

Stokes 極限波の一意性に対する数値的検証法

小林健太 (Kenta Kobayashi)

九州大学 数理学研究院

(Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1 問題の概要

Stokes 極限波は以下のような方程式の正值解 $\theta : (0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ として表される [7]

$$(1.1) \quad \begin{cases} \theta(s) = \int_0^\pi K(s, t) \frac{\sin \theta(t)}{\int_0^t \sin \theta(w) dw} dt, \\ 0 < \theta(s) < \frac{\pi}{2} \quad s \in (0, \pi), \\ \theta(\pi) = 0, \end{cases}$$

ここで,

$$K(s, t) = \frac{2}{3\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin ks \sin kt}{k} = \frac{1}{3\pi} \log \left| \frac{\sin \frac{s+t}{2}}{\sin \frac{s-t}{2}} \right|.$$

この方程式は、水面重力波の運動を記述した Nekrasov 方程式 [6][7]

$$(1.2) \quad \begin{cases} \theta(s) = \int_0^\pi K(s, t) \frac{\sin \theta(t)}{\mu^{-1} + \int_0^t \sin \theta(w) dw} dt, \\ 0 < \theta(s) < \frac{\pi}{2} \quad s \in (0, \pi), \\ \theta(0) = \theta(\pi) = 0, \end{cases}$$

の極限として定義される。ここで、 $\theta(s)$ は波の波面が水平面と為す角度である。Nekrasov 方程式は $\mu > 3$ のとき非自明な解を持ち得るが、解のなかで $(0, \pi)$ で正值を取るものを Nekrasov 方程式の正值解ということにする。

Stokes 極限波は、 μ を無限大へ持っていった時の (1.2) の解の極限として定義され (1.1) を満たす。

(1.1) の数値解を図 1 に示す。このとき、元の波の概形は図 2 のようになる。

Toland[10] は $\mu \rightarrow \infty$ のとき (1.2) の解は収束する部分列を持ち、その極限が (1.1) を満たすことを証明した。更に Amick et al.[1] は $\theta(s)$ が $(0, \pi]$ で無限回微分可能、かつ $\lim_{s \rightarrow 0} \theta(s) = \pi/6$ となることを証明した。よって (1.1) の解の存在については証明されているのだが、解の大域的な一意性については未解決である (Stokes 極限波の局所的な一意性については、最近になって Fraenkel[4] によって証明されている)。我々は数値的検証法 (中尾・山本 [13], 大石 [14], Rump[12]) を用いることによって大域的な一意性を証明することができた。

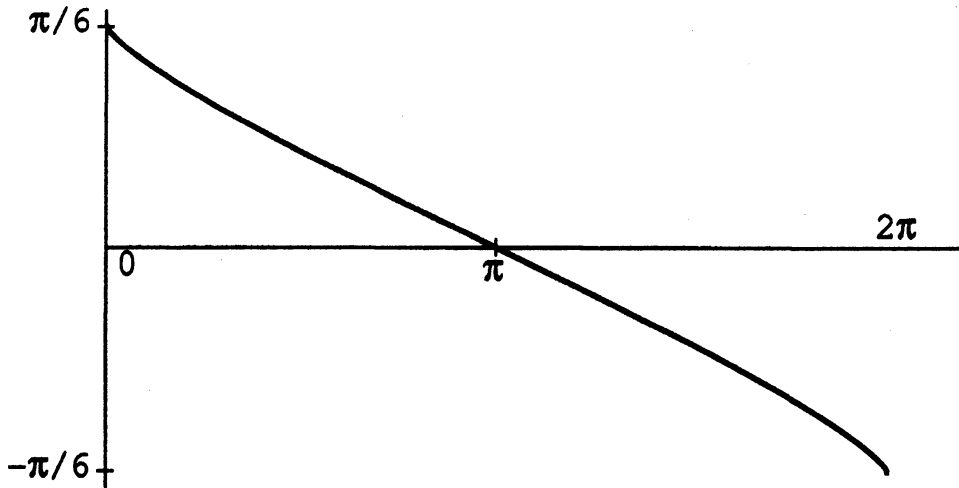


図 1: The shape of $\theta(s)$.

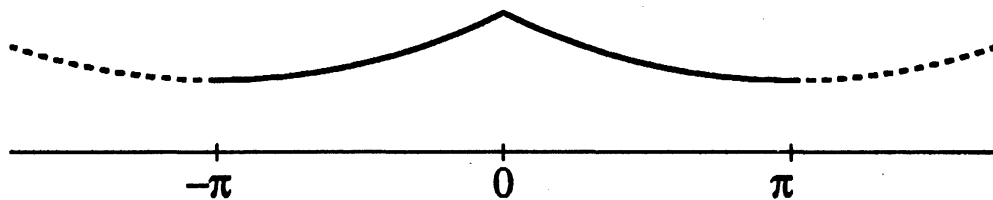


図 2: The wave profiles.

なお, Nekrasov's eq. の正值解については我々は既に同様の方法を用いて大域的な一意性を証明している (小林 [2]). ただし, Stokes 極限波の方がその特異性ゆえに証明は難しい.

Stokes 極限波については, Stokes [9] による以下のような予想が知られている

- (a) 波が頂点で為す角の大きさは $2\pi/3$ である, つまり, $\lim_{s \rightarrow 0} \theta(s) = \pi/6$.
- (b) 水面の形は頂点以外の場所では下に凸である,
つまり, $\theta'(s) < 0$ for $s \in (0, \pi)$.

この予想は Stokes' conjecture と言われている.

一つ目の Stokes' conjecture は Amick et al. [1] によって証明されたが, 二つ目は未解決である. しかし, 二つ目の Stokes' conjecture を満たす極限波が存在することは Toland and Plotnikov [11] によって証明されているので, Stokes' 極限波の大域的な一意性が証明されれば二つ目の Stokes' conjecture も自動的に証明された事になる.

2 大域的一意性に関する証明の方針

まず, Stokes 極限波の上界関数と下解関数を与える以下の定理を証明する. なお, 特に断りが無いかぎり $0 \leq s \leq \pi$ とする.

定理 2.1 いま, $\theta(s)$ の上界関数と下解関数が

$$0 \leq \underline{\theta}(s) \leq \theta(s) \leq \bar{\theta}(s) \leq \pi/2,$$

と与えられているとき

$$J(\underline{\theta}, \bar{\theta})(s) \leq \theta(s) \leq J(\bar{\theta}, \underline{\theta})(s),$$

が成立する.

ここで

$$J(\phi, \varphi)(s) = \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \log \left(1 + \frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \phi(w) dw}{\int_0^{\min(s, |s-t|)} \sin \varphi(w) dw + \int_{\min(s, |s-t|)}^{|s-t|} \sin \phi(w) dw} \right) dt.$$

証明 (1.1) より,

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \int_0^\pi K(s, t) \frac{\sin \theta(t)}{\int_0^t \sin \theta(w) dw} dt \\ &= \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{\cos s - \cos t} \cdot \log \left(\int_0^t \sin \theta(w) dw \right) dt \\ &\leq \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{\cos s - \cos t} \cdot \log \left(\int_0^t \sin (1_{w < s} \cdot \theta(w) + 1_{w \geq s} \cdot \bar{\theta}(w)) dw \right) dt \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \cdot \log \left(\frac{\int_0^{\pi-|s+t-\pi|} \sin (1_{w < s} \cdot \theta(w) + 1_{w \geq s} \cdot \bar{\theta}(w)) dw}{\int_0^{|s-t|} \sin (1_{w < s} \cdot \theta(w) + 1_{w \geq s} \cdot \bar{\theta}(w)) dw} \right) dt \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin (1_{w < s} \cdot \theta(w) + 1_{w \geq s} \cdot \bar{\theta}(w)) dw}{\int_0^{\min(s, |s-t|)} \sin \theta(w) dw + \int_{\min(s, |s-t|)}^{|s-t|} \sin \bar{\theta}(w) dw} \right) dt \\ &\leq \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \\ &\quad \times \log \left(1 + \frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \bar{\theta}(w) dw}{\int_0^{\min(s, |s-t|)} \sin \underline{\theta}(w) dw + \int_{\min(s, |s-t|)}^{|s-t|} \sin \bar{\theta}(w) dw} \right) dt. \end{aligned}$$

よって, $J(\bar{\theta}, \underline{\theta})(s)$ は $\theta(s)$ の上界関数となる. 同じようにして, $J(\underline{\theta}, \bar{\theta})(s)$ が下界関数となることも示される. \square

次に我々は, メインの証明に取り掛かる前の準備として, 正值解の下限を具体的に求める以下の定理を証明する

定理 2.2

$$\theta(s) \geq 0.00005 \cdot 1_{0 < s \leq \pi/2}.$$

証明 ε を 0.00005 に取る. 今, $0 < a < \pi/2$ が以下のような条件を満たすものとする.

$$\text{for all } 0 < s \leq a, \quad \theta(s) \geq \varepsilon \text{ holds.}$$

Amick et al.[1] によって $\lim_{s \rightarrow 0} \theta(s) = \pi/6$, が示されているので, このような a は必ず存在する.

このとき, 定理 2.1, より, $a \leq s \leq \min(1.01a, \pi/2)$ なる s について,

$$\begin{aligned} \theta(s) &\geq J(\varepsilon \cdot 1_{s \leq a}, \pi/2)(s) \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_{s-a}^{s+a} \cot \frac{t}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{a - |s-t|}{|s-t|} \sin \varepsilon \right) dt \\ &= \frac{1}{3\pi} \int_0^a \frac{\sin s}{\cos t - \cos s} \cdot \log \left(1 + \frac{a-t}{t} \sin \varepsilon \right) dt \\ &= \frac{1}{3\pi} \int_0^a \frac{1}{s-t} \cdot \log \left(1 + \frac{a-t}{t} \sin \varepsilon \right) dt \\ &\geq \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{1}{s} \int_0^a \log \left(1 + \frac{a-t}{t} \sin \varepsilon \right) dt \\ &= \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{a}{s} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{1 - \sin \varepsilon} \cdot \log \left(\frac{1}{\sin \varepsilon} \right) \\ &\geq \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{1.01} \cdot \log \left(\frac{1}{\sin \varepsilon} \right) = 0.0000520194 \dots \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, もし $\theta(s) \geq \varepsilon$ が $0 < s \leq a$ で成立すれば, $0 < s \leq \min(1.01a, \pi/2)$ でも成立する. 帰納的に, 全ての $0 < s \leq \pi/2$ において $\theta(s) \geq \varepsilon$ が成立する. \square

次に (1.1) の大域的な一意性をどのようにして証明するか説明する. そのため以下の定理を証明する.

定理 2.3 以下の条件が満たされるとき (1.1) の解は大域的に一意である

$$\sup_{0 < s \leq \pi} \frac{G(\bar{\theta}, \underline{\theta}, g)(s)}{g(s)} < 1,$$

ここで $\underline{\theta}(s) \geq 0$ と $\bar{\theta}(s) \leq \pi/2$ は (1.1) の解の下界関数と上界関数, $g(s)$ は任意の正値関数, G は以下のような汎関数である.

$$G(\phi, \varphi, g)(s) = \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \times \left(\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \phi(w) dw \cdot \int_0^{\min(s, |s-t|)} \cos \varphi(w) \cdot g(w) dw}{\int_0^{|s-t|} \sin \varphi(w) dw} + \int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \cos \varphi(w) \cdot g(w) dw \right) \times \frac{dt}{\int_0^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \varphi(w) dw}.$$

証明 まず $\bar{\theta}(s)$ と $\underline{\theta}(s)$ から, 以下のような関数列を作る.

$$\begin{cases} \phi_0(s) = \bar{\theta}(s), & \varphi_0(s) = \underline{\theta}(s), \\ \phi_{n+1}(s) = \min(\phi_n(s), J(\phi_n, \varphi_n)(s)), & (n = 0, 1, \dots), \\ \varphi_{n+1}(s) = \max(\varphi_n(s), J(\varphi_n, \phi_n)(s)), & (n = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

このとき, 定理 2.1 より, 全ての $n \geq 0$, について $\varphi_n(s) \leq \theta(s) \leq \phi_n(s)$ が成立する.
この関数列を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{n+1}(s) - \varphi_{n+1}(s)}{g(s)} &\leq \frac{J(\phi_n, \varphi_n)(s) - J(\varphi_n, \phi_n)(s)}{g(s)} \\ &= \frac{1}{6\pi g(s)} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \cdot \log \left[1 + \left\{ \frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \phi_n(w) dw}{\int_0^{\min(s, |s-t|)} \sin \varphi_n(w) dw + \int_{\min(s, |s-t|)}^{|s-t|} \sin \phi_n(w) dw} \right. \right. \\ &\quad \times \left(\int_0^{\min(s, |s-t|)} (\sin \phi_n(w) - \sin \varphi_n(w)) dw - \int_{\min(s, |s-t|)}^{|s-t|} (\sin \phi_n(w) - \sin \varphi_n(w)) dw \right) \\ &\quad \left. \left. + \int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} (\sin \phi_n(w) - \sin \varphi_n(w)) dw \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\int_0^{\min(s, |s-t|)} \sin \phi_n(w) dw + \int_{\min(s, |s-t|)}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \varphi_n(w) dw} \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{6\pi g(s)} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \phi_n(w) dw \cdot \int_0^{\min(s,|s-t|)} (\sin \phi_n(w) - \sin \varphi_n(w)) dw}{\int_0^{\min(s,|s-t|)} \sin \varphi_n(w) dw + \int_{\min(s,|s-t|)}^{|s-t|} \sin \phi_n(w) dw} \right. \\
&\quad \left. + \int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} (\sin \phi_n(w) - \sin \varphi_n(w)) dw \right) \\
&\quad \times \frac{dt}{\int_0^{\min(s,|s-t|)} \sin \phi_n(w) dw + \int_{\min(s,|s-t|)}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \varphi_n(w) dw} \\
&\leq \frac{1}{6\pi g(s)} \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \times \left(\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \bar{\theta}(w) dw \cdot \int_0^{\min(s,|s-t|)} \cos \underline{\theta}(w) \cdot g(w) dw}{\int_0^{|s-t|} \sin \underline{\theta}(w) dw} \right. \\
&\quad \left. + \int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \cos \underline{\theta}(w) \cdot g(w) dw \right) \times \frac{dt}{\int_0^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \underline{\theta}(w) dw} \cdot \sup_{0 \leq s \leq \pi} \frac{\phi_n(s) - \varphi_n(s)}{g(s)} \\
&= \frac{G(\bar{\theta}, \underline{\theta}, g)(s)}{g(s)} \cdot \sup_{0 < s \leq \pi} \frac{\phi_n(s) - \varphi_n(s)}{g(s)}.
\end{aligned}$$

よって

$$\sup_{0 < s \leq \pi} \frac{\phi_{n+1}(s) - \varphi_{n+1}(s)}{g(s)} \leq \sup_{0 < s \leq \pi} \frac{G(\bar{\theta}, \underline{\theta}, g)(s)}{g(s)} \cdot \sup_{0 < s \leq \pi} \frac{\phi_n(s) - \varphi_n(s)}{g(s)}.$$

となるので、定理の仮定が満たされている時には

$$\sup_{0 < s \leq \pi} \frac{\phi_n(s) - \varphi_n(s)}{g(s)} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty),$$

が成立する。これは (1.1) の解が一意的であることを示している。 \square

3 離散化

計算機に乗せるためには離散化する必要がある。我々は $J(\cdot, \cdot)$ と $G(\cdot, \cdot, \cdot)$ を、等分割の step function で評価することによって離散化を行った。

詳細についてはスペースの関係で省略するが、例えば 汎関数 J は

$$J(\phi, \varphi)(s) = \frac{1}{6\pi} \int_0^1 s \cot \frac{st}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\int_{1-t}^{\frac{\pi}{s} - |1+t-\frac{\pi}{s}|} \sin \phi(sw) dw}{\int_0^{1-t} \sin \varphi(sw) dw} \right) dt$$

$$+ \frac{1}{6\pi} \int_{\frac{s}{\pi}}^1 \frac{s}{t^2} \cot \frac{s}{2t} \cdot \log \left(1 + \frac{\int_{\frac{1}{t}-1}^{\frac{\pi}{s} - |1+\frac{1}{t}-\frac{\pi}{s}|} \sin \phi(sw) dw}{\int_0^{\min(1, \frac{1}{t}-1)} \sin \varphi(sw) dw + \int_{\min(1, \frac{1}{t}-1)}^{\frac{1}{t}-1} \sin \phi(sw) dw} \right) dt,$$

と変形し、小積分区間ごとに

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{p_3}{p_1 + p_2(t-x)} \cdot \log \left(1 + \frac{p_6 + p_7(t-x)}{p_4 + p_5(x + \Delta x - t)} \right) dt,$$

という形で評価して精度保証に持ち込んでいる。

4 数値計算結果

計算機の丸め誤差の処理は IEEE754 規格によって定められており、上への丸めと下への丸めを切り替えることが出来る (通常は最適点への丸め、つまり四捨五入となっている) [13][14][12]. 我々はこれらの丸めの制御を適切に使用することによって数学的に厳密な結果を得た. 計算は Pentium 4 (OS : Red Hat Linux 8.0) の gcc を用いて行った.

まず、 N を 3000 に取り、以下のような計算を行った.

$$(4.1) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_0(s) = \frac{\pi}{2}, \\ \underline{\theta}_0(s) = 0.00005 \cdot 1_{0 < s \leq \pi/2}, \\ \bar{\theta}_{n+1}(s) = \min \left(\bar{\theta}_n(s), \bar{J}_N(\bar{\theta}_n, \underline{\theta}_n)(s) \right), \\ \underline{\theta}_{n+1}(s) = \max \left(\underline{\theta}_n(s), \underline{J}_N(\underline{\theta}_n, \bar{\theta}_n)(s) \right). \end{cases}$$

定理(2.1) と定理 2.2 より (1.1) の解は $\bar{\theta}_n(s)$ と $\underline{\theta}_n$ の間に存在する. 反復を繰り返すたびに $\bar{\theta}_n(s)$ と $\underline{\theta}_n(s)$ の差は減少して行く (図 3). $\bar{\theta}_{40}(s)$ と $\underline{\theta}_{40}$ の形を図 4 に示す.

一意性を証明するために用いる正值関数 g としては以下のようなものを用いた.

$$(4.2) \quad \begin{cases} g_0(s) = 1, \\ g_{n+1}(s) = \frac{\bar{G}(\bar{\theta}_{40}, \underline{\theta}_{40}, g_n)(s)}{\sup_{0 < s \leq \pi} \bar{G}(\bar{\theta}_{40}, \underline{\theta}_{40}, g_n)(s)}, \end{cases}$$

これらを用いて最終的に

$$\sup_{0 < s \leq \pi} \frac{\bar{G}(\bar{\theta}_{40}, \underline{\theta}_{40}, g_2)(s)}{g_2(s)} = 0.99298 \dots < 1.$$

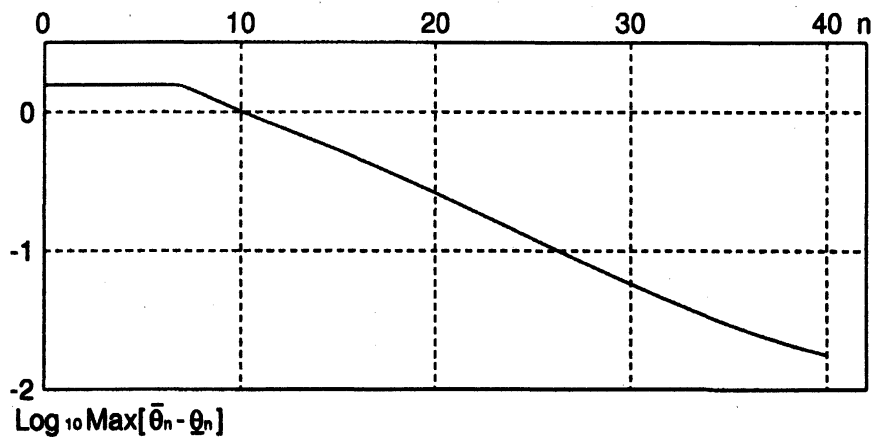


図 3: n vs. $\log_{10} \max_s (\bar{\theta}_n(s) - \underline{\theta}_n(s))$.

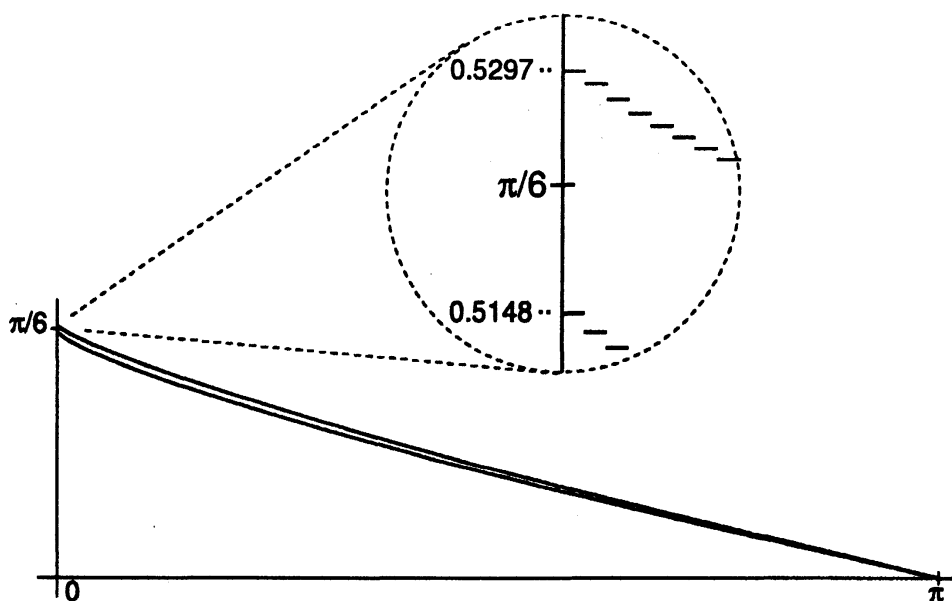
が検証されたので、定理 2.3 より (1.1) の解は大域的に一意的であることが示された。

5 Conclusion

精度保証付き数値計算を用いて、数十年もの間、未解決であった Stokes 極限波の大域的な一意性を証明することができた。J. F. Toland は頂点以外の全ての点で下に凸になるような極限波の存在を証明しているのので、今回の結果と合わせると、凸に関する Stokes' conjecture も証明された事になる。本論文の結果は、それ自体が数学的に重要な問題であるだけでなく、精度保証付き数値計算の大きな可能性を示したという点においても意味があると言える。

参考文献

- [1] C. J. Amick, L. E. Fraenkel, and J. F. Toland, On the Stokes' conjecture for the wave of extreme form, *Acta Math.*, vol. 148(1982), pp. 193-214.
- [2] K. Kobayashi, Numerical verification of the global uniqueness of a positive solution for Nekrasov's equation, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, vol. 21 (2004). No. 2, pp. 181-218.
- [3] G. Keady and J. Norbury, On the existence theory for irrotational water waves, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 83(1978), pp. 137-157.
- [4] L. E. Fraenkel, A constructive existence proof for the extreme Stokes wave, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, to appear.



⊠ 4: The shape of $\bar{\theta}_{40}(s)$ and $\underline{\theta}_{40}(s)$.

- [5] Yu. P. Krasovskii, On the theory of steady-state waves of finite amplitude, U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., vol 1 (1961), pp. 996-1018. (translation from Russian)
- [6] A. I. Nekrasov, On waves of permanent type I, Izv. Ivanovo-Voznesensk. Polite. Inst., vol. 3(1921), pp. 52-65. (in Russian)
- [7] H. Okamoto and M. Shōji, The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves, World Scientific Publ. Co., Singapore (2001).
- [8] K. Sasaki and T. Murakami, Irrotational, progressive surface gravity waves near the limiting height, J. Ocean. Soc. Japan, vol. 29(1973), pp. 94-105.
- [9] G. G. Stokes, On the theory of oscillatory waves. Appendix B : Consideration relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form, Math. Phys. Paper, vol. 1(1880), pp. 225-228.
- [10] J. F. Toland, On the existence of waves of greatest height and Stokes' conjecture, R. Soc. Lond., vol. A 363 (1978) pp. 469-485. 29(1973), pp. 94-105.
- [11] J. F. Toland and P. I. Plotnikov, Convexity of Stokes waves of extreme form, preprint.

- [12] S. M. Rump, Self-validating methods, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 324(2001), pp. 3-13.
- [13] 中尾 充宏, 山本 野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.
- [14] 大石 進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.