大きく取ること）で $\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell_1^2(\mathbf{Z}^2)}$ の評価を構成することが可能になる. (4.12) の両辺に ∂_{θ_j} $(j=1,2)$ を作用させたのち, $\overline{\partial_{\theta_j}w}$ を掛けて虚部を取れば,

$$\frac{d}{dt}\|\partial_{\theta_j}w(t)\|^2_{L^2(\mathbf{T}^2)} = |4\pi t|^{-(p-1)/2}\cdot 2\mathrm{Im}\left(\lambda\langle\partial_{\theta_j}\mathcal{N}(w(t)), \partial_{\theta_j}w(t)\rangle_{\theta_1,\theta_2}\right).$$

が得られる. もし $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ かつ $|\mathrm{Re}| \leq \dfrac{2\sqrt{p}}{p-1}\mathrm{Im}\lambda$, ならば, Liskevich-Perelmuter の不等式 [16] によって

$$\mathrm{Im}\left(\lambda\langle\partial_{\theta_j}\mathcal{N}(w(t)), \partial_{\theta_j}w(t)\rangle_{\theta_1,\theta_2}\right) \leq 0$$

が言える. 従って, $t > t_0$ のとき, $\|\partial_{\theta_j}w(t)\|_{L^2(\mathbf{T}^2)} \leq \|\partial_{\theta_j}w(t_0)\|_{L^2(\mathbf{T}^2)}$ が成り立ち,

$$\|\{k_jA_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell_1^2(\mathbf{Z}^2)} \leq \|\{k_jA_{k_1,k_2}(t_0)\}\|_{\ell_1^2(\mathbf{Z}^2)}$$

が導かれる. また, $t_0 > 0$ を十分小さくとり, 時間局所解の構成（Theorem 4.1 の証明）から得られる評価を見ると, $0 < t < t_0$ のとき, $\|\{k_jA_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell_1^2(\mathbf{Z}^2)} \leq 2\rho_0$ が得られる. 故に (4.11) が証明される. □

Lemma 4.7 (Brezis-Gallouet) $\alpha > 1$ とする．このとき α のみに依存する正の定数 C_α が存在して

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \le C_\alpha \left(1 + \|f\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}\sqrt{\log(1+\|f\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)})}\right). \tag{4.13}$$

が成り立つ．

Lemma 4.7 の証明. [3] を参照のこと． □

さて，いよいよ Theorem 4.2 の証明に移ろう．

Theorem 4.2 の証明. まず，Theorem 4.2 (1) の証明を行う．Hölder の不等式 $\|w(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbf{T}^2)} \ge (2\pi)^{-(p-1)}\|w(t)\|^{p+1}_{L^2(\mathbf{T}^2)}$ と Lemma 4.6 (4.10) によって，

$$\frac{d}{dt}\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|^2_{\ell^2_0} \ge C\mathrm{Im}\lambda t^{-(p-1)/2}\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|^{p+1}_{\ell^2_0}.$$

が得られる．この微分不等式を解くことによって ℓ^2_0-ノルムの有限時間爆発が示せる．次に Theorem 4.2 (2) を示そう．(4.12) と Lemma 4.4 を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)} &\le C|t|^{-(p-1)/2}\|\mathcal{N}(w(t))\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)}\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)} \\ &\le C|t|^{-(p-1)/2}\|w(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbf{T}^2)}\|w(t)\|^2_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)}\end{aligned} \tag{4.14}$$

が得られる．ここで Lemma 4.6 (4.11) と Lemma 4.7 から

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} &\le C(1+\|w(t)\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}\sqrt{\log(1+\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)})}) \\ &\le C\sqrt{\log(2+\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)})}\end{aligned} \tag{4.15}$$

が得られる．(4.15) を (4.14) に当てはめれば，次の微分不等式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)} &\le C|t|^{-(p-1)/2}\left(\log(2+\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)})\right)^{(p-1)/2}\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)} \\ &\le C|t|^{-(p-1)/2}\left(\log(2+\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)})\right)^{(p-1)/2}(2+\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)}).\end{aligned}$$

この不等式から

$$\frac{d}{dt}\log(2+\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)}) \le C|t|^{-(p-1)/2}(\log(2+\|w(t)\|_{H^\alpha}))^{(p-1)/2}$$

が得られる．故に $\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)} = (2\pi)^{-1}\|w(t)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)} \le Ce^t < \infty$ が得られる．従って $\{A_{k_1,k_2}(t)\}$ を時間大域的につなぐことが出来る． □

参考文献

[1] T. Abe and N. Okazawa, "*Global solvability of the complex Ginzburg-Landau equation with distribution-valued initial data, II: 1-dimensional Dirichlet problem*", the 28th conference of evolution euqation (2002, December) at Chuo University.

[2] H. Brezis and A. Friedman, "*Nonlinear parabolic equations involving measures as initial data*", J. Math. Pures Appl. **62**(1983), 73–97.

[3] H. Brezis and T. Gallouet, "*Nonlinear Schrödinger evolution equations*", Nonlinear Anal. TMA **4**(1980), 677–681.

[4] J. Bergh and J. Löfström, "Interpolation spaces, An introduction", Springer Verlag, 1976.

[5] T. Cazenave, "An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations," Textos de Métodos Matemáticos **22**, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1989.

[6] T. Cazenave and F.B. Weissler, "*The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*", Nonlinear Anal. TMA, **14**(1990), 807–836.

[7] J. Ginibre, T. Ozawa and G. Velo, "*On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations*", Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **60**(1994), 211–239.

[8] J. Ginibre and G. Velo, "*On a class of nonlinear Schrö dinger equations*", J. Funct. Anal. **32**(1979), 1–71.

[9] J. Ginibre and G. Velo, "*The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*", Math. Z. **189**(1985), 487–505.

[10] H. Hasimoto, "*A soliton on a vortex filament*", J. Fluid Mechanics **51**(1972), 477–485.

[11] N. Hayashi, "*Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations,*" Manuscripta Math. **55**(1986), 171–190.

[12] T. Kato, "*On nonlinear Schrödinger equations*", Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46**(1986), 113–129.

[13] T. Kato, "*Nonlinear Schrödinger equations*," in "Schrödinger Operators" (H. Holden, A. Jensen, Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1989.

[14] T. Kato, "*On Schrödinger equations. II. H^s-solutions and unconditional well-posedness*," J. d'Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[15] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, "*On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*", Duke Math. J. **106**(2001), 627–633.

[16] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, "*Analyticity of submakovian semigroups*", Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097–1104.

[17] R.M. Miura, "*Korteweg-de Vries equation and generalizations, I: A remarkable explicit nonlinear transformation*", J. Math. Phys. **9**(1968), 1202–1204.

[18] M. Nakamura and T. Ozawa, "*Nonlinear Schrösinger equations in the Sobolev space of critical order*," J. Funct. Anal. **155**(1998), 364–380.

[19] H. Pecher, "*Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s*," Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **67**(1997), 259–296.

[20] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of wave equation*, Duke Math. J. **44**(1977), 705–714.

[21] Y. Tsutumi, "*L^2 solutions for nonlinear Scrödinger equations and nonlinear groups*", Funk. Ekva. **30**(1987), 115–125.

[22] Y. Tsutsumi, "*Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations*," Nonlinear Anal. TMA **11**(1987), 1143–1154.

[23] Y. Tsutsumi, "*The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation with measure as initial data*", SIAM J. Math. Anal. **20**(1989), 582–588.

[24] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys. **110**(1987), 415–426.