

# Renormalization Group Analysis of a Noisy Kuramoto-Sivashinsky Equation

上之 和人 (kazuto Ueno)

名古屋大学大学院工学研究科 計算理工学専攻  
Department of Computational Science and Engineering,  
Graduate School of Engineering, Nagoya University

坂口 英継 (Hidetsugu Sakaguchi)

九州大学総合理工学府  
Department of Applied Science for Electronics and Materials,  
Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

岡村 誠 (Makoto Okamura)

九州大学応用力学研究所  
Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

## 1 はじめに

ゆっくりした長波長の運動を記述する少数自由度の方程式をもとの多自由度の系から取り出す問題は、パターン形成の物理を含む統計物理学、多体系の集団運動論等、物理学のほとんどあらゆる分野で基本的な問題である。例えば、流体力学の基礎方程式から振幅方程式、位相拡散方程式と、段階的に巨視的方程式を得てパターンを記述しようとする立場がある [1]。これらの進む方向はつねに下の階層の情報を縮約して、新しく上の階層の構造を記述する有効方程式を探し出すことである。

図 1 (a) は、層流中に円柱障害物を置いたときその後流に観測される実験室系でのカルマン渦列である。カルマン渦列は、流れを特徴づける無次元パラメーター、レイノルズ数  $Re = UD/\nu$  が  $10^2$  程度で観測されることが知られている [2]。ここで、 $U$  は流体の流速、 $L$  は円柱の直径、 $\nu$  は流体の動粘性係数である。このカルマン渦列とよく類似した流れが実験室規模でなくても見られることがある。図 1 (b) は、晩秋から初春にかけて大陸から北西風が吹くときに済州島 (Cheju Island) の風下にできた巨大なカルマン渦列であり、雲で可視化されている [3]。この場合、風速  $U \sim 10\text{m/s}$ 、済州島のサイズ  $L \sim 10^4\text{m}$ 、空気の動粘性係数  $\nu \sim 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$  より  $Re \sim 10^{10}$  にも達し、これは完全な乱流領域での現象となる。レイノルズ数の大きさが同じ流れは、たとえ  $U$ ,  $L$ ,  $\nu$  のそれぞれの大きさが異なっても、同じ流れ模様になるのは流れの相似性の現われである。しかしこの例は、類似した流れ構造が見られるにもかかわらず、レイノルズ数が 8 桁も異なっていてレイノルズの相似則を満たさない。実験室内の層流をミクロに見れば分子の不規則な熱運動が見えるが、この熱運動が分子粘性の原因である。大気中ではこれと同様な現象が巨視的なスケールで行われており、小規模で不規則な乱流の渦が分子粘性と同じような作用を生み出す。すなわち、大気中のカルマン渦列は乱流場を平均的にみたとときの構造なのである。レイノルズの相似則がこの大気中のカルマン渦列についても満たされるためには、 $\nu = UL/Re \sim (10\text{m/s}) \times (10^4\text{m})/10^2 \sim 10^3\text{m}^2/\text{s}$  となり、分子粘性に比べて 8 桁も大きな値をとらなければならない。この異常な粘性は大気中の乱流が起源であり渦粘性と呼ばれている [4]。

乱流場の適切な情報の縮約あるいはモデル化では、考えているスケールよりも十分小さいスケールの乱流運動を渦粘性として取り込んだ縮約された方程式を導き出す必要がある。渦粘性は定性的にはレイノルズストレ

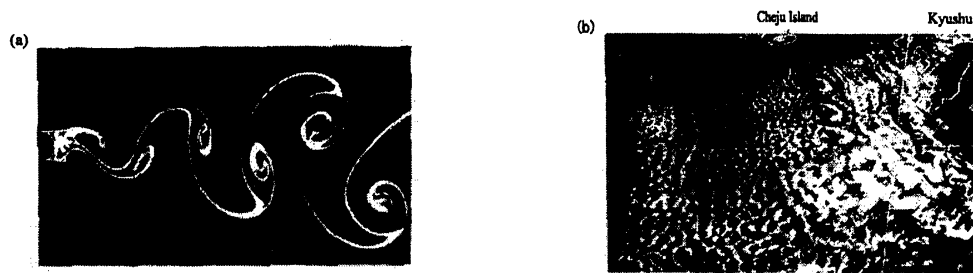


図1 (a) 円柱の後にできるカルマン渦列 ( $Re = 140$ ) . (b) 済州島の風下にできるカルマン渦列. 文献 [3] より転載.

スで説明されてきたが, 流体力学の基礎方程式に基づいてこの異常性が定量的に説明されたことはない. 渦は Navier-Stokes 方程式のような非線形方程式によって記述され, 本来決定論的なものから派生した非線形相互作用によって乱雑化したもので, 多自由度のカオスである. ここでは, Navier-Stokes 乱流から情報の縮約された有効方程式を導く代わりに, 同じく決定論的な非線形方程式でその解は時空カオス的に振舞うことが知られている Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式から有効方程式を導く問題を考えることにする. 次に述べる Yakhot の予想と呼ばれる問題はその典型例である [5]. KS 方程式は, 化学乱流や火炎面の伝播, 重力下での液膜のダイナミクスを記述することが知られている [6, 7].

界面ラフニングに関する連続体モデルとして, Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式 [8] と KS 方程式が知られている. KPZ 方程式は正の表面張力係数を持ち, 成長の駆動力となるのはランダム力である. 一方, KS 方程式は完全に決定論的な方程式である. 負の表面張力係数をもつため自発的に不安定になる. このような違いにもかかわらず, Yakhot は,  $1+1$  (空間+時間) 次元の KS 方程式の巨視的スケールの統計的性質は, KPZ 方程式 (あるいは, ノイズのある Burgers 方程式) のそれと等価であることを予想した [5, 9, 10]. 負の表面張力により生成された時空カオスあるいは揺らぎがくりこまれて, 長波長側では有効な (くりこまれた) 正の表面張力と有効な (くりこまれた) ノイズの項を持つ有効方程式になるとというのがこの予想である. Yakhot の予想を証明するために,  $1+1$  次元の KS 方程式に対して数多くの数値的検証がなされてきた [11, 12, 13, 14]. 実際に,  $1+1$  次元の KS 方程式の長波長の特徴を記述する有効方程式が KPZ 方程式になると仮定して, その中の有効パラメータである表面張力係数やノイズの強さの値が, 粗視化の方法 [11, 13] や他の方法 [12, 14] で評価された. しかし, Zaleski らの計算はシステムサイズが小さかったために KS 方程式から KPZ 方程式の動的スケーリングを見つけることができなかった [11, 13, 14]. Sneppen らは, もっと大きなシステムサイズで計算し KPZ 方程式の動的スケーリングへのクロスオーバーの始まりを KS 方程式から観察した. しかし, まだシステムサイズと計算時間の制約のために, 彼らの得た結果 ([12] の Fig. 2 を参照) が KPZ と同じ動的スケーリング指数なのかどうかをはっきりと判別することはできない.

Yakhot の予想に関する理論的な観点からの取り組みのひとつに, Yakhot 自身のくりこみ群 (RG) 的アプローチがある [5]. 残念ながら, KS 方程式を制御不能な発散を持つ不安定なプロパゲーターのまわりの摂動理論で扱っていたために, Yakhot 自身の証明は確かなものではなかった. 一方, L'vov らは, KS 方程式の長時間, 長距離極限でのスケーリング特性を, Mode Coupling Theory (MCT) [15] や流体乱流へ適用された Kraichnan の Direct Interaction Approximation (DIA) 理論 [16] のような類の方法で調べた. その方法では, 最初からくりこまれた応答関数や相関関数の存在を仮定して, 自己エネルギー関数に現れる裸の応答関数や相関関数をそれらに置き換え, Dyson-Wyld 方程式からセルフコンシステントな方法でスケーリング特性を

解析している。自己エネルギー関数の積分を評価する際に、波数空間で局所的な相互作用が支配的な場合と非局所的な相互作用が支配的な場合に分けて調べている。その結果、1+1次元のKPZとKS方程式は両方とも局所的な相互作用が支配的であり、KS方程式は長距離、長時間でKPZ方程式と同じスケール特性をもち得ると結論づけている [17, 18].

Yakhotの予想に答えるために別の試みもあった。KS方程式ではなくて、ノイズをもつKS方程式とKPZ方程式が同じ普遍クラスに入るかどうかは1+1次元の場合について数値的 [19, 20], 理論的 [21] に調べられた。ひとつは、高エネルギーの粒子を物体に衝突させて表面から原子を放出させることによって侵食された界面の動的ラフニングの研究である。これによると、侵食モデルの初期と後期段階のダイナミクスは、ノイズのあるKS方程式から得られたものと同じになることがわかった [19]。もうひとつは、気相成長によるある結晶面上での孤立したステップの蛇行を記述する確率論的な非線形方程式の数値シミュレーションである。その非線形方程式は、ある臨界過飽和以上ではノイズのあるKS方程式の形をとった。ノイズのないKS方程式から得られたステップのラフネスを特徴づけるラフネス関数は、非平衡度が増すにつれて、ノイズのあるKS方程式から得られたものと一致した ([20] の Fig. 1 を参照)。これらの結果は、ノイズのあるKS方程式はノイズのないKS方程式と同じように振舞うことを示唆している。さらに、[19, 20] では、ノイズのあるKS方程式から求めた成長界面の高さ  $h$  の定常状態のスペクトル  $\langle h_k h_{-k} \rangle$  は、小さな波数  $k$  に対して、KPZ や決定論的なKS方程式の場合に見られる  $k^{-2}$  スケールングに従うことがわかった。ここで  $h_k$  は、 $h$  のフーリエ変換の波数  $k$  の成分である。しかし、[19] では、動的スケールングの特性ははっきりと見つかっていないし、[20] では調べられていない。これは、ノイズの強さが小さいか数値シミュレーションのシステムサイズと時間の制約のせいかもしれない。ノイズをもつKS方程式とKPZ方程式間の関係を理論的に明らかにするために、非保存的なノイズを加えたKS方程式に動的くりこみ群が適用された。その結果、ノイズのあるKS方程式に含まれるパラメータのRG flow方程式から、ある安定な固定点が見つかった [21]。それはKPZの固定点とみなされたが、彼らの求めた1+1次元での界面のラフネス指数や動的スケールング指数の値は、KPZの固定点での厳密な値とは違っていた。

ノイズのあるKS方程式とノイズのないKS方程式の唯一の違いは、決定論的なノイズ (すなわち、カオス) と確率論的なノイズの両方から生じる有効なノイズにある [18]。これらふたつのノイズ間の相互作用がどのように界面のラフネスを決定するのかを理解することは重要な問題である。以下で我々は、[21] のくりこみ群の解析で得られた結果の問題点を指摘し、非保存的なノイズに新たに保存的なノイズを加えたKS方程式に動的くりこみ群を適用する。くりこみ群解析の結果から、決定論的なKS方程式からKPZのスケールング特性を見出す際の数値シミュレーションにおけるシステムサイズと時間の制約を克服する方法を紹介する [22].

## 2 くりこみ群解析

### 2.1 RG flow 方程式

1+1次元のノイズのあるKS方程式は

$$h_t = \nu h_{xx} - K h_{xxx} + \frac{\lambda}{2} (h_x)^2 + \eta(x, t), \quad (1)$$

である。ここで、 $h(x, t)$  は時刻  $t$  での基板上の位置  $x$  上の界面の高さであり、 $\nu$  は負の表面張力係数、 $K$  は正の表面拡散係数、 $\lambda$  は非線形性の強さを表すパラメータである。また下添え字は  $x, t$  についての偏微分を表

す.  $\eta(x, t)$  は, 平均がゼロで, 相関が

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \left\{ 2D - 2D_d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (2)$$

であるガウスのホワイトノイズである.  $\eta$  は非保存的ノイズと保存的ノイズからなっており, それぞれのノイズの強さを  $D$ ,  $D_d$  とする [23]. (2) 式の  $D_d$  の項は, Cuerno らのくりこみ群の計算 [21] では考慮されていない. 新たにこの項を導入することによって, 1次元の KPZ 方程式で成り立つとされる揺動散逸定理を満たすセルフコンシステントなくりこみ群の結果が得られることを以下では示す.

$u = -h_x$ ,  $f = -\eta_x$  とおくと, (1) 式に等価な方程式が得られる.

$$u_t = \nu u_{xx} - K u_{xxxx} - \lambda u u_x + f(x, t). \quad (3)$$

$\lambda = 1$  のとき, (3) 式 of 非線形項は 1次元の Navier-Stokes 方程式の類である. そのとき,  $u(x, t)$  は圧縮場中の 1次元速度場と解釈できる [9, 10]. (3) 式から, 波数  $k$  と周波数  $\omega$  をもつフーリエモードに対する方程式は次のように書ける.

$$(-i\omega + \nu k^2 + K k^4) u(k, \omega) = f(k, \omega) - \frac{i\lambda}{2} k \int_{|p| \leq \Lambda_0} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} u(p, \Omega) u(k-p, \omega - \Omega). \quad (4)$$

ここで,  $\Lambda_0 \equiv \pi/\Delta x$  はフーリエ空間での最大波数であり,  $\Delta x = L/N$  は実空間での格子間隔である.  $L$  はシステムサイズの大きさ,  $N$  は格子点の数である. (2) 式から,  $f(x, t)$  のフーリエ変換の相関は次式のようになる.

$$\langle f(k, \omega) f(k', \omega') \rangle = 2(2\pi)^2 (D k^2 + D_d k^4) \delta(k + k') \delta(\omega + \omega'). \quad (5)$$

通常のくりこみ群の手続きに従って [8, 9, 21, 23], はじめに,  $u(k, \omega)$  を  $u^>(k, \omega)$  と  $u^<(k, \omega)$  に分解する.  $u^>(k, \omega)$  は  $\Lambda(l) \equiv \Lambda_0 e^{-l} \leq |k| \leq \Lambda_0$  を満たす波数成分のみを持ち,  $u^<(k, \omega)$  は  $|k| \leq \Lambda(l)$  を満たす波数成分のみを持つ. ここで,  $l \geq 0$  はスケールパラメーターである. 同様に,  $f(k, \omega)$  も  $f^>(k, \omega)$  と  $f^<(k, \omega)$  に分解する. (5) 式の統計的性質を使って, 速いモード  $u^>(k, \omega)$  を (4) 式から消去すると, 遅いモード  $u^<(k, \omega)$  のみを含む方程式が得られる.

$$\begin{aligned} [-i\omega + \nu k^2 + K k^4 + \Sigma(k, \omega)] u^<(k, \omega) &= f^<(k, \omega) - \frac{i\lambda}{2} k \int_{|p| \leq \Lambda(l)} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \\ &\times u^<(p, \Omega) u^<(k-p, \omega - \Omega). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,  $f^<(k, \omega)$  は

$$\langle f^<(k, \omega) f^<(k', \omega') \rangle = 2(2\pi)^2 [D k^2 + D_d k^4 + \Phi(k, \omega)] \delta(k + k') \delta(\omega + \omega'), \quad (7)$$

を満たす. (6) 式の  $\Sigma(k, \omega)$  と (7) 式の  $\Phi(k, \omega)$  は 1ループ近似で以下のようになる.

$$\begin{aligned} \Sigma(k, \omega) &= \lambda^2 \int_{\Lambda(l) \leq |p| \leq \Lambda_0} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} [k(k-p) |G_0(p, \Omega)|^2 G_0(k-p, \omega - \Omega) (D p^2 + D_d p^4) \\ &+ k p |G_0(k-p, \omega - \Omega)|^2 G_0(p, \Omega) (D(k-p)^2 + D_d(k-p)^4)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi(k, \omega) &= \lambda^2 \int_{\Lambda(l) \leq |p| \leq \Lambda_0} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} k^2 |G_0(p, \Omega)|^2 |G_0(k-p, \omega - \Omega)|^2 \\ &\times (D p^2 + D_d p^4) (D(k-p)^2 + D_d(k-p)^4). \end{aligned} \quad (9)$$

ここで,  $G_0(k, \omega) = 1/(-i\omega + \nu k^2 + Kk^4)$  は裸の応答関数である.

我々は,  $k \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$  の極限に対応する長距離, 長時間でのスケーリングの振る舞いに興味がある. はじめに (8) と (9) 式の右辺を  $\Omega$  について積分する. 次に  $\omega = 0$  とおき, (8) と (9) 式の積分結果を  $k^4$  までテイラー展開すると,  $\Sigma = \delta\nu k^2 + \delta K k^4$ ,  $\Phi = \delta D k^2 + \delta D_d k^4$  と表すことができる. (3) 式の線形部分から分散関係式  $\omega = -\nu k^2 - K k^4$  を得るが,  $\nu < 0$  のとき長波長側は不安定になり, 裸の応答関数  $G_0(k, \omega)$  は  $\omega = 0$  のとき波数  $k = 0$  と  $k = k_0 = (|\nu|/K)^{1/2}$  で発散する. このとき, この  $G_0(k, \omega)$  を使った摂動展開は破綻する. そのような発散を回避するために, L'vov や Procaccia らは, KS 方程式の解の存在と有界性に関する厳密な証明がある事実を利用して, 最初からくりこまれた応答関数と相関関数の存在を仮定した [17, 18]. そのため, 彼らの  $\Sigma(k, \omega)$  と  $\Phi(k, \omega)$  の中の応答関数と相関関数は最初からくりこまれたもので表されている. 一方, くりこみ群の方法では, (8), (9) 式の積分は無限小の波数殻  $\Lambda_0(1 - \delta l) \leq |k| \leq \Lambda_0$  内で行われるので, 裸の応答関数の特異性による発散を回避できる [21].  $\delta\nu, \delta K, \delta D, \delta D_d$  のすべてを  $\delta l$  の 1 次まで計算し, くりこまれたパラメーター  $\nu^< \equiv \nu + \delta\nu, K^< \equiv K + \delta K, D^< \equiv D + \delta D, D_d^< \equiv D_d + \delta D_d$  を定義する. (3) 式のガリレイ不変性により  $\lambda$  には粗視化による補正はないので,  $\lambda^< \equiv \lambda$  である [9].

粗視化しパラメーターをくりこんだ後の次のステップは, すべてのパラメーターを再スケールすることである. 空間, 時間, 場の量を微小量だけスケール変換すると,  $\tilde{k} = (1 + \delta l)k, \tilde{\omega} = (1 + z\delta l)\omega, \tilde{u}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = [1 - (\alpha + z)\delta l]u^<(k, \omega)$  と変換される. ここで,  $\alpha$  は界面のラフネス指数,  $z$  はダイナミック指数と呼ばれている [23]. 粗視化と再スケールによってパラメーターは,  $\tilde{\nu} = [1 + (z - 2)\delta l]\nu^<, \tilde{K} = [1 + (z - 4)\delta l]K^<, \tilde{\lambda} = [1 + (\alpha + z - 2)\delta l]\lambda^<, \tilde{D} = [1 + (z - 2\alpha - 1)\delta l]D^<, \tilde{D}_d = [1 + (z - 2\alpha - 3)\delta l]D_d^<$  のように変換されたことになる. ここで,  $\sim$  のついた変数やパラメーターは再スケールしたものを表し, ついていないものはもともとのスケールでの変数とパラメーターを表すものとする. 極限  $\delta l \rightarrow 0$  で, ノイズのある KS 方程式に含まれるパラメーターのくりこみ群変換による変化を記述する RG flow 方程式を得る.

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dl} = \tilde{\nu} \left\{ z - 2 + \frac{G}{F(1+F)^3} \left( 3 + F + (1-F)\frac{H}{G} \right) \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{d\tilde{K}}{dl} = \tilde{K} \left\{ z - 4 + \frac{G}{2(1+F)^5} \left( 26 - F + 2F^2 + F^3 + (2 - 21F + 6F^2 + F^3)\frac{H}{G} \right) \right\}, \quad (11)$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dl} = \tilde{\lambda} \{ \alpha + z - 2 \}, \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{D}}{dl} = \tilde{D} \left\{ z - 2\alpha - 1 + \frac{G}{(1+F)^3} \left( 1 + \frac{H}{G} \right)^2 \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{D}_d}{dl} = \tilde{D}_d \left\{ z - 2\alpha - 3 + \frac{G^2}{2H(1+F)^5} \right. \\ \left. \times \left( 16 + 3F + F^2 + 2(9 - 5F)\frac{H}{G} + (2 - 13F - F^2) \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, 無次元パラメーター,  $F(l) = \tilde{\nu}(l)/(\tilde{K}(l)\Lambda_0^2)$ ,  $G(l) = \tilde{\lambda}(l)^2\tilde{D}(l)/(4\pi\tilde{K}(l)^3\Lambda_0^7)$ ,  $H(l) = \tilde{\lambda}(l)^2\tilde{D}_d(l)/(4\pi\tilde{K}(l)^3\Lambda_0^5)$  を定義した. (10)-(14) 式から,  $F, G, H$  の RG flow 方程式を得る.

$$\frac{dF}{dl} = 2F + \frac{G}{2(1+F)^5} \left\{ 6 - 12F + 11F^2 - F^4 + (2 + 19F^2 - 8F^3 - F^4)\frac{H}{G} \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{dG}{dl} = 7G - \frac{G^2}{2(1+F)^5} \left\{ 76 - 7F + 4F^2 + 3F^3 + (2 - 71F + 14F^2 + 3F^3) \frac{H}{G} - 2(1+F)^2 \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right\}, \quad (16)$$

$$\frac{dH}{dl} = 5H + \frac{G^2}{2(1+F)^5} \left\{ 16 + 3F + F^2 - (60 + 7F + 6F^2 + 3F^3) \frac{H}{G} - (4 - 50F + 19F^2 + 3F^3) \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right\}. \quad (17)$$

ここで導入した無次元パラメーターには、 $f(l) = \tilde{K}(l)\Lambda_0^2/\tilde{\nu}(l)$ ,  $g(l) = \tilde{\lambda}(l)^2\tilde{D}(l)/(4\pi\tilde{\nu}(l)^3\Lambda_0)$ ,  $h(l) = \tilde{\lambda}(l)^2\tilde{D}_d(l)\Lambda_0/(4\pi\tilde{\nu}(l)^3)$  のような別の表し方もある。しかし、 $\tilde{\nu}$  がゼロに近づくときは、 $f(l)$ ,  $g(l)$ ,  $h(l)$  は発散するので、それらのパラメーターは便利なものではない [21]。  $F(l)$ ,  $G(l)$ ,  $H(l)$  とは、 $F(l) = 1/f(l)$ ,  $G(l) = g(l)/f(l)^3$ ,  $H(l) = h(l)/f(l)^3$  の関係があることに注意しておく。

## 2.2 RG flow 方程式の固定点

Cuerno らは、(2) 式の  $D$  の項のみを考慮して (1) 式のくりこみ群の計算を行った [21]。彼らの RG flow 方程式は、 $|\tilde{\nu}| \ll \tilde{K}\Lambda_0^2$  の極限で [24] の (7) 式に帰着するので正しいように見える。しかし、ここで得られた (15), (16) 式で  $\tilde{D}_d = 0$  (すなわち、 $H = 0$ ) とおいたものは、[21] の (20), (19) 式で  $d = 1$  とおいたものに帰着しない。故に、[21] で得られた結果についてコメントしておく必要がある。

$d = 1$  のとき、彼らは安定な固定点  $(F^*, G^*) = (-25.25, -722.8)$  を見つけ、 $z = 1.46$ ,  $\alpha = 0.54$ ,  $\beta = \alpha/z = 0.37$  の値を得た。彼らは、この値を KPZ の固定点とみなしたが、この  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  の値は、KPZ の固定点でのそれらの値から、それぞれ 2.7%, 8%, 12% ずれているし、 $F^*$ ,  $G^*$  が負の値なので、 $\tilde{\nu}^* > 0$ ,  $\tilde{K}^* < 0$  となる。このとき、 $\tilde{k} = (\tilde{\nu}^*/|\tilde{K}^*|)^{1/2}$  以上の波数で不安定なモードが発生することになる。しかも、 $\alpha = 0.54$  を 2.3 節で議論するパワースペクトルのスケーリング関数に代入すると、 $E(k) \propto k^{-0.08}$  となり、 $k \rightarrow 0$  の極限で一定値をとらない。このことは、 $d = 1$  のとき KPZ 方程式で成り立つはずの揺動散逸定理の結果に反する。

我々は、[21] の  $d = 1$  のときの RG flow 方程式は、(8), (9) 式で  $p \rightarrow p + k/2$ ,  $\Omega \rightarrow \Omega + \omega/2$  の置き換えをすることによって得られることを確認した。このような置き換えをするのは被積分関数が対称化されるためである。ただし [21] では、積分範囲を  $\Lambda(l) \leq |p| \leq \Lambda_0$  から  $\Lambda(l) \leq |p + k/2| \leq \Lambda_0$  に変更していないようである。我々は、積分範囲もきちんと変更して同じ積分を行った結果、 $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{D}$  に関しては、[21] と同じ RG flow 方程式を得た。しかし、 $\tilde{K}$  に関しては違った RG flow 方程式を得た。 $k^2$  までの展開では積分範囲の変更の効果は出ないが、 $k^4$  まで展開すると積分範囲の変更の効果が現れるからこのような違いが出たのである。我々は、 $p \rightarrow p + k/2$ ,  $\Omega \rightarrow \Omega + \omega/2$  の置き換えをせずに、直接 (8), (9) 式の積分を行った。この結果は、積分変数の置き換えと積分範囲の変更によって得られた結果と同じになることを確認した。その結果は、(15), (16) 式で  $H$  の項がないものである。この RG flow 方程式から安定な固定点  $(F^*, G^*) = (13.1868, 1064.43)$  を見つけ、スケーリング指数の値は、 $z = 1.54$ ,  $\alpha = 0.46$ ,  $\beta = 0.30$  となった。今度は、 $F^*$  の値は正、すなわち  $\tilde{K}^* > 0$  となって、[21] で  $\tilde{K}$  が負の値をとる問題は 1 ループ近似のせいではないことを明らかにした。ただし、このような修正を行った後でも、スケーリング指数の値は KPZ の固定点での厳密な値とは異なっていた。

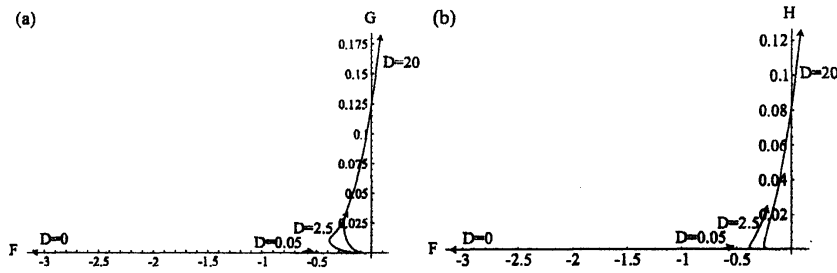


図2 パラメーター空間  $(F, G, H)$  での RG flow の軌道の (a)  $(F, G)$  平面への射影, (b)  $(F, H)$  平面への射影. 初期パラメーターは,  $\tilde{\nu}(0) = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = 1$ ,  $\tilde{\lambda} = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D$  ( $D = 0, 0.05, 2.5, 20$ ),  $\tilde{D}_d(0) = 0$ .

この問題を克服するために, 我々は (2) 式のように  $D_d$  の項を付け加えた. その結果, パラメーター空間  $(F, G)$  は  $(F, G, H)$  に拡張される. RG flow 方程式 (15)-(17) の安定な固定点が,  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  にあることを見つけた.  $z, \alpha$  の値は,  $d\tilde{\nu}/dl = 0$ ,  $d\tilde{D}/dl = 0$  より, 次の式から求めることができる.

$$z = 2 - \frac{G^*(3 + F^*)}{F^*(1 + F^*)^3} - \frac{H^*(1 - F^*)}{F^*(1 + F^*)^3}, \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ z - 1 + \frac{G^*}{(1 + F^*)^3} \left( 1 + \frac{H^*}{G^*} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

上の  $(F^*, G^*, H^*)$  の値を用いると,  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1/3$  となる. このスケーリング指数の値は, 完全に KPZ の固定点のものに等しい. (3) 式のガリレイ不変性により,  $\lambda$  は再スケールしても不変なままである. 故に (12) 式から, スケーリング関係式  $\alpha + z = 2$  が得られる. 実際, 上で求めた  $z, \alpha$  の値はこの関係式を満たす.

図2は,  $0 \leq l \leq 2.4$  の範囲の初期段階でのくりこみ群変換による無次元パラメーター  $(F(l), G(l), H(l))$  の軌道を表示している. 4 個の初期値,  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$ ,  $(-1/\Lambda_0^2, 0.05/(4\pi\Lambda_0^2), 0)$ ,  $(-1/\Lambda_0^2, 2.5/(4\pi\Lambda_0^2), 0)$ ,  $(-1/\Lambda_0^2, 20/(4\pi\Lambda_0^2), 0)$  に対する軌道を示している. ここで,  $\tilde{\nu}(0) = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = 1$ ,  $\tilde{\lambda}(0) = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D$  ( $D = 0, 0.05, 2.5, 20$ ),  $\tilde{D}_d(0) = 0$ ,  $\Lambda_0 = \pi/\Delta x = \pi/0.5$  と設定した. これらの値は 3 節の数値計算でも使う.  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$ , すなわち  $\tilde{D}(0) = \tilde{D}_d(0) = 0$  の特別な場合を除いて, 残り 3 個の軌道はすべて同じ固定点  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  に近づく. さらに,  $(F(l), G(l), H(l))$  の RG flow は,  $D$  の強さが大きくなるほどはやく KPZ 固定点に近づくことがわかる. KS 方程式へ加えるノイズの大きさが増加するにつれて, KPZ スケーリングへ近いスケーリングの振る舞いが容易に観察されることを 3 節で数値的に確認する. 図2(a) の  $D = 20$  の軌道は,  $F < 0$  から  $F > 0$  へ符号が変化している. これは,  $\tilde{\nu}$  が負の値からくりこまれて正の値へ変化していくことを示している.  $D$  の値がいくら小さくてもゼロでなければ, RG flow の軌道は  $F$  軸から離れていく. もしスケールパラメーター  $l$  を時間に例えれば,  $D$  の値が非常に小さいとき, RG flow の軌道は長い時間  $F$  軸近傍に沿って負の方向に動き, あるところで右側に向きを変えて, 最終的には KPZ 固定点  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  に到着する. このことは,  $D$  の値が小さいときは, KPZ 固定点に到着するのに多くのくりこみ群変換をしなければならないことを意味する. この振る舞いは,  $\tilde{D}(0) = 0$ ,  $\tilde{D}_d(0) \neq 0$  の場合でも同じであった.  $\tilde{D}(0) = \tilde{D}_d(0) = 0$  の場合は, (8) 式の  $\Sigma$ , (9) 式の  $\Phi$  はいつもゼロになるのでくりこみによる補正は存在しない. このとき, 初期値  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$  は  $(-\infty, 0, 0)$  へ行く. RG flow の

軌道は常に図 2 の  $F$  軸上にあり、決して KPZ 固定点へ到達できないことになる。この振る舞いを別のパラメーター空間  $(f(l), g(l), h(l))$  で表現すれば、初期値  $(-\Lambda_0^2, 0, 0)$  は固定点  $(0, 0, 0)$  に近づく。

### 2.3 再スケールの引き戻し

実際に我々に興味あるのは、再スケールをしない有効理論にある。そのため、前節で得られたくりこみ群の結果を次の節の数値計算と比較する際には、再スケールを元にもどさなければならない [25]。元々のスケールに戻るためには、次のような変換をしなければならない。  $k = e^{-l}\tilde{k}$ ,  $\omega = e^{-z l}\tilde{\omega}$ ,  $\nu(l) = e^{-(z-2)l}\tilde{\nu}(l)$ ,  $K(l) = e^{-(z-4)l}\tilde{K}(l)$ ,  $\lambda(l) = e^{-(\alpha+z-2)l}\tilde{\lambda}(l)$ ,  $D(l) = e^{-(z-2\alpha-1)l}\tilde{D}(l)$ ,  $D_d(l) = e^{-(z-2\alpha-3)l}\tilde{D}_d(l)$ 。元々のスケールの変数に関して、結合定数は  $F(l) = \nu(l)/(K(l)\Lambda(l)^2)$ ,  $G(l) = \lambda(l)^2 D(l)/(4\pi K(l)^3 \Lambda(l)^7)$ ,  $H(l) = \lambda(l)^2 D_d(l)/(4\pi K(l)^3 \Lambda(l)^5)$  と表現できる。ここで、 $\Lambda(l) = \Lambda_0 e^{-l}$  を使った。くりこみ群変換のもとでのカットオフ波数  $\Lambda_0$  は固定されている。しかし、もともとのスケールでのカットオフ波数  $\Lambda(l)$  は、[11, 13] で導入されたようにある適当に選んだカットオフ波数に対応している。そこでは、 $u(k)$  の  $|k| > \Lambda(l)$  である短波長の自由度が消去されている。元々のスケールに戻ると、RG flow 方程式 (15)-(17) は変化しないが、RG flow 方程式 (10)-(14) は次のように変化する。

$$\frac{d\nu}{dl} = \nu \left[ \frac{G}{F(1+F)^3} \left\{ 3 + F + (1-F)\frac{H}{G} \right\} \right], \quad (20)$$

$$\frac{dK}{dl} = K \left[ \frac{G}{2(1+F)^5} \left\{ 26 - F + 2F^2 + F^3 + (2 - 21F + 6F^2 + F^3)\frac{H}{G} \right\} \right], \quad (21)$$

$$\frac{d\lambda}{dl} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dD}{dl} = D \left[ \frac{G}{(1+F)^3} \left( 1 + \frac{H}{G} \right)^2 \right], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_d}{dl} = D_d & \left[ \frac{G^2}{2H(1+F)^5} \right. \\ & \left. \times \left\{ 16 + 3F + F^2 + 2(9 - 5F)\frac{H}{G} + (2 - 13F - F^2) \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

これらの方程式は、(10)-(14) 式の一部と同じ形をとるが、元々のスケールでは再スケールによるパラメーター変化の項はないことに注意する。

図 3 (a), (b) は、再スケールした表面張力係数  $\tilde{\nu}(l)$  とノイズの強さ  $\tilde{D}(l)$  の振る舞いを示している。それらは、(10), (13) 式で  $\alpha = 0.5$ ,  $z = 1.5$  を仮定して、(15)-(17) 式と同時に解くことによって得られる。 $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{D}$  は、定常値  $\tilde{\nu}^*$ ,  $\tilde{D}^*$  に収束することがわかる。これらの定常値の値は、 $\tilde{D}(0) = D$  の値の増加に伴い大きくなっている。一方、図 3 (c), (d) は、元々のスケールでの  $\nu(l)$ ,  $D(l)$  を示している。それらは、(15)-(17) 式を使い (20), (23) 式を解くことによって得られる。あるいは、図 3 (a), (b) からスケール変換  $\nu(l) = e^{-(z-2)l}\tilde{\nu}(l)$ ,  $D(l) = e^{-(z-2\alpha-1)l}\tilde{D}(l)$  を施すことによって得られる。 $\nu(l)$ ,  $D(l)$  はパラメーター  $l$  とともに単調増加することがわかる。このことは、くりこみ群解析では、(3) 式から得られた有効方程式において線形項が非線形項より支配的な中間領域での有効な表面張力係数  $\nu_{\text{eff}}$  と有効なノイズの強さ  $D_{\text{eff}}$  の値 [11, 12, 13, 14] を予言でき



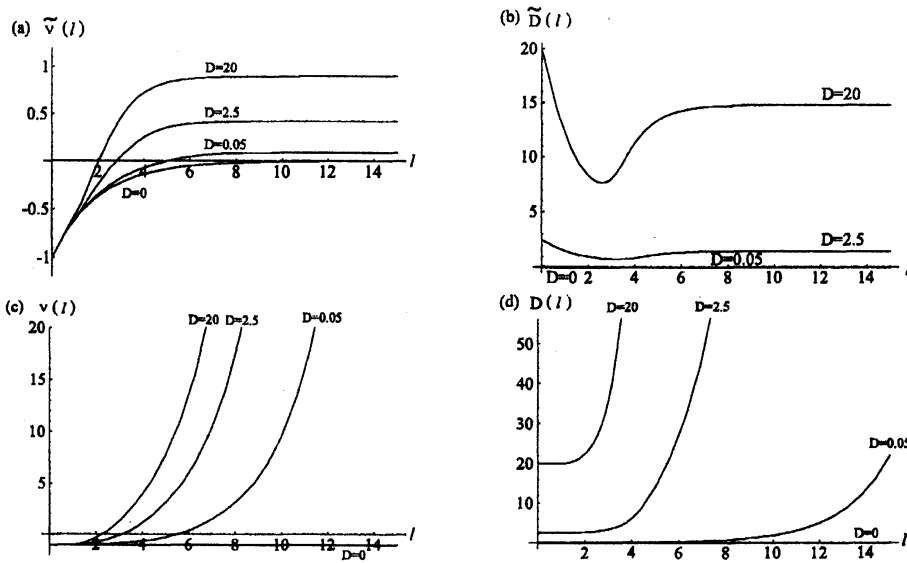


図3 (a) 再スケールした表面張力係数  $\tilde{\nu}(l)$ , (b) 再スケールしたノイズの強さ  $\tilde{D}(l)$ , (c) 元々のスケールでの表面張力係数  $\nu(l)$ , (d) 元々のスケールでのノイズの強さ  $D(l)$ . 初期値は,  $\tilde{\nu}(0) = \nu(0) = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = K(0) = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D(0) = D = 0, 0.05, 2.5, 20$ ,  $\tilde{D}_d(0) = D_d(0) = 0$ .

ないことを示している。[19] のイオンスパッタリングによる侵食過程の離散的な確率論的モデルでは、ある周期的な ripple 形態が時間発展の初期段階を特徴づけていることがわかった。一方、後期段階では界面は自己アフィンのスケーリングを示していた。くりこみ群の手続きでは、元々のシステムと自己相似なシステムを得るためには、空間、時間、界面の高さを再スケールしなければならない。これは界面が自己アフィンのという仮定に基づいている。この仮定は (10), (13) 式で  $\alpha = 0.5$ ,  $z = 1.5$  を代入したことに相当する。しかし、発展方程式のすべての時間にわたってこのスケーリング指数をもつような界面が発達しているのではないことに注意すべきである。それ故に、ここでのくりこみ群解析は荒れた界面の自己アフィンのスケーリング指数を決定することはできるが、ripple 構造から荒れた界面へのクロスオーバーを予言することはできないと言える。図3 (a), (b), (c), (d) では、初期値を  $\tilde{\nu}(0) = \nu(0) = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = K(0) = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D(0) = D = 0, 0.05, 2.5, 20$ ,  $\tilde{D}_d(0) = D_d(0) = 0$ ,  $\Lambda_0 = \pi/\Delta x = \pi/0.5$  と選んだ。(F\*, G\*, H\*) の値は、初期値に依存しないという意味で普遍的であるが、 $\tilde{\nu}^*$ ,  $\tilde{D}^*$  の値は初期値に依存するということに注意しておく。

## 2.4 揺動散逸定理

ノイズのある KS 方程式から得られた有効方程式の線形部分から、もともとのスケールでの  $u$  の相関は、次のように表せる [9, 10].

$$C(k, \omega) = \frac{\langle u(k, \omega) u(k', \omega') \rangle}{(2\pi)^2 \delta(k+k') \delta(\omega+\omega')} = \frac{2(D(l)k^2 + D_d(l)k^4)}{\omega^2 + (\nu(l)k^2 + K(l)k^4)^2}. \quad (25)$$

一方, 再スケールされた  $\tilde{u}$  の相関は,

$$\tilde{C}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = \frac{2 \left( \tilde{D}(l)\tilde{k}^2 + \tilde{D}_d(l)\tilde{k}^4 \right)}{\tilde{\omega}^2 + \left( \tilde{\nu}(l)\tilde{k}^2 + \tilde{K}(l)\tilde{k}^4 \right)^2}, \quad (26)$$

で与えられる.  $C(k, \omega)$  と  $\tilde{C}(\tilde{k}, \tilde{\omega})$  は, スケール変換によって,  $\tilde{C}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = e^{(1-2\alpha-z)l} C(k, \omega)$  のように関係づけられる. このとき, このスケーリング解は,  $C(k, \omega) = k^{1-2\alpha-z} \Psi(\omega/k^z)$  となる. ここで,  $\Psi(x)$  はあるスケーリング関数である.  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.5$  の値を代入すると,  $C(k, \omega) = k^{-1.5} \Psi(\omega/k^{1.5})$  となる. 従って, ノイズのある KS 方程式から得られた有効方程式のスケーリング解は, 1+1 次元の KPZ 方程式 [8] と KS 方程式 [15, 17] に対するものと同じである. (25) 式から, もともとのスケールでの  $u$  のパワースペクトルは, 次のように書ける.

$$E(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} C(k, \omega) = \frac{D(l) + D_d(l)k^2}{\nu(l) + K(l)k^2} = \frac{D(l)}{\nu(l)} \frac{1 + \frac{H(l)}{G(l)} \left( \frac{k}{\Lambda(l)} \right)^2}{1 + \frac{1}{F(l)} \left( \frac{k}{\Lambda(l)} \right)^2}. \quad (27)$$

一方, 再スケールされた  $\tilde{u}$  のパワースペクトルは,

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{\tilde{D}(l) + \tilde{D}_d(l)\tilde{k}^2}{\tilde{\nu}(l) + \tilde{K}(l)\tilde{k}^2} = \frac{\tilde{D}(l)}{\tilde{\nu}(l)} \frac{1 + \frac{H(l)}{G(l)} \left( \frac{\tilde{k}}{\Lambda_0} \right)^2}{1 + \frac{1}{F(l)} \left( \frac{\tilde{k}}{\Lambda_0} \right)^2}, \quad (28)$$

で与えられる.

$E(k)$  と  $\tilde{E}(\tilde{k})$  は, スケール変換によって,  $\tilde{E}(\tilde{k}) = e^{(1-2\alpha)l} E(k)$  のように関係づけられる. そのとき, スケーリング解は,  $E(k) \propto k^{1-2\alpha}$  で与えられる. 固定点  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  から,  $H^*/G^* \approx 0.093$ ,  $1/F^* \approx 0.093$  となる. 従って, (28) 式から,  $\tilde{E}(\tilde{k}) = \tilde{D}^*/\tilde{\nu}^*$  となる. このことは, 1+1 次元のノイズのある KS 方程式でも, 長波長極限で揺動散逸定理が成り立つことを示している. もし, ノイズの相関に  $D_d$  の項を導入しなかった場合, (28) 式で  $H(l)$  の項がない形になる. このとき  $\tilde{E}(\tilde{k})$  は, 固定点で  $1/F(l) \neq 0$  のため,  $\tilde{k}$  に依存することになる. ノイズのない KS 方程式の数値シミュレーションでは,  $u$  の同時刻相関関数は,  $k \rightarrow 0$  の極限で一定値をとる [11, 12, 13].  $D_d$  の項は揺動散逸定理が成立するためには必要不可欠な項であり, くりこみ群解析の結果ともセルフコンシステントである.

### 3 数値計算

#### 3.1 スケーリング指数

KS 方程式の長距離, 長時間の特性は KPZ 方程式のように振舞うことが期待されてきた. Sneppen らは, 大きなシステムサイズ  $L$  で長時間, KS 方程式の数値シミュレーションを行った [12]. 彼らは, 界面の平均二乗変位  $\langle (h - \langle h \rangle)^2 \rangle^{1/2} \sim t^\beta$  の動的スケーリングを調べ,  $\beta = 1/4$  である Edward-Wilkinson スケーリングから KPZ スケーリングへのクロスオーバーを見つけたものの,  $\beta = 1/3$  である KPZ スケーリングをはっきりと見つけることはできなかった. KPZ スケーリングを検証するためにはもっと大きなシステムサイズと時間を要する数値シミュレーションが必要であった. しかし, 前節のくりこみ群解析は, ノイズを加えることによって容易に KPZ 固定点  $(F^*, G^*, H^*)$  に近づけることを示した. 故に,  $\beta = 1/3$  である KPZ スケーリングが,それほど大きくないシステムサイズでも, ノイズのある KS 方程式では数値的に観察されるものと期待できる.

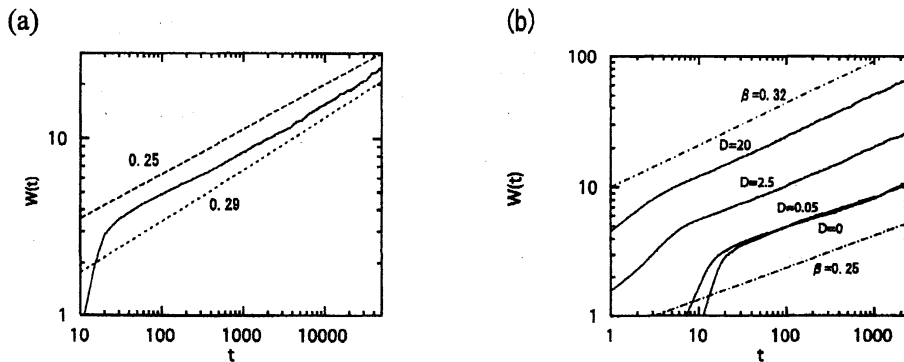


図4 (a)  $L = 200,000$  のとき、ノイズのない KS 方程式に対する  $W(t)$  の時間発展. 2本の破線は指数の値, 0.25 と 0.29 を表している. (b)  $L = 20,000$  のとき,  $D = 0, 0.05, 2.5, 20$  のノイズのある KS 方程式に対する  $W(t)$  の時間発展.

KS 方程式の通常の数値シミュレーションでは, (1) または (3) 式の中にあるすべてのパラメーターは適当なスケール変換で 1 に選べる. 残された唯一のコントロールパラメーターはシステムサイズ  $L$  である [11, 12, 13, 14]. 一方, ノイズのある KS 方程式の場合は, 新たに  $D$  と  $D_d$  がコントロールパラメーターとして付け加わる. 我々は,  $\nu = -1, K = 1, \lambda = 1$  とおいて (1) 式の直接シミュレーションを行い,  $W(t) = \langle [h(x, t) - \langle h(x, t) \rangle]^2 \rangle^{1/2}$  の時間発展を調べた. 二つの場合  $D \neq 0, D_d = 0$  と  $D = 0, D_d \neq 0$  を調べたが, 同じような結果を得たので, 以下では  $D \neq 0, D_d = 0$  の結果のみを示す. この場合が, ノイズによる界面成長としてはより自然であるからである [19].  $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.005$  とし, Heun 法を使った. Sneppen らは,  $\Delta x = 1, \Delta t = 0.1$  とし, Euler 法を使っている. 周期境界条件を課し, 初期条件は  $h(x, 0) = 0$  とした.

図 4 (a) は,  $L = 200,000$  のときの KS 方程式の  $W(t)$  の時間発展を表示している. 3 回実行した計算に対してアンサンブル平均をとった.  $h(x, 0) = 0$  のままでは変化しないので, ここでは  $D = 0.1$  のノイズが初期時刻  $0 < t < 0.5$  だけに加えられ,  $t > 0.5$  ではノイズを切って時間発展は決定論的な KS 方程式に従うようにした.  $W(t)$  の両対数プロットは,  $W(t)$  が動的スケーリング  $t^{1/4}$  にかかなりよく従っていることを示している.  $W(t)$  が若干上方に曲がっているのは, おそらく KPZ スケーリングへのクロスオーバーを表しているのかもしれない.  $t \sim 50,000$  近くの指数の値は約 0.29 であり, まだ  $1/3$  よりかなり小さい. すなわち, 我々の数値計算でもまた,  $\beta = 1/3$  である KPZ スケーリングを決定論的な KS 方程式からはっきりと確認することができなかった.

図 4 (b) は, 図 4 (a) の  $1/10$  のサイズである  $L = 20,000$  のとき, ノイズの強さを  $D = 0, 0.05, 2.5, 20$  と変化させたときのノイズのある KS 方程式に対する  $W(t)$  の時間発展を表示している. 10 回実行した計算に対してアンサンブル平均をとった. ノイズの強さが増加するにつれて,  $W(t)$  の大きさは上方にシフトしている. これは, ノイズによって揺らぎが増加したためである.  $D = 0$  の決定論的な場合は, 動的スケーリング指数の値は,  $50 < t < 2000$  間のデータを使って最小二乗法より求めると  $\beta = 0.248$  となった.  $D = 0.05$  では, 時間発展はほとんど  $D = 0$  の場合と同じである.  $D = 2.5$  では, 動的スケーリング指数の値は,  $\beta = 0.248$  から  $\beta = 0.3$  へ増加している.  $D = 20$  では, 動的スケーリング指数の値は, 同様に  $50 < t < 2000$  間のデータを使って最小二乗法より求めると  $\beta = 0.316$  と見積もられた. この値は KPZ スケーリング指数の値  $\beta = 1/3$  に近い. [12] のように,  $W(t)/t^\beta$  から  $\beta$  の値を,  $D = 0$  に対しては  $\beta \sim 0.25$ ,  $D = 20$  に対しては  $\beta \sim 0.315$  と

見積ることもできた。図 4 (b) は,  $D = 0$  の場合は, この小さなシステムサイズと短い時間のシミュレーションでは KPZ へのクロスオーバーを見ることは不可能であったのだが, ノイズを加えることによって KPZ 固定点へ容易に近づけることを示している。この結果は, 図 2 で示した RG flow の結果とも首尾一貫している。なぜならば, KPZ 固定点上にあるということが KPZ スケーリングへ漸近したことを意味するからである。図 4 (a) に示したものよりもっと大きなシステムサイズで長い時間のシミュレーションを行うことができれば, KS 方程式 ( $D = D_d = 0$  の場合) に対する RG flow の軌道は KPZ 固定点に到達するであろう。しかし, くりこみ群の計算では,  $D = D_d = 0$  のときは, (8) 式の  $\Sigma$ , (9) 式の  $\Phi$  は常にゼロになり, 初期の  $\nu$ ,  $K$  や  $D$ ,  $D_d$  へのくりこみはないことになる。このとき, RG flow の軌道は常に図 2 の  $F$  軸上にあり, 決して KPZ 固定点へは到達できない。これは, 前節の  $D = D_d = 0$  のときの RG flow の軌道と数値シミュレーションの間の定性的な違いであるが, 数値計算ではなんらかの数値誤差は常につきもので完全にノイズのない状態はなく, 軌道が  $F$  軸からほんの少しずれる可能性がある。そのとき, KS 方程式はノイズの非常に小さい KS 方程式とみなしていいかもしれない。しかし, KPZ 固定点へ到達するには非常に長い時間を要するであろう。

### 3.2 KPZ 方程式によるモデリングと有効パラメーターの評価

次に, 有効な表面張力係数とノイズの強さをもつ KPZ 方程式に基づいてノイズのある KS 方程式の数値的結果を解析する。その際,  $D$  が小さい場合には, 有効な KPZ 方程式によるモデリングは大きな空間, 時間スケールでの振舞いの良い近似になっていると仮定すると, KPZ 方程式は次のように書ける。

$$h_t = \nu_{\text{eff}} h_{xx} + \frac{\lambda}{2} (h_x)^2 + \eta(x, t), \quad (29)$$

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D_{\text{eff}} \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (30)$$

Sneppen らは, 決定論的な KS 方程式の直接数値計算から, 有効な表面張力係数  $\nu_{\text{eff}}$  と有効なノイズの強さ  $D_{\text{eff}}$  を評価した。彼らは, 動的スケーリング指数が  $\beta = 1/4$  である時間領域での

$$W(t)^2 = \frac{2D_{\text{eff}}}{\sqrt{2\pi\nu_{\text{eff}}}} t^{1/2}, \quad (31)$$

から  $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}^{1/2}$  の値を評価した。また長波長領域では,  $h_x$  の平衡論的な等分配則が KS 方程式に対して観測されているので [11, 12, 13, 14], 次の関係式

$$\frac{D_{\text{eff}}}{\nu_{\text{eff}}} = Lk^2 \langle |h(k, t)|^2 \rangle, \quad (32)$$

から  $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}$  の値を決定している。(31), (32) 式から, Sneppen らは,  $D_{\text{eff}}$  と  $\nu_{\text{eff}}$  の値を  $D_{\text{eff}} = 6.4$ ,  $\nu_{\text{eff}} = 10.5$  と見積もった。彼らは,  $\nu = -1$ ,  $K = 1$ ,  $\lambda = 2$  の KS 方程式 (1) の数値計算を実行したが, 上の  $D_{\text{eff}}$  の値は  $\lambda = 1$  になるように再スケールしたものである。彼らの結果は, ここでの結果を  $h \rightarrow 2h$ ,  $\eta \rightarrow 2\eta$  と  $D_{\text{eff}} \rightarrow 2D_{\text{eff}}$  と置き換えることによって得られることに注意しておく。有効な表面張力係数  $\nu_{\text{eff}}$  は別の方法 [11, 14] によっても評価され, 似たような値  $6 < \nu_{\text{eff}} < 10$  が得られている。我々は, ノイズのある KS 方程式に対して, ふたつの関係式 (31), (32) から有効な表面張力係数  $\nu_{\text{eff}}$  と有効なノイズの強さ  $D_{\text{eff}}$  を評価した。関係式 (31) から評価する際には  $L = 20,000$  の数値計算を実行し, 関係式 (32) から評価する際には,  $L = 4096$  の数値計算を実行した。

図 5 (a), (b) は,  $D$  の関数として  $\nu_{\text{eff}}$  と  $D_{\text{eff}}$  を表示している。有効な表面張力係数  $\nu_{\text{eff}}$  は,  $D = 0$  の近くで  $\nu_{\text{eff}} \sim 8$  から減少し, 大きな  $D$  では, 約 5 の値をとっている。有効なノイズの強さ  $D_{\text{eff}}$  は, カオス的な振舞い

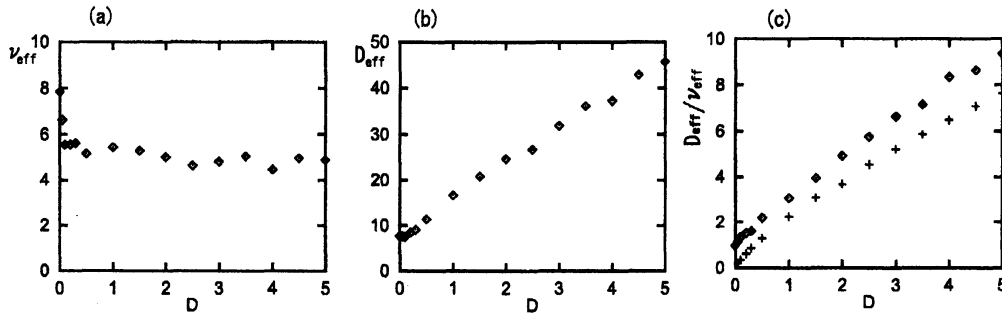


図5  $D$  の関数としてふたつの関係式 (31), (32) から数値的に評価した (a) 有効な表面張力係数, (b) 有効なノイズの強さ. (c) 数値的に得られた  $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}$  (◇) とくりこみ群解析で得られた  $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}$  (+).

によって自発的に生成された決定論的なノイズに確率的なノイズを付加したものであるため、 $D$  とともに増加している。 $D = 0$  での  $\nu_{\text{eff}}$  と  $D_{\text{eff}}$  の値は、Sneppen らが評価した値とは少しばかり違っている。図 5 (c) は、 $D$  の関数として  $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}$  を表示している。◇ は (32) 式から決定した数値的な値を示し、+ は、 $\Lambda_0 = \pi/\Delta x = \pi/0.5$  のときの RG flow 方程式 (10), (13) を解くことによって得られた  $\tilde{D}/\tilde{\nu}$  の値を示している。ここで、 $\alpha$  と  $z$  の値は、 $\alpha = 0.5$ ,  $z = 1.5$  で与えられる仮定し、初期値は  $\tilde{\nu}(0) = \nu = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = K = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D$ ,  $\tilde{D}_d(0) = D_d = 0$  とした。図 3 (a), (b) に示すように、 $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{D}$  は定常値  $\tilde{\nu}^*$ ,  $\tilde{D}^*$  に近づく。我々は、この定常状態から  $\tilde{D}/\tilde{\nu}$  の値を評価した。くりこみ群解析は  $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}$  のおおまかな近似的な値を与えているとも言えるかもしれない。図 5 (c) に示すように、くりこみ群解析では、 $D_{\text{eff}}/\nu_{\text{eff}}$  の値は  $D \rightarrow 0$  の極限でゼロに近づくが、数値計算では、 $D = 0$  でもある有限な値をとっていることに注意すべきである。これはおそらく  $D = D_d = 0$  とき、決定論的な KS 方程式から生成されたカオスの揺らぎがくりこみ群解析では十分に取り込まれていないせいであろう。

### 3.3 くりこみ群解析による界面成長則の近似

図 4 (b) で見たように、有効なノイズの強さの増加は KPZ スケーリングへのクロスオーバーを容易にするものと期待される。我々は、KPZ 方程式に基づいて動的スケーリングを考える。 $\nu_{\text{eff}}$ ,  $D_{\text{eff}}$  は、(31), (32) 式を使って見積もれることを仮定する。 $g(l) = \tilde{\lambda}(l)^2 \tilde{D}_{\text{eff}}(l)/(4\pi\tilde{\nu}_{\text{eff}}(l)^3 \Lambda_0)$  の RG 方程式は、

$$\frac{dg(l)}{dl} = g(l) - 2g(l)^2, \quad (33)$$

で与えられる。これは、(10), (13) 式で  $\tilde{K} = \tilde{D}_d = 0$  と置き、(12) 式を使うことによって得られる。(33) 式は、容易に解けて  $g(l) = \{1 + \tanh(l/2 - c)\}/4$  となる。ここで  $c$  は、初期値として  $\tilde{\nu}_{\text{eff}}(0) = \nu_{\text{eff}}$ ,  $\tilde{D}_{\text{eff}}(0) = D_{\text{eff}}$ ,  $\tilde{\lambda}(0) = \lambda$  を使うと、 $g(0) = \lambda^2 D_{\text{eff}}/(4\pi\nu_{\text{eff}}^3 \Lambda_0) = (1 - \tanh c)/4$  から決まる。 $g(0) = 1/2$  と選ぶと、 $c = -\infty$  を得る。 $g(l)$  の上の厳密な解に  $c = -\infty$  を代入すると、任意の  $l$  に対して  $g(l) = 1/2$  となる。すなわち、 $\nu_{\text{eff}}$ ,  $D_{\text{eff}}$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda_0$  の初期値を  $g(0) = \lambda^2 D_{\text{eff}}/(4\pi\nu_{\text{eff}}^3 \Lambda_0) = 1/2$  を満たすように選べば、 $\beta = 1/3$  の動的スケーリングが小さい  $t$  に対しても容易に観察される。なぜならば、システムは最初から RG flow 方程式の固定点にあるからである。 $\tilde{K} = \tilde{D}_d = 0$  と置くことにより、再スケールしたパラメータ  $\tilde{\nu}_{\text{eff}}(l)$ ,  $\tilde{D}_{\text{eff}}(l)$  は (10), (13) 式に

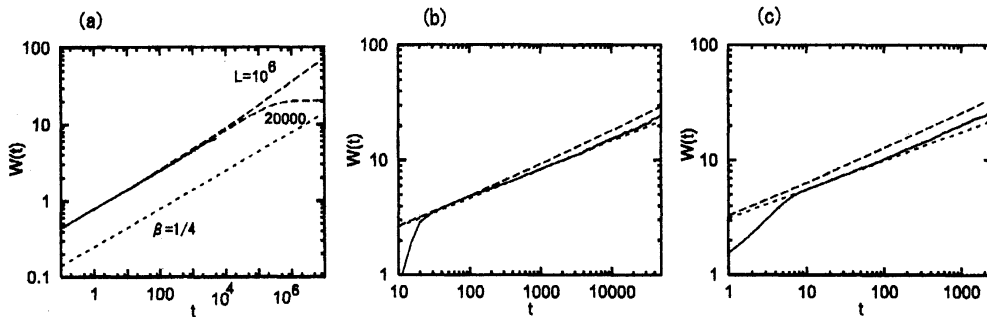


図6 直接数値計算(実線)で得られた  $W(t)$  と(35)式(波線)と(31)式(点線)との比較。(a)  $\nu_{\text{eff}} = 10$ ,  $D_{\text{eff}} = 2.5$ ,  $L = 20,000, 1,000,000$  でのKPZ方程式, (b)  $L = 200,000$  でのKS方程式, (c)  $D = 2.5$ ,  $L = 20,000$  でのノイズのあるKS方程式。(b), (c)の直線状の点線は(31)式をfittingさせたものである。

従う。本来のスケールに戻ると,  $\nu_{\text{eff}}(l) = e^{-(z-2)l} \tilde{\nu}_{\text{eff}}(l)$ ,  $D_{\text{eff}}(l) = e^{-(z-2\alpha-1)l} \tilde{D}_{\text{eff}}(l)$  は

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_{\text{eff}}(l)}{dl} &= \nu_{\text{eff}}(l)g(l), \\ \frac{dD_{\text{eff}}(l)}{dl} &= D_{\text{eff}}(l)g(l). \end{aligned} \quad (34)$$

に従う。有効な  $\nu_{\text{eff}}(l)$ ,  $D_{\text{eff}}(l)$  は  $\nu_{\text{eff}}(l) = \nu_{\text{eff}} \exp\{\int_0^l g(l)dl\} = \nu_{\text{eff}} \exp[\{l+2 \log \cosh(l/2-c)\}/4]$ ,  $D_{\text{eff}}(l) = D_{\text{eff}} \exp[\{l+2 \log \cosh(l/2-c)\}/4]$  のように増加する。  $l \rightarrow \infty$  に対して, 波数  $k$  は  $k \sim \Lambda_0 e^{-l}$  のようにスケールするので,  $l \sim \log(\Lambda_0/k)$  である。すなわち, 本来のスケールでの有効な表面張力係数とノイズの強さは, 小さい  $k$  に対して  $\nu_{\text{eff}}(k) \sim k^{-1/2}$ ,  $D_{\text{eff}}(k) \sim k^{-1/2}$  のように増加する。もし,  $\nu_{\text{eff}}(l)$ ,  $D_{\text{eff}}(l)$  が波数  $k = \Lambda_0 e^{-l}$  での有効な表面張力係数とノイズの強さであれば,  $W(t)$  の時間発展は近似的に次で表現できる。

$$\begin{aligned} W(t)^2 &= \frac{2}{L} \sum_k \langle |h(k, t)|^2 \rangle \sim \frac{2}{L} \sum_k \int_0^t e^{-2\nu_{\text{eff}}(k)k^2(t-t')} 2D_{\text{eff}}(k) dt' \\ &= \frac{2}{L} \sum_k \frac{D_{\text{eff}}(k)}{\nu_{\text{eff}}(k)k^2} \left(1 - e^{-2\nu_{\text{eff}}(k)k^2 t}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

ここで, 和は離散的な波数  $k = k_n = 2\pi n/L$  ( $n = 1, \dots, N/2$ ) にとる。(35)式を使って,  $W(t)$  の時間発展を評価することができる。図6(a)は,  $L = 20,000$ ,  $\nu_{\text{eff}} = 10$ ,  $D_{\text{eff}} = 2.5$  のときのKPZ方程式の数値結果と  $L = 20,000, 1,000,000$  のときの(35)式との比較である。(35)式は  $W(t)$  のかなりよい評価を与えている。 $\beta = 1/4$  の動的スケーリング指数が  $\nu_{\text{eff}} = 10$  でのKPZ方程式でさえ見れる。 $L = 20,000$  のようにシステムサイズが小さいときは  $L$  の有限性による  $W(t)$  の飽和効果もまた(35)式で表現できる。

図6(a)はまた, 大きな  $\nu_{\text{eff}} = 10$  に対してKPZスケーリングへのクロスオーバーを見るためには非常に大きなシステムサイズと長い時間が必要であることを示している。図6(b)は,  $L = 200,000$ ,  $D = 0$  でのKS方程式の数値結果(それはすでに図4(a)に示されている)と, 波線で示した(35)式,  $L = 200,000$ ,  $\nu_{\text{eff}} = 7.85$ ,  $D_{\text{eff}} = 7.65$  の点線で示した(31)式との比較である。ここで,  $\nu_{\text{eff}}$ ,  $D_{\text{eff}}$  の値は図5(a), (b)の  $D = 0$  での値である。これらの値は, (31)式の図6(b)の実線への線形fittingから得られたものであるため, 当然点線は実線に近い値である。波線はKPZスケーリングへの遅いクロスオーバーを表している。しかしながら, クロスオーバーは直接数値計算では(35)式での予言よりもっと遅いようにみえる。図6(c)は,

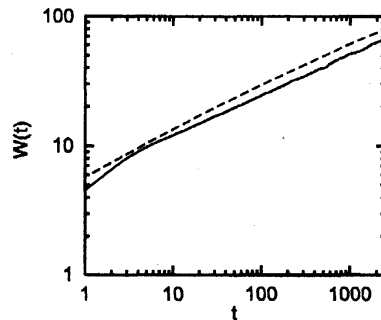


図7  $D = 20, L = 200,000$  のノイズのある KS 方程式の  $W(t)$  の時間発展 (実線) と (36) 式との比較 (波線)。

$L = 20,000, D = 2.5$  でのノイズのある KS 方程式の数値結果 (すでに図 4 (b) で示されている) と、波線で示した (35) 式,  $L = 20,000, \nu_{\text{eff}} = 4.65, D_{\text{eff}} = 26.7$  の点線で示した (31) 式との比較である。ここで、 $\nu_{\text{eff}}$  と  $D_{\text{eff}}$  の値は、図 5 (a), (b) の  $D = 2.5$  での値である。図 6 (b) に比べると小さなシステムサイズでも KPZ スケーリングへのクロスオーバーがはっきりとみえる。しかしながら、クロスオーバーはこのパラメーターでも直接数値計算では (35) 式の予言より遅いようにみえる。

(15)-(17) 式と (20)-(24) 式の RG flow 方程式を使うと対応する  $W(t)$  の和の公式は、次のように書ける。

$$\begin{aligned} W(t)^2 &\sim \frac{2}{L} \sum_k \int_0^t e^{-2(\nu(k)k^2 + K(k)k^4)(t-t')} \{2D(k) + 2D_d(k)k^2\} dt' \\ &= \frac{2}{L} \sum_k \frac{D(k) + D_d(k)k^2}{\nu(k)k^2 + K(k)k^4} \left(1 - e^{-2(\nu(k)k^2 + K(k)k^4)t}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

指数  $\beta = 1/4$  の成長則と  $\beta = 1/3$  へのクロスオーバーはこの公式では現れなかった。特に小さな  $D$  に対しては、決定論的なカオスによる揺らぎは、(10)-(17) 式と (20)-(24) 式のくりこみ群解析には十分に含まれてはいないのではないと思われる。小さな  $D$  では、動的スケーリングの基礎として (29) 式の KPZ 方程式を仮定したのはこのためである。これは、図 3 (c) に示すように、5 ~ 10 程度の有効な表面張力係数は現れなかったという事実に関係しているかもしれない。

しかしながら、もし  $D$  の値が非常に大きければ、確率的なノイズがカオス的な揺らぎを支配し、(15)-(17) 式と (20)-(24) 式の RG flow はよりもっともらしくなる。さらに、有効な表面張力係数とノイズの強さは大きな  $D$  の値に対しては評価することはできない。なぜなら、動的指数  $\beta = 1/4$  をもつ中間状態をみることができないからであり、KPZ 方程式に基づいた解析は適用できないからである。ここで、大きな  $D$  の値に対して (36) 式からノイズのある KS 方程式の RG flow の適用性を示す。図 7 は、図 4 (b) に示した  $L = 20,000, D = 20$  の数値結果と (36) 式との比較である。 $D = 20$  の大きな値ではかなりよい一致が見れる。図 6 (b), (c) と図 7 において、数値結果 (実線) と (35), (36) 式 (波線) とのずれのひとつの理由は、カオス的な揺らぎがくりこみ群の計算には陽に含まれていないせいかもしれない。

#### 4 まとめと課題

保存的なノイズと非保存的なノイズをもつ 1+1 次元の KS 方程式に対してくりこみ群解析を行った。保存的なノイズを新たに加えることによって、KPZ の固定点で得られるのと同じスケール指数を得ることが

できた。さらに、保存的なノイズのおかげで、ノイズのある KS 方程式の場合も長波長極限で揺動散逸定理が成立することを示した。以上のことから、1+1 次元のノイズのある KS 方程式の長波長特性は KPZ 方程式でかなりよく記述されると言える。確率的なノイズのある KS 方程式のノイズの強さを大きくすることによって、KPZ スケーリングに近いスケーリングの振る舞いがそれほど大きくないシステムサイズと時間の数値計算でも観察することができることを示した。それはノイズのある KS 方程式のくりこみ群解析により得られた RG flow 方程式の結果ともセルフコンシステントである。

KS 方程式は決定論的な方程式なので本来ノイズは必要ない。くりこまれたノイズの強さと粘性係数の比である揺動散逸比を計算すると、裸のノイズの強さがゼロのとき、ノイズのある KS 方程式のくりこみ群ではその比はゼロになるが、KS 方程式の数値計算ではある有限値をとる。このことは、くりこみ群の方法ではくりこまれたパラメータの値を見積もる際にカオスによる揺らぎを正しくとりこんでいない可能性がある。ノイズのある KS 方程式に対するくりこみ群解析は、中間的なスケーリング領域での有効な表面張力係数とノイズの強さを予言することはできなかったので、我々は有効な KPZ 方程式を仮定して有効な表面張力係数とノイズの強さを数値的に評価した。KS 方程式のカオス的な揺らぎが正しく取り込まれていない問題は、DIA ([11] の Fig. 2a を参照) や MCT [15] のような他の方法でも起こるだろう。これらの方法では、KS 方程式から得られるスペクトルに特徴的なこぶをもつスペクトルを得ることはできないことが知られている。有効な表面張力係数の粗い見積もりは  $\nu_{\text{eff}} \approx l_{\text{cell}}^2/\tau$  である。ここで、 $l_{\text{cell}}$  は KS システムでのセル構造のサイズであり、 $\tau$  は最も不安定なモードの線形成長時間である [12, 13]。線形不安定なモードの領域、それはスペクトルの顕著なこぶの部分にみられるが、KS 方程式の非線形な力学的振る舞いに決定的な役割を果たすものと認識されている [18]。相互作用の非局所性が支配的なときには、紫外領域でのこの不安定領域の違いは波数の小さい赤外領域のスケーリング特性に影響を与える可能性がある。たとえ長波長の特性に興味があつたとしても、この力学的に支配的な不安定領域を無視することはできないだろう。線形不安定なモードがくりこみ群の方法に組み込まれているかどうかを明らかにするために、(1) または (3) 式の 4 階微分を 6 階微分に置き換えたモデルを考えることは価値がある。そのような変形したモデルでは、 $\nu_{\text{eff}}$ ,  $D_{\text{eff}}$  の値は大きくなるが、揺動散逸定理は以前として満たされるということが報告されている [11, 13]。  $\nu_{\text{eff}}$  の大きな値は定性的には  $\nu_{\text{eff}} \approx l_{\text{cell}}^2/\tau$  から評価することができる。線形不安定なモードがくりこみ群の方法により十分に取り込まれていれば、変形したモデルではノイズのある KS 方程式に比べるとより大きな  $\nu_{\text{eff}}$ ,  $D_{\text{eff}}$  の値を得ることが出来るであろう。

くりこみ群の方法では、最初からくりこまれた応答関数や相関関数の存在を仮定する必要はない。今回、1+1 次元のノイズのある KS 方程式のくりこみ群の計算から求めたスケーリング指数の値は、KPZ 方程式のそれに正確に一致し、Yakhot の予想は正しいことを証明することができた。ただし、くりこみ群の方法では再スケールを何度も繰り返すので、もとのスケールでパラメータのくりこみ変化をみるには、くりこみ群変換で得られた結果をもとのスケールに戻す必要がある。ここでは、ノイズのある KS 方程式のくりこみ群解析により、スケール変換したものとしめないものとのパラメータのくりこみ変化を具体的に示した。その結果、もとのスケールでみると、くりこまれたパラメータの値はカットオフ波数の減少に伴って増加していったので局所的な相互作用が支配的であることが言える。

KPZ 方程式のくりこみ群の計算 [8]、ここで行ったノイズのある KS 方程式のくりこみ群の計算はすべて 1 ループ近似のものである。L'vov や Procaccia 達は、くりこみ群の方法は 1 ループの計算しかしていないのでよくないと主張している [17]。しかし、なぜ 1 ループのみで KPZ の厳密な結果と同じ結果が出たのだろうか。L'vov や Procaccia 達の計算では、高次のループの寄与がゼロになるのは 1 次元では揺動散逸定理が成り立つせいだと言っている。それに対して、1 ループの計算の際にくりこみ群では波数についての積分範囲がある狭い波数殻に限定しているのだから微少パラメータ  $\delta l$  がでてくる。積分範囲を限定しているので



2 ループ以上はその微小パラメーターについて高次の項になる。くりこみ群の微分方程式 (RG flow) を導く際に  $\delta l$  がゼロの極限をとるので、結局 1 ループだけの寄与が残り、2 ループ以上は無視できる [26]。全ての可能な無限個のループのグラフがこのくりこみ群の微分方程式の解として自動的に足しあげられていくのか確認し、そして揺動散逸定理が成り立つときにはこの高次のループがキャンセルすることを確かめる必要がある。

## 謝辞

This work was supported by a Grant-in-Aid for the 21st Century COE "Frontiers of Computational Science".

## 参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, 1984).
- [2] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 1967).
- [3] 蔵本 由紀, 川崎 恭治, 山田 道夫, 甲斐 昌一, 篠本 滋 著, パターン形成 (朝倉書店 1991).
- [4] 木村 竜治, 流れの科学 (東海大学出版会 1985).
- [5] V. Yakhot, *Phys. Rev. A* **24**, 642 (1981).
- [6] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* **55**, 356 (1976).
- [7] G. I. Sivashinsky, *Acta Astron.* **4**, 1177 (1977).
- [8] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
- [9] D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, *Phys. Rev. A* **16**, 732 (1977).
- [10] V. Yakhot and Z.-S. She, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1840 (1988).
- [11] S. Zaleski, *Physica D* **34**, 427 (1989).
- [12] K. Sneppen, J. Krug, M. H. Jensen, C. Jayaprakash, and T. Bohr, *Phys. Rev. A* **46**, R7351 (1992).
- [13] F. Hayot, C. Jayaprakash, and C. Josserand, *Phys. Rev. E* **47**, 911 (1993).
- [14] H. Sakaguchi, *Prog. Theor. Phys.* **107**, 879 (2002).
- [15] H. Fujisaka and T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* **57**, 734 (1977).
- [16] D. C. Leslie, *Developments in the theory of turbulence* (CLARENDON PRESS, OXFORD 1973).
- [17] V. S. L'vov, V. V. Lebedev, M. Paton, and I. Procaccia, *Nonlinearity* **6**, 25 (1993).
- [18] I. Procaccia, M. H. Jensen, V. S. L'vov, K. Sneppen, and R. Zeitak, *Phys. Rev. A* **46**, 3220 (1992).
- [19] R. Cuerno, H. A. Makse, S. Tomassone, S. T. Harrington, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4464 (1995).
- [20] A. Karma and C. Misbah, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3810 (1993).
- [21] R. Cuerno and K. B. Lauritsen, *Phys. Rev. E* **52**, 4853 (1995).
- [22] K. Ueno, H. Sakaguchi, and M. Okamura, *Phys. Rev. E* **71** 046138 (2005).
- [23] A.-L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [24] L. Golubovic and R. Bruinsma, *Phys. Rev. Lett* **66**, 321 (1991); **67**, 2747(E) (1991).
- [25] G. L. Eyink, *Phys. Fluids* **6**, 3063 (1994).
- [26] 青木 健一, 非摂動論的くりこみ群, 数理科学特集 くりこみ理論の地平, 第 35 卷 4 号 (1997).