数理解析研究所講究録
1479 巻 2006 年 20-25

周期係数2階楕円型方程式のグリーン関数の遠方での漸近形

村田 實 (Minoru Murata)
東京工業大・理 Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

土田 哲生 (Tetsuo Tsuchida)
名城大・理工 Department of Mathematics, Meijo University

1. Introduction

$\mathbf{R}^d$ での2階楕円型作用素

$$L = -\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}) + c(x) = -\nabla \cdot a(x)\nabla + c(x),$$

を考える．ただし $d \geq 2$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_d)$ and $a(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1}^{d}$. 係数は $\mathbf{R}^d$ 上の実数値関数で $\mathbf{Z}^d$-周期, すなわち $a_{jk}(x+m) = a_{jk}(x)$ と $c(x+m) = c(x)$ が任意の $x \in \mathbf{R}^d$ と $m \in \mathbf{Z}^d$ で成り立つとする．$a(x)$ は対称な行列値の関数で

$$\mu|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \leq \mu^{-1}|\xi|^2, \quad x, \xi \in \mathbf{R}^d, \text{ for some } \mu > 0$$

を満たすとする．$c \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^d)$, $p > d/2$, を仮定する．このとき L は定義域が

$$D(L) = \{u \in H^1(\mathbf{R}^d); Lu \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$$

の，$L^2(\mathbf{R}^d)$ での自己共役作用素である．

Bloch の理論をふりかえる．$\xi \in \mathbf{R}^d$ に対し

$$L(\xi) = e^{-i\xi\cdot x}Le^{i\xi\cdot x} = -(\nabla + i\xi)\cdot a(x)(\nabla + i\xi) + c(x),$$
$$D(L(\xi)) = \{u \in H^1(\mathbf{T}^d);\ L(\xi)u \in L^2(\mathbf{T}^d)\}$$

とする．このとき $\{L(\xi)\}$ は analytic family of type (B) ([Ka]) である．また $L(\xi)$ はコンパクトなレゾルベントをもつ $L^2(\mathbf{T}^d)$ 上の自己共役作用素である．$L(\xi)$ の固有値を重複をこめて

$$\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \cdots$$

とする．$\lambda_n(\xi)$ は連続関数で $2\pi\mathbf{Z}^d$-周期をもつ．また $\lambda_n(\xi) = \lambda_n(-\xi)$ が成立つ．L のスペクトルは

$$\sigma(L) = \cup_{n=1}^{\infty}\{\lambda_n(\xi); \xi \in (-\pi, \pi]^d\}$$

となる．さらに次が成立する．

(i) $\min_{\xi\in\mathbf{R}^d} \lambda_1(\xi) = \lambda_1(0) < \lambda_1(\xi)$ for $\xi \in [-\pi, \pi]^d \setminus \{0\}$. [KS]

(ii) $\lambda_1(\xi)$ は $\{\xi \in \mathbf{R}^d; \lambda_1(\xi) < \min_{\xi\in\mathbf{R}^d} \lambda_2(\xi)\}$ で実解析的で，nondegenerate な固有値である．

(iii) $\mathrm{Hess}\lambda_1(0)$ は positive definite である．[Pi]

W_λ を $\xi=0$ を含む $\{\xi\in\mathbf{R}^d; \lambda_1(\xi)<\lambda\}$ の連結成分とし，

$$\lambda_{conv} := \sup\Big\{\lambda' \le \min_{\xi\in\mathbf{R}^d}\lambda_2(\xi);\ \text{for any } \lambda_1(0)<\lambda<\lambda',$$
$$\text{(i) Hess}\,\lambda_1(\xi) \text{ is positive definite on } W_\lambda;$$
$$\text{(ii) } \cup_{m\in\mathbf{Z}^d}(W_\lambda+2\pi m)=\{\xi\in\mathbf{R}^d;\lambda_1(\xi)<\lambda\}\Big\}.$$

とおく．そのとき $\lambda_1(0)<\lambda_{conv}$ であり，$\lambda_1(0)<\lambda<\lambda_{conv}$ ならば $\overline{W_\lambda}$ はコンパクトな強凸集合である．$X_\lambda := \partial W_\lambda$ とおく．X_λ は $N(\xi)=-\nabla\lambda_1(\xi)/|\nabla\lambda_1(\xi)|$, $\xi\in X_\lambda$, で向き付けされた超曲面みなし，$K_\lambda(\xi)$ を X_λ の ξ でのガウス曲率とする．$s\in\mathbf{S}^{d-1}$ に対し，$\xi_s\in X_\lambda$ が $s=\nabla\Lambda(\xi_s)/|\nabla\Lambda(\xi_s)|$ となるようにただひとつ存在する．$u_\xi(x)\in H^1(\mathbf{T}^d)$ を $\lambda_1(\xi)$ に対する固有関数，すなわち，$(L(\xi)-\lambda_1(\xi))u_\xi(x)=0$ とする．$u\in L^2(\mathbf{T}^d)$ に対し $\|u\|^2=\int_{\mathbf{T}^d}|u(x)|^2dx$ とする．$G^{(k)}_{\lambda\pm i0}(x,y)$ は $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\frac{d}{d\lambda})^k(L-(\lambda\pm i\varepsilon))^{-1}$ の積分核とする．この極限の存在は [Th, GN] においても知られている．つぎの定理が目的である．

Main Theorem. $\lambda_1(0)<\lambda<\lambda_{conv}$ とする．$|x-y|\to\infty$ において

$$G^{(k)}_{\lambda+i0}(x,y)=\left(\frac{i|x-y|}{|\nabla\lambda_1(\xi_s)|}\right)^k\frac{e^{i\pi(3-d)/4}e^{i(x-y)\cdot\xi_s}}{(2\pi|x-y|)^{(d-1)/2}}\frac{1}{|\nabla\lambda_1(\xi_s)|\sqrt{K_\lambda(\xi_s)}}\frac{u_{\xi_s}(x)\overline{u_{\xi_s}(y)}}{\|u_{\xi_s}\|^2}$$
$$\times(1+O(|x-y|^{-1})),$$

がなりたつ，ここで $s=(x-y)/|x-y|$.

Remark 1. $\lambda<\lambda_1(0)$ あるいは，$\lambda=\lambda_1(0)$, $d\ge 3$, のときは，グリーン関数の漸近形はすでに知られている ([MT]).

Remark 2. $G_{\lambda-i0}(x,y)=\overline{G_{\lambda+i0}(y,x)}$ より，$G_{\lambda-i0}(x,y)$ の漸近形も求められる．

Remark 3. 漸近展開

$$G_{\lambda+i0}(x,y)=\frac{e^{i\pi(3-d)/4}e^{i(x-y)\cdot\xi_s}}{(2\pi|x-y|)^{(d-1)/2}}\frac{1}{|\nabla\lambda_1(\xi_s)|\sqrt{K_\lambda(\xi_s)}}$$
$$\times\left(\frac{u_{\xi_s}(x)\overline{u_{\xi_s}(y)}}{\|u_{\xi_s}\|^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{g_j(x,y)}{|x-y|^j}+O(|x-y|^{-n-1})\right)$$

も停留位相法の高次の項の計算により，原理的には求められる．関数 $g_j(x,y)$ は $\lambda_1(\xi)$ と $\dfrac{u_\xi(x)\overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2}$ の $\xi=\xi_s$ での導関数で書ける．

2. Sketch of the proof

$L^2(\mathbf{R}^d)$ から $L^2((-\pi,\pi]^d,\frac{d\xi}{(2\pi)^d};L^2(\mathbf{T}^d))$ への作用素 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U}f(\xi,x):=\sum_{m\in\mathbf{Z}^d}f(x-m)e^{-i(x-m)\cdot\xi}$$

で定義する．$\mathcal{U}$ はユニタリ作用素であり

$$\mathcal{U}^{-1}g(x) := \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{ix\cdot\xi} g(\xi,x)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^d}, \quad g(x,\xi) \in L^2((-\pi,\pi]^d; L^2(\mathbf{T}^d))$$

となる．$\varepsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned}(L-(\lambda+i\varepsilon))^{-1}f(x) &= \mathcal{U}^{-1}(L(\xi)-(\lambda+i\varepsilon))^{-1}\mathcal{U}f(x)\\ &= \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{ix\cdot\xi}(L(\xi)-(\lambda+i\varepsilon))^{-1}\mathcal{U}f(x)\frac{d\xi}{(2\pi)^d},\end{aligned}$$

と書ける．さらに ξ が X_λ の近傍にあるとき

$$(L(\xi)-(\lambda+i\varepsilon))^{-1} = \frac{P(\xi)}{\lambda_1(\xi)-\lambda-i\varepsilon} + Q_{\lambda+i\varepsilon}(\xi),$$

ただし

$$\begin{aligned}P(\xi) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{|z'-\lambda|=\delta}(L(\xi)-z')^{-1}dz',\\ Q_z(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z'-\lambda|=2\delta}\frac{(L(\xi)-z')^{-1}}{z'-z}dz'\end{aligned}$$

と書く．$P(\xi)$ は固有空間 $\{u \in L^2(\mathbf{T}^d); (L(\xi)-\lambda_1(\xi))u = 0\}$ への直交射影であるので，$P(\xi)$ の積分核 $p(\xi; x, y)$ は

$$p(\xi; x, y) = \frac{u_\xi(x)\overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2}, \quad x, y \in \mathbf{T}^d$$

と書ける．したがって，ψ を X_λ の近傍での cutoff 関数として，

$$\begin{aligned}G_{\lambda+i\varepsilon}(x,y) &= \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}\frac{\psi(\xi)p(\xi;x,y)}{\lambda_1(\xi)-\lambda-i\varepsilon}\frac{d\xi}{(2\pi)^d}\\ &+ \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}\Big[(1-\psi(\xi))R(\xi,\lambda+i\varepsilon;x,y) + \psi(\xi)e^{ix\cdot\xi}Q_{\lambda+i\varepsilon}(\xi;x,y)\Big]\frac{d\xi}{(2\pi)^d},\end{aligned}$$

と書ける．ただし $R(\xi,z;x,y)$ と $Q_z(\xi;x,y)$ は $(L(\xi)-z)^{-1}$ と $Q_z(\xi)$ の積分核である．この第二項は，任意の N で $O(|x-y|^{-N})$ となる．第一項について述べる．簡単のため $d=2$ とし，$s = (x-y)/|x-y|$ は $e_1 = (1,0)$ の近傍とする．$\psi(\xi) = \psi_A(\xi) + \psi_{A'}(\xi) + \psi_B(\xi)$ と分ける，ここで ψ_A は ξ_{e_1} 近傍での cutoff 関数, $\psi_{A'}$ は $-\xi_{e_1}$ 近傍での cutoff 関数とする．積分変数を $(\xi_1,\xi_2) \to (\xi_1,\eta_2)$ と変換する，ただし $\eta_2 = \lambda(\xi)-\lambda$. すると ξ_1 変数に関する部分積分により

$$\begin{aligned}&\int_{(-\pi,\pi]^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}\frac{\psi_B(\xi)p(\xi;x,y)}{\lambda_1(\xi)-\lambda-i\varepsilon}\frac{d\xi}{(2\pi)^d}\\ &= \int e^{i|x-y|[s_1\xi_1+s_2\xi_2(\xi_1,\eta_2)]}\frac{p_B(\xi_1,\eta_2;x,y)}{\eta_2-i\varepsilon}d\xi_1 d\eta_2\\ &= (-i|x-y|)^{-N}\int e^{i|x-y|[s_1\xi_1+s_2\xi_2(\xi_1,\eta_2)]}\frac{T^N p_B(\xi_1,\eta_2;x,y)}{\eta_2-i\varepsilon}d\xi_1 d\eta_2\\ &= O(|x-y|)^{-N} \quad \text{for } (x-y)/|x-y| \sim e_1;\end{aligned}$$

となる．ここで，T はある微分作用素で，また上の計算で $\partial_{\xi_1}[s_1\xi_1 + s_2\xi_2(\xi_1, \eta_2)] \neq 0$ を用いた．

$\eta_1 = \lambda_1(\xi) - \lambda$ とする変数変換 $(\xi_1, \xi_2) \to (\eta_1, \xi_2)$ によって，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\int_{(-\pi,\pi]^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} \frac{\psi_A(\xi)p(\xi; x, y)}{\lambda_1(\xi) - \lambda - i\varepsilon} \frac{d\xi}{(2\pi)^d}$$
$$= \int e^{i[(x-y)_1\xi_1(\eta_1,\xi_2)+(x-y)_2\xi_2]} \frac{p_A(\eta_1, \xi_2; x, y)}{\eta_1 - i\varepsilon} d\eta_1 d\xi_2$$
$$\to I_A(x, y) = \int e^{i[(x-y)_1\xi_1(\eta_1,\xi_2)+(x-y)_2\xi_2]} p_A(\eta_1, \xi_2; x, y)[\mathrm{p.v.}\frac{1}{\eta_1} + i\pi\delta(\eta_1)] d\eta_1 d\xi_2$$

この積分の評価に次の補題をもちいる．

Lemma. $b(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ とし，$\varphi(x)$ を実数値 $C^\infty(\mathbf{R})$-関数とする．$supp\, b$ 上で $\varphi'(x) > 0$ とする．このとき任意の自然数 N に対し,$\nu \to \pm\infty$ において，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi(\eta_1)} b(\eta_1) \mathrm{p.v.}\frac{1}{\eta_1} d\eta_1 = \pm i\pi e^{i\nu\varphi(0)} b(0) + O(|\nu|^{-N}).$$

Proof. $\varphi(x) = x$ の場合は, 任意の自然数 N で,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} b(x) \mathrm{p.v.}\frac{1}{x} dx = -i\sqrt{\pi/2}\,(\mathrm{sgn}\ \nu * \hat{b})(-\nu) = \pm i\pi b(0) + O(|\nu|^{-N})$$

as $\nu \to \pm\infty$. ただし $\hat{b}(\nu)$ は b のフーリエ変換．一般の φ の場合は，これをテイラー展開で近似すればよい．$\square$

このLemmaより，任意の自然数 N に対し $(x-y)/|x-y| \sim e_1$ のとき

$$I_A(x, y) = 2i\pi \int_{\mathbf{R}} e^{i[(x-y)_1\xi_1(0,\xi_2)+(x-y)_2\xi_2]} p_A(0, \xi_2; x, y) d\xi_2 + O(|x-y|^{-N}).$$

この ξ_2-積分に停留位相法を適用して, $G_{\lambda+i0}(x, y)$ の主要部を得る．同様にして,

$$I_{A'} = O(|x-y|^{-N})$$

がわかる．

3. The limiting absorption principle

上の証明の副産物として極限吸収原理が直接的に導かれる．

B_s, $s \in \mathbf{R}$, を

$$B_s := \{v \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^d); \|v\|_{B_s} := \sum_{j=1}^{\infty} R_j^s (\int_{R_{j-1}<|x|<R_j} |v(x)|^2 dx)^{1/2} < \infty\},$$

ただし $R_0 = 0$, $R_j = 2^{j-1}$, $j > 0$, で与えられる空間とする．共役空間 B_s^* は,

$$B_s^* = \{v \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^d); \|v\|_{B_s^*} := \sup_{j\geq 1} R_j^{-s} (\int_{R_{j-1}<|x|<R_j} |v(x)|^2 dx)^{1/2} < \infty\}$$

である．

Theorem. $\lambda_1(0) < \lambda < \lambda_{conv}$ とする．$(\frac{d}{d\lambda})^k(L-(\lambda\pm i0))^{-1}$ は $B_{\frac{1}{2}+k}$ から $B^*_{\frac{1}{2}+k}$ への有界作用素である．

Proof. $|x-y|<1$ では，

$$|G_{\lambda+i0}(x,y)| \le \begin{cases} C|\log|x-y||, & d=2, \\ C|x-y|^{-(d-2)}, & d\ge 3, \end{cases}$$

なので $G_{\lambda+i0}(x,y)\chi_1(|x-y|)$ を積分核とする作用素は $L^2(\mathbf{R}^d)$ での有界作用素である．$\chi_1(r)$ は $r=0$ 近傍で 1 の cutoff 関数である．

$|x-y|$ が大きく $(x-y)/|x-y|\sim e_1$ のとき，任意の自然数 N に対して

$$\begin{aligned} G_{\lambda+i0}(x,y) &= I_A(x,y)+O(|x-y|^{-N}) \\ &= 2i\pi\int_{\mathbf{R}^{d-1}} e^{i[(x-y)_1\xi_1(0,\xi_2)+(x-y)_2\xi_2]}p_A(0,\xi_2;x,y)d\xi_2+O(|x-y|^{-N}), \end{aligned}$$

であった．さらにある $C(\mathbf{T}^d)$-値の滑らかな φ, ψ を用いて，$p_A(0,\xi_2;x,y)=\varphi(\xi_2,x)\psi(\xi_2,y)$ とかける．χ を e_1 方向の錐に台をもつ cutoff 関数とする．任意の $f,g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ に対し

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} g(x)dx\int_{\mathbf{R}^d}\chi(x-y)I_A(x,y)f(y)dy \\ &= \iint_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^{d-1}}\chi(x-y)e^{i[(x-y)_1\xi_1(0,\xi_2)+(x-y)_2\xi_2]}\varphi(\xi_2,x)g(x)\psi(\xi_2,y)f(y)dx\,dy\,d\xi_2 \end{aligned}$$

を評価する．プランシェレルの公式と合成積に関する公式により，上の積分は絶対値において，

$$\le C\int\|g(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^{d-1})}dx_1\int\|f(y_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^{d-1})}dy_1\le C\|f\|_{B_{\frac{1}{2}}}\|g\|_{B_{\frac{1}{2}}},$$

を得る．□

4. The one dimensional case

$d=1$ の場合は，バンド構造をなすスペクトルの端点を除いて，グリーン関数は λ_n と対応する固有値をもちいて，書き下される．

$$L=-\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx}+c(x)$$

において，$a(x)\ge\mu>0$ は連続関数 $c(x)$ は区分的に連続とする．$\mu_1<\nu_1\le\mu_2<\nu_2\le\mu_3<\nu_3\cdots$ があり，

$$\sigma(L)=\cup_{n=1}^\infty[\mu_n,\nu_n] \text{ and } [\mu_n,\nu_n]=\{\lambda_n(\xi);0\le\xi\le\pi\}$$

である．n が奇数のとき，$\lambda_n(\xi)$ は $[0,\pi]$ で増加関数，n が偶数のとき，$\lambda_n(\xi)$ は $[0,\pi]$ で減少関数である．

Theorem. λ は $\sigma(L)$ の内点とする，すなわちある n で $\lambda \in (\mu_n, \nu_n)$ か $\lambda = \nu_n = \mu_{n+1}$ であるとする．

(i) ある $\xi \in (0,\pi)$ と奇数 n で $\lambda = \lambda_n(\xi) \in (\mu_n, \nu_n)$ のとき．

$$G_{\lambda+i0}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ie^{i(x-y)\xi}}{\lambda_n'(\xi)} \dfrac{u_\xi(x)\overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2} & y \le x \\ \dfrac{ie^{i(y-x)\xi}}{\lambda_n'(\xi)} \dfrac{u_\xi(y)\overline{u_\xi(x)}}{\|u_\xi\|^2} & x \le y \end{cases}$$

ここで u_ξ は $\lambda_n(\xi)$ に対する固有関数である．

(ii) ある $\xi \in (0,\pi)$ と偶数 n で $\lambda = \lambda_n(\xi) \in (\mu_n, \nu_n)$ のとき．

$$G_{\lambda+i0}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ie^{i(y-x)\xi}}{|\lambda_n'(\xi)|} \dfrac{u_\xi(y)\overline{u_\xi(x)}}{\|u_\xi\|^2} & y \le x \\ \dfrac{ie^{i(x-y)\xi}}{|\lambda_n'(\xi)|} \dfrac{u_\xi(x)\overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2} & x \le y \end{cases}$$

ここで u_ξ は $\lambda_n(\xi)$ に対する固有関数である．

(iii) $\lambda = \lambda_n(\pi) = \nu_n = \mu_{n+1}$ のとき．

$$G_{\lambda+i0}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ie^{i(x-y)\pi}}{\lambda_n'(\pi)} \dfrac{u_\pi(x)\overline{u_\pi(y)}}{\|u_\pi\|^2} & y \le x \\ \dfrac{ie^{i(y-x)\xi}}{\lambda_n'(\pi)} \dfrac{u_\pi(y)\overline{u_\pi(x)}}{\|u_\pi\|^2} & x \le y \end{cases}$$

ここで $u_\pi = \lim_{\xi\to\pi} u_\xi$，ただし u_ξ は $\xi = \pi$ の近傍の解析関数で，$\xi \le \pi$ で $(L(\xi)-\lambda_n(\xi))u_\xi = 0$，$\pi < \xi$ で $(L(\xi) - \lambda_{n+1}(\xi))u_\xi = 0$，を満たすものである．

(iv) $\lambda = \lambda_n(0) = \nu_n = \mu_{n+1}$ のとき．

$$G_{\lambda+i0}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{iu_0(y)\overline{u_0(x)}}{|\lambda_n'(0)|\|u_0\|^2} & y \le x \\ \dfrac{iu_0(x)\overline{u_0(y)}}{|\lambda_n'(0)|\|u_0\|^2} & x \le y \end{cases}$$

ここで $u_\pi = \lim_{\xi\to\pi} u_\xi$，ただし u_ξ は $\xi = 0$ の近傍の解析関数で，$0 \le \xi$ で $(L(\xi)-\lambda_n(\xi))u_\xi = 0$ $\xi < 0$ で $(L(\xi) - \lambda_{n+1}(\xi))u_\xi = 0$ を満たすものである．

References

[GN] C. Gérard and F. Nier, *The Mourre theory for analytically fibered operators*, J. Funct. Anal. **152** (1998), 202–219.

[Ka] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators (Second Edition)*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[KS] W. Kirsch and B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **75** (1987), 396–410.

[MT] M. Murata and T. Tsuchida, *Asymptotics of Green functions and Martin boundaries for elliptic operators with periodic coefficients*, J. Differential Equations **195** (2003), 82–118.

[Pi] R.G. Pinsky, *Second order elliptic operators with periodic coefficients: Criticality theory, perturbations, and positive harmonic functions*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 80–107.

[Th] L. E. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a cristal*, Comm. Math. Phys. **33** (1973), 335–343.