数理解析研究所講究録
1483 巻 2006 年 35-50



# 定常乱流の平均場について

大阪大学・基礎工学研究科　澤田謙 (Ken Sawada)　鈴木貴 (Takashi Suzuki)
Graduate School of Engineering Science,
Osaka University

**概要**

様々な観測によって、2次元乱流中に巨視的スケールの長時間にわたる渦構造が形成されることが知られている。2次元定常乱流の渦度分布を、[13] によって導入された渦点系平衡統計理論の平均場極限での渦点分布に対応させ、その振る舞いは平均場方程式によって記述されるものと考える。

平均場方程式の導出において、渦点の性質、統計集団、導出法に関する選択は重要な問題であり、それぞれの選択によって異なる平均場方程式が得られる。既に、単一渦、異符号渦で構成される決定論的渦点系や、確率論的渦点系を対象として高エネルギー極限と呼ばれる平均場極限における平均場方程式が導かれ、研究がされている。

今回、異符号渦点系に適用された2つの方法を任意の種類の強さを持つ決定論的渦点系に適用し、それぞれの方法で同じ形式の平均場方程式を得た。

## 1　定常乱流から平均場方程式へ

### 1.1　渦点系の時間発展方程式

2次元乱流が高 Reynolds 数の慣性小領域にあるとして、Euler 方程式での記述が可能な Euler 乱流と捉えることにする。実際には、領域の境界が渦度分布に大きな影響を及ぼし、その長時間にわたる渦構造は慣性小領域を超えた巨視的スケールの現象を含むため、対象スケールは inertial super range と呼ばれる。Euler 乱流が完全流体中の多数の渦点により達成されると考えて渦点系を取り上げ、Euler 方程式から渦点系の時間発展を記述する方程式を導く。

滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega(\subset \mathbb{R}^2)$ 内の自由完全流体の運動は、$u = u(x,t) = (u_1, u_2)$ を流体の速度ベクトル、$p = p(x,t)$ を流体の圧力とするとき、初期、境界条件を指定して Euler 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \qquad \text{in } \Omega \times [0,\infty) \tag{1}$$

を解くことで記述される。ただし、密度は簡単のため規格化した。

渦度 $\omega = \omega(x,t)$ と流線関数 $\psi = \psi(x,t)$ を

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \nabla \times u \\ u &\equiv \nabla^{\perp}\psi \qquad \nabla^{\perp} = (\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}),\ x = (x_1, x_2) \end{aligned}$$

と定義すると、渦度による形式

$$\psi = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x,y)\omega(y,t)dy \tag{2}$$

$$u = \nabla_x^{\perp}\int_{\Omega} G_{\Omega}(x,y)\omega(y,t)dy \tag{3}$$

が得られる。ただし、$G_{\Omega}(x,y)$ は0-Dirichlet境界条件を満たす $\Omega$ 上の Green 関数である。$\nabla^{\perp}G_{\Omega}$ の特異性のために、$\nabla^{\perp}$ を超関数的意味でとらえ、積分を Cauchy の主値積分として解釈する必要がある。ここで、$\omega$ が不連続な場合には弱形式を導入することになるが、$\omega$ が $\delta$ 関数のような強い特異性を持つ場合には対称性の仮定が必要となる。

今、$N$ 個の渦点で構成される渦点系を考え、$x_i$ にある渦点が強さ $\alpha_i$, $(i = 1, \cdots, N)$ を持つすると、渦度 $\omega$ は局在化して測度 $\omega_{N,t}(dx)$ として

$$\omega_{N,t}(dx) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{x_i}(dx), \quad \delta_{x_i}:\ x_i \text{に局在する Dirac の } \delta \text{ 関数} \tag{4}$$

と記述され、Cauchy の主値積分と $x_i$ 近傍での対称性の導入により、各渦点 $x_i$ の時間発展は

$$\frac{d}{dt}x_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \alpha_j \nabla_{x_i}^{\perp} G_{\Omega}(x_i, x_j) + \frac{1}{2}\alpha_i \nabla^{\perp}\gamma_{\Omega}(x_i) \tag{5}$$

で記述される。ただし、

$$\begin{aligned} G_{\Omega}(x,y) &= -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \tilde{\gamma}_{\Omega}(x,y) \\ &\quad \tilde{\gamma}_{\Omega}(x,y) \in C^2(\overline{\Omega}\times\Omega \cup \Omega\times\overline{\Omega}) \\ \gamma_{\Omega}(x) &= \tilde{\gamma}_{\Omega}(x,x) \equiv \left[G_{\Omega}(x,y) - \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\right]_{y\to x} \end{aligned}$$

であり、$G_{\Omega}(x,y)$ は $\Omega$ の Green 関数、$\gamma_{\Omega}(x)$ は Robin 関数と呼ばれている。

(5) で各渦点の運動が記述される渦点系は Hamiltonian 系であり、Hamiltonian $H_N = H_N(x_1, \cdots, x_N)$

$$H_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \alpha_i\alpha_j G_{\Omega}(x_i, x_j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2\gamma_{\Omega}(x_i) \tag{6}$$

を用いて、渦点系の時間発展方程式は正準形式

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_i \frac{d}{dt} x_{i1} &= \frac{\partial}{\partial x_{i2}} H_N \\ \alpha_i \frac{d}{dt} x_{i2} &= -\frac{\partial}{\partial x_{i1}} H_N \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{7}$$

で表される。ただし、$x_i = (x_{i1}, x_{i2})$。

## 1.2 平衡統計力学の適用

この節では、渦点系への平衡統計力学の導入を概観し、渦点系の平均場方程式を導出した過去の文献を整理し、今回得られた平均場方程式を含めてそれぞれを比較する。

渦点の数 $N$ を大数として平衡統計力学を渦点系に適用する際には、各渦点の位置座標 $\{x_1, \cdots, x_N\}$ で張られる直積空間を渦点系の相空間と捉え $\Omega^N$ で表し、その空間内の相点を $X^N$ とする : $X^N = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega^N$。相空間 $\Omega^N$ の分割を考え、$\{x_1, \cdots, x_k\}$ で張られる部分空間 $\Omega^k$ と、$\{x_{k+1}, \cdots, x_N\}$ で張られる部分空間 $\Omega^{N-k}$ とに分割し、それぞれの空間内の点を $X^k$、$X_{N-k}$ で表す。:

$$\begin{aligned} X^k &= (x_1, \cdots, x_k) & &\in \Omega^k \\ X_{N-k} &= (x_{k+1}, \cdots, x_N) & &\in \Omega^{N-k} \end{aligned}$$

また、それぞれの空間の相体積を $dX^N, dX^k, dX_{N-k}$ で表す。

平衡統計力学の適用には、エルゴード性が満たされていることが必要であるが、[5] により、より弱い条件で適用が可能であることが示され、$N$ を大数とするときその適用が妥当と考えられている。

平衡統計力学の適用により、相空間 $\Omega^N$ 上で各渦点の位置に関する確率測度

$$\mu_N = \mu_N(dX^N)$$

を導入でき、平衡状態に対応する物理量の相平均の計算が可能となる。また、エントロピー $S_N$、逆温度 $\beta = \beta_N$、自由エネルギー $F_N$ などの統計力学的量を導入することができる。

同じ強さを持つ各渦点の相互可換性を仮定し、確率測度 $\mu_N$ を用いて $k$-point reduced probability density function (pdf) $\rho_{N,k}^{\{\alpha_i\}} = \rho_{N,k}^{\{\alpha_i\}_{i=1,\cdots,k}}(X^k)$ を

$$\rho_{N,k}^{\{\alpha_i\}} \equiv \int_{\Omega^{N-k}} \mu_N dX_{N-k} \tag{8}$$

と定義する。$\rho_{N,k}$ は、それぞれが強さ $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 持つ $k$ 個の渦点が位置 $x_1, \cdots, x_k$ にある確率測度を表す。

(4) で与えられる渦度分布に対して、$\alpha_i = \alpha,\ \forall i$ とすると、相平均渦度は

$$
\begin{aligned}
<\omega_N(x)> &\equiv \int_{\Omega^N} \mu_N \sum_{i=1}^{N} \alpha\delta(x_i - x) dX^N \qquad (9)\\
&= \alpha N \rho_{N,1}(x)
\end{aligned}
$$

で与えられ、流体力学的関係式 (2) より相平均流線関数は

$$
\begin{aligned}
<\psi_N(x)> &\equiv \int_{\Omega} G_\Omega(x,y) <\omega(y)> dy \qquad (10)\\
&= \alpha N \int_{\Omega} G_\Omega(x,y)\rho_{N,1}(y) dy
\end{aligned}
$$

で与えられる。エルゴード性により平衡状態での渦点分布は相平均渦度で与えられ、one-point reduced pdf によって記述される。以下では簡単に $\omega_N(x) =< \omega_N(x) >$ , $\psi_N(x) =< \psi_N(x) >$ と表し、それぞれを渦度、流線関数と呼ぶ。

ここで、高エネルギー極限と呼ばれる平均場極限

$$
N \to \infty \quad \text{while } \tilde{E} = \frac{E}{\alpha^2 N^2} = O(1),\ \tilde{\beta} = \alpha^2 N \beta = O(1) \qquad (11)
$$

における振る舞いを取り上げる。$\alpha = 1/N$ とすれば、この極限で Hamiltonian (6) から計算される系のエネルギー $E$ は一定値のままで、逆温度 $\beta$ は $N$ に比例することになる。

$N \to \infty$ とするとき、各渦点は互いにより独立に運動し propagation of chaos が生じ、$N$ 個の渦点で構成される渦点系で定義された $\rho_{N,k}$, $\omega_N$, $\psi_N$ が平均場を表す滑らかな関数 $\rho_k$, $\omega$, $\psi$ に収束するものとすれば、

$$
\lim_{N\to\infty} \omega_N(x) = \rho_1(x) \qquad (12)
$$

と考えることが出来、定常乱流の渦度分布に関する問題は、$\rho_1$ を求める問題、もしくは $\rho_1$ が満たす平均場方程式を求める問題に帰着する。$N \to \infty$ での滑らかな関数の存在に関する数学的正当化は、[2, 5, 3, 11] において行われている。

平均場方程式の具体的な導出法は様々であるが、下表の選択が重要な問題となる。

| | |
|---|---|
| 渦点の性質 | 決定論的、確率論的 |
| 統計集団 | 小正準、正準、大正準 |
| 導出法 | 直接的方法、変分的方法 |

渦点の性質の選択は、渦点系が、各渦点の強さが一意的な値を持つ決定論的渦点系と、各渦点の強さが確率分布を持つ確率論的渦点系とに大別されることに由来する。このとき中立性は、前者では全ての渦点の強さに関連する制約と考えられるが (渦点 $x_i$ の強さを $\alpha_i$ として)、後者では各渦点毎の制約として考えられ (各渦点の強さ $\hat{\alpha} \in [-1,1]$ の確率分布を $P(d\hat{\alpha})$ として)、それぞれで

$$
\text{決定論的}: \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0, \qquad \text{確率論的}: \int_{[-1,1]} \hat{\alpha} P(d\hat{\alpha}) = 0
$$

と定義される。統計集団の選択は、異なる力学的仮定を採用するもので個別に扱う必要があるが、熱力学的極限においてはすべて同等とみなすことができるとされている。導出法の選択において、直接的方法とは $\rho_1$ の微分によって平均場方程式を導出する方法であり、変分法とは、平衡統計力学の導入によって定義される統計力学的汎関数の変分的性質を利用して平均場方程式を求める方法である。

以上により、主な文献を次の様に分類できる。

[6] ：決定論的 (異符号)、小正準集団、最大エントロピー法
[16] ：決定論的 (異符号)、小正準集団、直接的方法
[2] ：決定論的 (単一)、正準集団、最小自由エネルギー法
[11] ：確率論的 (任意)、正準集団、最小自由エネルギー法

単一渦 $\alpha_i = \alpha,\ \forall i$ で構成される渦点系を対象にした [2] では、平均場方程式

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \dfrac{e^v}{\int_\Omega e^v dx} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

が得られている。ただし、$v = v(x)$ と定数 $\lambda$ は、渦点系平衡平均場極限の流線関数と統計力学的逆温度 $\beta$ に関連している。また、[3] により、適当な条件下において小正準集団と正準集団での同等性が示されている。

異符号渦 $\alpha_i = \alpha$ or $-\alpha,\ \forall i$ で構成される渦点系を対象にした [16] と [6] では、同じ形式の平均場方程式

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \left( n^+ \dfrac{e^v}{\int_\Omega e^v dx} - n^- \dfrac{e^{-v}}{\int_\Omega e^{-v} dx} \right) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

が得られている。ただし、$n^\pm$ は $\pm\alpha$ の渦点数の割合を表す定数である。この導出法は、直ちに単一渦点系の平均場方程式 (13) を導く。($\mathbb{R}^2$ 領域に対しては [8] の結果がある。)

(13) は盛んに研究され、Green 関数で制御される爆発機構の $\lambda = 8\pi$ での量子化 [10]、単連結領域 $\Omega$ に対する $\lambda \in [0, 8\pi)$ での一意解の存在 [17]、特異摂動 [1]、写像度の計算 [4] が知られている。また、(14) に関連して [14, 18] の研究がある。

確率論的渦点系に対しては、[11] により各渦点の（相対的な）強さ $\hat{\alpha} \in [-1, 1]$ の確率分布が $P(d\hat{\alpha})$ で与えられる渦点系の平均場方程式

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \dfrac{\int_{[-1,1]} \hat{\alpha} e^{\hat{\alpha} v} P(d\hat{\alpha})}{\int_{[-1,1]} \int_\Omega e^{\hat{\alpha} v} dx P(d\hat{\alpha})} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

が得られている。

以上の文献に動機付けられて、[6] と [16] の方法を応用することで、全渦点数を $N$ として（相対的な）強さ $\hat{\alpha} \in [-1,1]$ を持つ渦点の数が確率測度 $P(d\hat{\alpha})$ により $P(d\hat{\alpha})N$ で与えられる決定論的渦点系の平均場方程式

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \displaystyle\int_{[-1,1]} \hat{\alpha} \frac{e^{\hat{\alpha} v}}{\int_\Omega e^{\hat{\alpha} v} dx} P(d\hat{\alpha}) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{16}$$

を新たに導いた。これは一般化された決定論的渦点系の平均場方程式であり、$P(d\hat{\alpha}) = n^{-}\delta_{-1}(dx) + n^{+}\delta_{+1}(dx)$ とすることで、[11] で記述できなかった [15, 6] の平均場方程式を記述することができる。

次節では、[16] と [6] の方法に基づいた (16) の具体的な導出を示す。それぞれで同じ形式の平均場方程式が得られたが、統計力学的逆温度 $\beta$ の観点からみると定数倍だけ異なる結果となり、[6] の方法では (16) において $\lambda \to \lambda/2$ となる。これは平均場方程式の数学解析の際に Trudinger-Moser 不等式を用いて評価される変分汎関数の有界性の問題に関わり、$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内の単一渦点系の場合、(13) の変分汎関数は $\lambda \in [0, 8\pi]$ で有界性を持ち、[2] の方法では $\lim_{N\to\infty} \beta/N \in [0, 8\pi]$ で滑らかな渦点分布を形成するが、[14] により境界のない向き付け可能なコンパクト 2 次元 $C^\infty$-Riemann 多様体上の中立的異符号渦点系の場合、(16) に対応する平均場方程式の変分汎関数は $\lambda \in [0, 16\pi]$ で有界で、[16] の方法では $\lim_{N\to\infty} \beta/N \in [0, 16\pi)$ で、[6] の方法では $\lim_{N\to\infty} \beta/N \in [0, 32\pi)$ で滑らかな渦点分布が主張される。

# 2　決定論的渦点系

## 2.1　Pointin and Lundgren (1976) の方法

$N$ 個の渦点で構成される $\Omega$ 内の任意の種類の渦の強さを持つ決定論的渦点系として、渦点 $x_i$ の渦の強さを $\alpha_i = \hat{\alpha}\alpha,\ \hat{\alpha} \in [-1,1]$ とし、（相対的な）強さ $\hat{\alpha}$ を持つ渦点数の全渦点数 $N$ に対する割合が確率測度 $P(d\hat{\alpha})$ によって決定される渦点系を取り上げる。

そのために、$N$ 個の渦点で構成される $\Omega$ 内の $M$ 種類の渦の強さを持つ決定論的渦点系を考え、渦点 $x_i$ の渦の強さを $\alpha_i = \hat{\alpha}^m \alpha,\ (m = 1, \cdots, M)$ とし、渦の強さ $\hat{\alpha}^m \alpha$ を持つ渦点の数を $n^m N,\ (m = 1, \cdots, M)$、

$$\hat{\alpha}^1, \cdots, \hat{\alpha}^M = O(1) \quad : \quad \text{constant}$$

$$n^1, \cdots, n^M \quad : \quad \text{constant}, \qquad 0 \le n^1, n^2 \cdots \le 1, \quad \sum_{m=1}^{M} n^m N = N$$

とする。渦点の強さとその個数を 2 つの変数で表すようにしたのは、平衡平均場極限において $N \to \infty,\ \alpha \to 0$ とすることを見越したものであり、その極限においても、変化しない定数 $\hat{\alpha}^m, n^m$ によって渦点系の性質を継承させるためである。特に、

$\hat{\alpha}\alpha$ を渦の強さ、$\hat{\alpha}$ を相対的な渦の強さと呼び、$\alpha$ を絶対的な渦の強さを決定するパラメータと考える。

この $M$ 種渦点系を $M \to \infty$ を含む場合へ拡張させて、$n^m \to P(d\hat{\alpha}^m)$ として、$\sum_{m=1}^{M} n^m \to \int_{[-1,1]} P(d\hat{\alpha})$ と考え、任意の種類の渦の強さを持つ一般化された渦点系に対応させる。

$N$ 個の渦点で構成される $M$ 種渦点系の Hamiltonian $H_N = H_N(X^N)$ は

$$H_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\alpha_i\alpha_j G_\Omega(x_i,x_j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2\gamma_\Omega(x_i)$$

で与えられ、小正準集団を対応させて、渦点系のエネルギーを $E$ として小正準測度 $\mu_N^{mc} = \mu_N^{mc}(dX^N)$

$$\mu_N^{mc} = \frac{\delta(H_N - E)dX^N}{Q_N(E)} \tag{17}$$

$$Q_N(E) = \int_{\Omega^N}\delta(H_N - E)dX^N \tag{18}$$

を導入する。$Q_N(E)$ は $\mu_N^{mc}$ の規格化因子であり、統計力学では分配関数と呼ばれる。統計力学的なエントロピー $S_N(E)$ と逆温度 $\beta = \beta_N$ を

$$S_N(E) = k_B \log Q_N(E), \qquad k_B : \text{Boltzmann 定数} \tag{19}$$

$$k_B\beta = \left.\frac{\partial}{\partial E}S_N(E)\right|_{N,V} = \frac{1}{T}, \qquad T : \text{温度} \tag{20}$$

で与えることができるが、これらの統計力学的量はもとの渦点系の流体としての熱力学的量には対応しない。(19) 式は Boltzmann の関係式と呼ばれ、巨視的な状態量であるエントロピーと微視的な状態に関連する状態数とを結びつける関係式である。

同じ強さを持つ渦点の相互可換性により、(8), により $\mu_N^{mc}$ から導かれる one-point reduced pdf と two-point reduced pdf を渦の強さ毎に

$$\begin{aligned}\rho_{N,1}^{\alpha_i}(x_i) &= \int_{\Omega^{N-1}}\mu_N^{mc}dX^{N-1}\\ &\equiv \rho_{N,1}^{m}(x) \quad (\alpha_i = \hat{\alpha}^m\alpha)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\rho_{N,2}^{\alpha_i,\alpha_j}(x_i,x_j) &= \int_{\Omega^{N-2}}\mu_N^{mc}dX^{N-2}\\ &\equiv \rho_{N,2}^{m,n}(x,y) \quad (\alpha_i = \hat{\alpha}^m\alpha, \alpha_j = \hat{\alpha}^n\alpha)\end{aligned} \tag{22}$$

と分類して定義できる。ただし、$dX^{N-1}(dX^{N-2})$ は渦点の強さを指定した渦点以外の渦点の相空間による $N-1(N-2)$ 次元相体積である。

(9),(10) により、平衡状態に対応する渦度 $\omega_N = \omega_N(x)$ は

$$\omega_N = \alpha N\sum_{m=1}^{M}\hat{\alpha}^m n^m \rho_{N,1}^m(x) \tag{23}$$

で与えられ、流線関数 $\psi_N = \psi_N(x)$ は

$$\psi_N = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\left[\alpha N \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n^m \rho_{N,1}^m(y)\right] dy \tag{24}$$

で与えられる。

one-point reduced pdf $\rho_{N,1}^{\alpha_k}(x_k)$ の $x_k$ 微分を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_k}\rho_{N,1}^{\alpha_k}(x_k) &= \frac{1}{Q_N(E)}\nabla_{x_k}\int_{\Omega^{N-1}}\delta(H_N-E)dX^{N-1} \\
&= -\frac{1}{Q_N(E)}\int_{\Omega^{N-1}}\nabla_{x_k}H_N\frac{\partial}{\partial E}\delta(H_N-E)dX^N \\
&= -\frac{1}{Q_N(E)}\sum_{j=1,j\neq k}^{N}\int_\Omega \alpha_k\alpha_j\nabla_{x_k}G_\Omega(x_k,x_j)\left(\frac{\partial Q_N(E)}{\partial E}\rho_{N,2}^{\alpha_k,\alpha_j}(x_k,x_j)\right. \\
&\qquad \left.+Q_N(E)\frac{\partial}{\partial E}\rho_{N,1}^{\alpha_k,\alpha_j}(x_k,x_j)\right)dx_j \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{1}{Q_N(E)}(\alpha_k)^2\nabla_{x_k}\gamma_\Omega(x_k)\left(\frac{\partial Q_N(E)}{\partial E}\rho_{N,1}^{\alpha_k}(x_k)+Q_N(E)\frac{\partial\rho_{N,1}^{\alpha_k}(x_k)}{\partial E}\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

である。最後の等式では

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^{N-1}}\nabla_{x_k}G_\Omega(x_k,x_j)\frac{\partial}{\partial E}\delta(H_N-E)dX^N \\
&\quad = \int_\Omega \nabla_{x_k}G_\Omega(x_k,x_j)\frac{\partial}{\partial E}\left[Q_N(E)\int_{\Omega^{N-2}}\mu_N^{mc}dX^{N-2}\right]dx_j
\end{aligned}$$

と

$$\int_{\Omega^{N-1}}\frac{\partial}{\partial E}\delta(H_N-E)dX^{N-1} = \frac{\partial}{\partial E}\left[Q_N(E)\int_{\Omega^{N-1}}\mu_N^{mc}dX^{N-1}\right]$$

の関係が使われている。

$\alpha_k = \hat{\alpha}^n\alpha,\ x_j \to y$ として、渦の強さの種類別に和をとれば、(25) は

$$\begin{aligned}
= \ & -\frac{1}{Q_N(E)}\int_\Omega\sum_{m=1}^{M}\left[\alpha^2\left(\hat{\alpha}^n\hat{\alpha}^m n^m N-(\hat{\alpha}^n)^2\right)\nabla_{x_1}G_\Omega(x_k,y)\frac{\partial Q_N(E)}{\partial E}\rho_{N,2}^{n,m}(x_k,y)\right]dy \\
& -\frac{1}{Q_N(E)}\int_\Omega\sum_{m=1}^{M}\left[\alpha^2\left(\hat{\alpha}^n\hat{\alpha}^m n^m N-(\hat{\alpha}^n)^2\right)\nabla_{x_k}G_\Omega(x_k,y)Q_N(E)\frac{\partial\rho_{N,2}^{1,m}(x_k,y)}{\partial E}\right]dy \\
& -\frac{1}{2}\frac{1}{Q_N(E)}(\hat{\alpha}^n\alpha)^2\nabla_{x_k}\gamma_\Omega(x_k)\left(\frac{\partial Q_N(E)}{\partial E}\rho_{N,1}^{1}(x_k)+Q_N(E)\frac{\partial\rho_{N,1}^{n}(x_k)}{\partial E}\right)
\end{aligned}$$

となる。ここで統計力学的関係式 $\partial Q_N(E)/\partial E = Q_N(E)/k_BT$ を利用し、高エネルギー極限と呼ばれる平均場極限

$$N\to\infty,\text{while } \tilde{E} = \frac{E}{N^2\alpha^2} = O(1),\ \tilde{\beta} = \frac{\alpha^2 N}{k_BT} = \alpha^2 N\beta = O(1) \tag{26}$$

導入し、propagation of chaos に対応して、reduced pdf に対して

$$\rho_2^{n,m}(x,y) \simeq \rho_1^n(x)\rho_1^m(y)$$

を仮定し、$N \to \infty$ の極限でも (23) が成立して $\omega(x) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n^m \rho_1^m(x)$ とすると、平均場極限において $x_k \to x$ として

$$\nabla_x \rho_1^n(x) = -\tilde{\beta}\hat{\alpha}^n \rho_1^n(x) \int_\Omega \nabla_x G_\Omega(x,y)\omega(y)dy \tag{27}$$

の関係が成立する。$\int_\Omega \rho_1^n(x)dx = 1$ から

$$\rho_1^n(x) \quad = \quad \frac{\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^n \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)dy\right]}{\int_\Omega \exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^n \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)dy\right]dx}$$

である。また、(27) に $\nabla_x$ を作用させると

$$\begin{aligned}
\text{(27) の左辺} &= \nabla_x^2 \left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^n \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)dy\right] \\
\text{(27) の右辺} &= -\tilde{\beta}\hat{\alpha}^n \int_\Omega \nabla_x^2 G_\Omega(x,y)\omega(y)dy \\
&= \tilde{\beta}\hat{\alpha}^n \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n^m \frac{\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^m \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)dy\right]}{\int_\Omega \exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^m \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)dy\right]dx}
\end{aligned}$$

であり、極限でも (24) が成立して $\psi(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)dy$ すると、

$$-\nabla_x^2 \psi(x) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n^m \frac{\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^m \psi(x)\right]}{\int_\Omega \exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}^m \psi(x)\right]dx} \tag{28}$$

の関係が導かれる。

ここで、$-\tilde{\beta}\psi = v$, $-\tilde{\beta} = \lambda$ と変換して境界条件と合わせれば、平均場方程式は

$$\begin{cases}
-\Delta v = \lambda \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n^m \dfrac{e^{\hat{\alpha}^m v}}{\int_\Omega e^{\hat{\alpha}^m v}dx} & \text{in } \Omega \\
v = 0 & \text{on } \partial\Omega
\end{cases} \tag{29}$$

となる。$M \to \infty$ も含む形式として確率測度 $P(d\hat{\alpha})$ を導入すれば、

$$\begin{cases}
-\Delta v = \lambda \int_{[-1,1]} \hat{\alpha} \dfrac{e^{\hat{\alpha} v}}{\int_\Omega e^{\hat{\alpha} v}dx} P(d\hat{\alpha}) & \text{in } \Omega \\
v = 0 & \text{on } \partial\Omega
\end{cases} \tag{30}$$

が得られる。

## 2.2 Joyce and Montgomery (1973) の方法

[6] の方法を用いて、$N$ 個の渦点で構成される $\Omega$ 内の $M$ 種渦点系を対象として、領域 $\Omega$ を cell $\Delta_i$ で分割し zero cell size の連続的極限をとることで平均場方程式を求め、任意の種類の渦の強さを持つ決定論的渦点系に拡張する。

各 cell $\Delta_i$ は、$|\Delta_i| \ll |\Omega|$ を満たすほど十分小さく、$\Delta_i$ 内に多くの渦点を含むほど十分大きいとすし、$|\Delta_i| = |\Delta|$ for $\forall i$ とし、cell $\Delta_i$ の中心座標を $x_i$ で表す。各 cell $\Delta_i$ の中の渦の強さ $\hat{\alpha}^m\alpha$ を持つ渦点の数を $n_i^m N$ 個とし、それぞれを $N_i^m$, $(i = 1, 2, \cdots,\ m = 1, \cdots, M)$ で表す。:

$$\begin{aligned} n_i^m N = N_i^m &\ :\ \Delta_i\text{内の } \hat{\alpha}^m\alpha \text{ の強さを持つ渦点の総数} \\ \sum_{i=1} N_i^m = N^m = n^m N &\ :\ \Omega\text{内の } \hat{\alpha}^m\alpha \text{ の強さを持つ渦点の数} \end{aligned}$$

$\Delta_i$ に分割された領域 $\Omega$ 内の $M$ 種渦点系のエネルギー $E$ は

$$\begin{aligned} E \ =\ & \frac{1}{2}\sum_{i=1}\sum_{j=1, j\neq i}\left(\sum_{m=1}^{M}\hat{\alpha}^m\alpha n_i^m N\right)\left(\sum_{m=1}^{M}\hat{\alpha}^m\alpha n_j^m N\right) G_\Omega(x_i, x_j) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}\left(\sum_{m=1}^{M}\hat{\alpha}^m\alpha n_i^m N\right)^2 \gamma_\Omega(x_i) \end{aligned}$$

で与えられる。

渦点系の力学的状態は配置 $\{N_i^m\}_{i=1,2,\cdots;\ m=1,\cdots,M}$ を決定することで得られ、小正準集団に対する Boltzmann の方法を適用して、平衡状態での渦点の配置を求める。ある配置 $\{N_i^m\}_{i,m}$ にある系の微視的状態の数を、Boltzmann の関係式で結ばれるエントロピー $S$ が示量的になるように、Gibbs 補正を行った修正 Maxwell-Boltzmann 統計により

$$W = W(\{N_i^m\}_{i,m}) = \prod_{m=1}^{M}\prod_{i=1}\frac{|\Delta|^{N_i^m}}{N_i^m!} \tag{31}$$

と定義し、状態数と呼ぶ。

最大の状態数を持つ配置 $\{N_i^m\}_{i,m}$ は系の平衡状態であり、その配置で状態数 $W$ は鋭いピークを形成することが知られている。また、断熱不可逆変化でのエントロピー増大を意味する熱力学第二法則を統計力学から支持する Boltzmann の関係式により、平衡状態は最大エントロピー状態に関連付けられるため、この方法は最大エントロピー法と呼ばれることもある。

$W$ の最大を求めることは $\log W$ の最大を求めるのと同じであり、各 $N_i^m$ を大数として Stirling の公式によって、$\log N_i^m! \simeq N_i^m \log N_i^m - N_i^m$ が成立することを利用する。エネルギー $E$ と各強さの渦点の個数 $N^m$ が一定とするとき、Lagrange の未定乗数法により、各 $N_i^m$ を独立変数とみなして、$c^1, c^2, \cdots, c^M, \beta'$ を定数として、汎関数

$J = J(\{N_i^m\}_{i,m})$

$$\begin{aligned} J &= \log W + \sum_{m=1}^{M} c^m \left( N^m - \sum_{i=1} N_i^m \right) \\ &+\beta' \left( E - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=1} \sum_{j=1, j\neq i} \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_i^m \right) \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_j^m \right) G_\Omega(x_i, x_j) \right. \\ &\left. - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=1} \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_i^m \right)^2 \gamma_\Omega(x_i) \right) \end{aligned} \tag{32}$$

の臨界点を求める問題になる。$\partial J / \partial N_k^n = 0$ により、各 $N_k^n$ は

$$\begin{aligned} 0 &= \log|\Delta| - \log N_k^n - c^n \\ &-\beta' \alpha^2 \hat{\alpha}^n \left[ \sum_{j=1, j\neq k} \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_j^m \right) G_\Omega(x_k, x_j) + \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_k^m \right) \gamma_\Omega(x_k) \right] \end{aligned} \tag{33}$$

を満たし、$k \to i$, $n \leftrightarrow m$ と変換すれば、cell $\Delta_i$ 内の $\hat{\alpha}^m \alpha$ の強さを持つ渦点の個数に関する表記

$$N_i^m = |\Delta| e^{-c^m} \exp\left[ -\beta' \alpha^2 \hat{\alpha}^m \left( \sum_{j=1, j\neq i} \left( \sum_{n=1}^{M} \hat{\alpha}^n N_j^n \right) G_\Omega(x_i, x_j) + \left( \sum_{n=1}^{M} \hat{\alpha}^n N_i^n \right) \gamma_\Omega(x_i) \right) \right] \tag{34}$$

が得られる。

ここで、$|\Delta| \to 0$ において、

$$\omega(x_i) = \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{1}{N} \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_i^m}{|\Delta|} = \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n_i^m}{|\Delta|} \tag{35}$$

を満たす滑らかな関数 $\omega = \omega(x)$ が存在するとする zero cell size の連続的極限を導入する。ここで導入された $\omega$ は zero cell size limit において、渦度分布という物理的意味を持つ。

$\omega$ が滑らかであるために、$|\Delta| \to 0$ の極限に付随して $N \to \infty$ となる必要があり、$\alpha = 1/N$ とし、$N \to \infty$ で $\tilde{E} = E/(\alpha^2 N^2) = O(1)$, $\tilde{\beta}' = \alpha^2 N \beta' = O(1)$ とすれば、高エネルギー極限と呼ばれる平均場極限に対応させることができる。

平均場極限を内包する zero cell size limit において、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1, j\neq i} \left( \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n_j^m}{|\Delta|} G_\Omega(x_i, x_j) \cdot |\Delta| \right) = \int_\Omega G_\Omega(x_i, y) \omega(y) dy$$

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \frac{e^{-c^m}}{N} = \exists C^m$$

であるとし、(34) の両辺に $\hat{\alpha}^m/(|\Delta|N)$ をかけて $m$ について和をとり、$\lim_{|\Delta|\to 0}$ とすると

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \lim_{|\Delta|\to 0} \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m n_i^m}{|\Delta|} = \omega(x_i) \\
(\text{左辺}) &= \sum_{m=1}^{M} \lim_{|\Delta|\to 0} \hat{\alpha}^m \frac{e^{-c^m}}{N} \exp\left[ -\beta' \alpha^2 N \hat{\alpha}^m \left( \sum_{j=1, j\neq i} \frac{\sum_{n=1}^{M} \hat{\alpha}^n n_j^n}{|\Delta|} G_\Omega(x_j, x_j) \cdot |\Delta| \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\sum_{n=1}^{M} \hat{\alpha}^n n_i^n}{|\Delta|} \gamma_\Omega(x_i) \cdot |\Delta| \right) \right] \\
&= \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m C^m \exp\left[ -\tilde{\beta}' \hat{\alpha}^m \int_\Omega G_\Omega(x_i, y) \omega(y) dy \right]
\end{aligned}
$$

となることから、$x_i \to x$ として

$$
\omega(x) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m C^m \exp\left[ -\tilde{\beta}' \hat{\alpha}^m \int_\Omega G_\Omega(x, y) \omega(y) dy \right] \tag{36}
$$

が得られる。

Lagrange の未定乗数に由来する $C^m$ は付加条件 $n^m = \lim_{|\Delta|\to\infty} \sum_{i=1} N_i^m / N$ から決定され、

$$
C^m = n^m \left[ \int_\Omega \exp\left[ -\tilde{\beta}' \hat{\alpha}^m \int_\Omega G_\Omega(x, y) \omega(y) dy \right] dx \right]^{-1}
$$

として求められる。また、未定乗数 $\beta'$ に関しては

$$
\begin{aligned}
\log W &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1} (N_i^m \log |\Delta| - N_i^m \log N_i^m + N_i^m) \\
&= \beta' \alpha^2 \left[ \sum_{i=1} \sum_{j=1, j\neq i} \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_i^m \right) \left( \sum_{n=1}^{M} \hat{\alpha}^n N_i^n \right) G_\Omega(x_i, x_j) \right. \\
&\qquad \left. + \left( \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m N_i^m \right)^2 \gamma_\Omega(x_i) \right] + N + \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1} N_i^m
\end{aligned}
$$

であることから、統計力学的関係式 $\partial S_N / \partial E = 1/T$ により、$\beta$ を統計力学的逆温度とするとき、$\beta' = \beta/2$ となる。

zero cell size limit においても流体力学的関係式 (2) が成立するとして、この極限における流線関数 $\psi = \psi(x)$ を導入すると、(36) 式より

$$
-\nabla^2 \psi(x) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m \frac{\exp\left[ -\tilde{\beta}' \hat{\alpha}^m \psi(x) \right]}{\int_\Omega \exp\left[ -\tilde{\beta}' \hat{\alpha}^m \psi(x) \right] dx}
$$

の関係が導かれる。

ここで、$-\tilde{\beta}'\psi = v$, $-\tilde{\beta}' = \lambda$ とおき、境界条件と合わせれば、平均場方程式は

$$\begin{cases} -\nabla^2 v = \lambda \sum_{m=1}^{M} \hat{\alpha}^m \dfrac{e^{\hat{\alpha}^m v}}{\int_\Omega e^{\hat{\alpha}^m v} dx} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{37}$$

となり、$M \to \infty$ も含む形式として確率測度 $P(d\hat{\alpha})$ を導入すれば、

$$\begin{cases} -\nabla^2 v = \lambda \int_{[-1,1]} \hat{\alpha} \dfrac{e^{\hat{\alpha} v}}{\int_\Omega e^{\hat{\alpha} v} dx} P(d\hat{\alpha}) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が得られる。

# 3 Appendix　確率論的渦点系：Neri (2004) の結果

$N$ 個の渦点で構成される $\Omega$ 内の確率論的渦点系を対象として、正準集団を対応させ平均場極限をとり、propagation of chaos を仮定することで平均場方程式を導く。この方法は単一渦点系の [2] の方法と本質的に同じである。

この確率論的渦点系において、各渦点の強さは確率分布する。渦点 $x_i$ の確率分布する強さを $\alpha_i = \hat{\alpha}_i\alpha$, $\hat{\alpha}_i \in [-1,1]$ とし、相対的な強さの分布 $\hat{\alpha}_i$ は $\mathbb{R}$ 上の有界な台 $[-1,1]$ 上の Borel 確率測度 $P(d\hat{\alpha}_i)$ により与えられ、$P$ はすべての渦点に対して同一で互いに独立であるとする。

この渦点系に対して、各渦点の位置座標と相対的な強さ $x_i \in \Omega$, $\hat{\alpha}_i \in [-1,1]$ により、$\tilde{x}_i = (x_i, \hat{\alpha}_i)$, $(i = 1, \cdots, N)$ を定め、$\{\tilde{x}_1, \cdots \tilde{x}_N\}$ で張られる空間相空間と捉え $\tilde{\Omega}^N$ で表し、その中の点を $\tilde{X}^N$ で表す：$\tilde{X}^N = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_N) \in \tilde{\Omega}^N$。相空間 $\tilde{\Omega}^N$ の分割を考え、$\{\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k\}$ で張られる部分空間を $\tilde{\Omega}^k$、$\{\tilde{x}_{k+1}, \cdots, \tilde{x}_N\}$ で張られる部分空間を $\tilde{\Omega}^{N-k}$ とし、それぞれの空間内の相点を $\tilde{X}^k$, $\tilde{X}_{N-k}$ で表す。また、$d\tilde{x}_i = dx_i P(d\hat{\alpha}_i)$ として、それぞれの空間での相体積を $d\tilde{X}^N$, $d\tilde{X}^k$, $d\tilde{X}_{N-k}$ とする。

この渦点系の Hamiltonian $H_N = H_N(\tilde{X}^N)$ は、

$$H_N = \frac{1}{2}\alpha^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j G_\Omega(x_i, x_j) + \frac{1}{2}\alpha^2 \sum_{i=1}^{N} (\hat{\alpha}_i)^2 \gamma_\Omega(x_i) \tag{38}$$

で与えられ、正準集団を適用させて、逆温度を $\beta = \beta_N$ として正準測度 $\mu_N^c = \mu_N^c(d\tilde{X}^N)$

$$\mu_N^c = \frac{e^{-\beta H_N}}{\int_{\tilde{\Omega}^N} e^{-\beta H_N} d\tilde{X}^N} \tag{39}$$

を導入する。

この正準測度は、微視的確率測度を $\mu_N = \mu_N(\tilde{X}^N)$ として、エントロピー汎関数 $S_N = S_N(\mu_N)$ とエネルギー汎関数 $E_N = E_N(\mu_N)$ を

$$S_N = \int_{\tilde{\Omega}^N} \mu_N \log \mu_N d\tilde{X}^N, \qquad E_N = \int_{\tilde{\Omega}^N} H_N \mu_N d\tilde{X}^N$$

と定めるとき、自由エネルギー汎関数 $F_N(\mu_N) = S_N + \beta E_N$ を最小化するため、(39) の導入は最小自由エネルギー法に対応する。

正準測度 $\mu_N^c$ により、$\tilde{\Omega}^N$ 上で $k$-point reduced pdf $\rho_{N,k} = \rho_{N,k}(\tilde{X}^k)$ を

$$\rho_{N,k} \equiv \int_{\tilde{\Omega}^{N-k}} \mu_N^c d\tilde{X}^{N-k} \tag{40}$$

と定義すると、正準測度 $\mu_N^c$ により平衡状態に対応する渦度 $\omega_N = \omega_N(x)$ は

$$\omega_N = \alpha N \int_{[-1,1]} \hat{\alpha}_1 \rho_{N,1}(\tilde{x}) P(d\hat{\alpha}_1) \tag{41}$$

で与えられ、そのときの流線関数 $\psi_N = \psi_N(x)$ は

$$\psi_N = \alpha N \int_{[-1,1]} \int_{\Omega} G_\Omega(x, x_1) \hat{\alpha}_1 \rho_{N,1}(\tilde{x}_1) dx_1 P(d\hat{\alpha}_1) \tag{42}$$

で与えられる。

$k$-point reduced pdf $\rho_{N,k}$ は、相空間の分割に関する Hamiltonian

$$H_N(\tilde{X}^N) = H_k(\tilde{X}^k) + H_{N-k}(\tilde{X}_{N-k}) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{N} \alpha^2 \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j G_\Omega(x_i, x_j)$$

の関係から

$$\rho_{N,k} = \frac{1}{Z(N)} e^{-\beta H_k(\tilde{X}^k)} \int_{\tilde{\Omega}^{N-k}} e^{-\beta H_{N-k}(\tilde{X}_{N-k})} e^{-\beta\alpha^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{N} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j G_\Omega(x_i, x_j)} d\tilde{X}_{N-k} \tag{43}$$

と書け、(39) により、$d\tilde{X}_{N-k} = Z(N-k) e^{\frac{\beta N}{(N-k)} H_{N-k}(\tilde{X}_{N-k})} \mu_{N-k}^c (d\tilde{X}_{N-k})$ であることから、

$$\begin{aligned}\rho_{N,k} &= \frac{Z(N-k)}{Z(N)} e^{-\beta H_k(\tilde{X}^k)} \\ &\quad \int_{\tilde{\Omega}^{N-k}} e^{\frac{\beta k}{(N-k)} H_{N-k}(\tilde{X}_{N-k})} e^{-\beta\alpha^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{N} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j G_\Omega(x_i, x_j)} \mu_{N-k}^c (d\tilde{X}_{N-k})\end{aligned}$$

が得られる。特に、$k = 1$ のとき平均場極限での定数 $\tilde{\beta}$ を用いた完全な形式では

$$\begin{aligned}&\rho_{N,1}(\tilde{x}_1) \\ &= \frac{Z(N-1)}{Z(N)} \exp\left[-\frac{\tilde{\beta}(\hat{\alpha}_1)^2}{2N} \gamma_\Omega(x_1)\right] \\ &\cdot \int_{\tilde{\Omega}^{N-k}} \exp\left[\frac{\tilde{\beta}}{2N(N-1)} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=2, j\neq i}^{N} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j G_\Omega(x_i, x_j) - \frac{\tilde{\beta}}{2N(N-1)} \sum_{i=2}^{N} (\hat{\alpha}_i)^2 \gamma_\Omega(x_i)\right] \\ &\cdot \exp\left[-\frac{\tilde{\beta}\hat{\alpha}_1}{N} \sum_{j=2}^{N} \hat{\alpha}_j G_\Omega(x_1, x_j)\right] \mu_{N-1}^c (d\tilde{X}_{N-1})\end{aligned}$$

である。

ここで、平均場極限 $N \to \infty$, $\tilde{\beta} = \alpha^2 N\beta = O(1)$ を導入し、$\alpha = 1/N$ として、$\rho_{N,k} \to \rho_k$ とし、propagation of chaos

$$\rho_k = \rho_1^{\otimes k} \tag{44}$$

を仮定する。この仮定は、平均場方程式の解の一意性に関連することが知られている [2, 11]。ここで、$Z = \lim_{N\to\infty} Z(N)/Z(N-1)$ とおくと、

$$\begin{aligned}\rho_1(\tilde{x}_1) &= Z^{-1}\exp\left[\frac{1}{2}\tilde{\beta}\int_{\tilde{\Omega}}\int_{\tilde{\Omega}}\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 G_\Omega(x_1,x_2)\rho_1(\tilde{x}_1)\rho_1(\tilde{x}_2)d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2\right] \\ &\quad\cdot\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}_1\int_{\tilde{\Omega}}\hat{\alpha}_2 G_\Omega(x_1,x_2)\rho_1(\tilde{x}_2)d\tilde{x}_2\right]\end{aligned}$$

となり、$\int_{\tilde{\Omega}}\rho_1 dx = 1$ より、

$$\rho_1(\tilde{x}_1) = \frac{\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}_1\int_{\tilde{\Omega}}\hat{\alpha}_2 G_\Omega(x_1,x_2)\rho_1(\tilde{x}_2)d\tilde{x}_2\right]}{\int_{\tilde{\Omega}}\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}_1\int_{\tilde{\Omega}}\hat{\alpha}_2 G_\Omega(x_1,x_2)\rho_1(\tilde{x}_2)d\tilde{x}_2\right]d\tilde{x}_1} \tag{45}$$

の関係が成立する。$x_1 \to x, x_2 \to y$ として、平均場極限でも (41),(42) の関係が成立し $\omega(x) = \int_{[-1,1]}\hat{\alpha}\rho_1(\tilde{x})P(d\hat{\alpha})$, $\psi(x) = \int_{\tilde{\Omega}}\hat{\alpha}G_\Omega(x,y)\rho_1(\tilde{y})d\tilde{y}$ とすると、流体力学的関係式 $-\Delta\psi(x) = \omega(x)$ から

$$-\Delta\psi(x) = \int_{[-1,1]}\hat{\alpha}\rho_1(\tilde{x})P(d\hat{\alpha})$$

であり、(45) より

$$-\Delta\psi(x) = \int_{[-1,1]}\hat{\alpha}\frac{\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}\psi(x)\right]}{\int_{\tilde{\Omega}}\exp\left[-\tilde{\beta}\hat{\alpha}\psi(x)\right]d\tilde{x}}P(d\hat{\alpha})$$

の関係が導かれる。

ここで、$-\tilde{\beta}\psi \to v$, $-\tilde{\beta} = \lambda$ と変換し、境界条件と合わせれば、平均場方程式

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda\dfrac{\int_{[-1,1]}\hat{\alpha}e^{\hat{\alpha}v}P(d\hat{\alpha})}{\int_{[-1,1]}\int_\Omega e^{\hat{\alpha}v}dxP(d\hat{\alpha})} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が得られる。

## 参考文献


[1] S. Baraket, F. Pacard; Construction of Singular Limits for a Semilinear Elliptic Equation in Dimension 2, Calc. Vari. **6** (1997), pp. 1-38.

[2] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchioro, M. Pulvirenti; A Special Class of Stationary Flows for Two-Dimensional Euler Equations: A Statistical Mechanics Description, Comm. Math. Phys. **143** (1992), pp. 501-525.

[3] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchioro, M. Pulvirenti; A Special Class of Stationary Flows for Two-Dimensional Euler Equations: A Statistical Mechanics Description Part2, Comm. Math. Phys. **174** (1995), pp. 229-260.

[4] S.Y.A. Chang, C.C. Chen, C.S. Lin; Extremal Functions for a Mean Field Equation in two dimension, Lectures on partial differential equations, New Stud. Adv. Math. **2** Int. Press, Somerville, MA, (2003), pp. 61-93.

[5] G.L. Eyink, H. Spohn; Negative-Temperature States and Large-Scale, Long-Lived Vortices in Two-Dimensional Turbulence, J. Statist. Phys. **70** (1993), pp. 833-886.

[6] G. Joyce, D. Montgomery; Negative Temperature States for Two-Dimensional Guiding-Centre Plasma, J. Plasma Phys. **10** (1973), pp. 107-121.

[7] M.K.H. Kiessling; Statistical Mechanics of Classical Particles with Logarithmic Interactions, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), pp. 27-56.

[8] T.S. Lundgren, Y.B. Pointin; Statistical Mechanics of Two-Dimensional Vortices, J. Statist. Phys. **17** No.5 (1977), pp. 323-355.

[9] C. Marchioro, M. Pulvirenti; Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids, Appl. Math. Sci. **96**, Springer-Verlag, New York (1994).

[10] N. Nagasaki, T. Suzuki; Asymptotic Analysis for Two-dimensional Elliptic Eigenvalue Problem with Exponentially Dominated Nonlinerities, Asymptot. Anal. **3** (1990), pp. 173-188.

[11] C. Neri; Statistical Mechanics of the N-Point Vortex System with Random Intensities on a Bounded Domain, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **21** (2004), pp. 381-399.

[12] P.K. Newton; The N-Vortex Problem: Analytical Techniques, Appl. Math. Sci. **145** ,Springer-Verlag, New York (2000).

[13] L. Onsager; Statistical Hydorodynamincs, Nuovo Cimento Suppl. **6** (9) No.2 (1949), pp. 279-287.

[14] H. Ohtsuka, T. Suzuki; to appear in Adv. Differential Equations.

[15] Y.B. Pointin, T.S. Lundgren; Equation of State of a Vortex Fluid, Phys. Rev. A **13** No.3 (1976), pp. 1274-1275.

[16] Y.B. Pointin, T.S. Lundgren; Statistical Mechanics of Two-Dimensional Vortices in a Bounded Container, Phys. Fluids **19** No.10 (1976), pp. 1459-1470.

[17] T. Suzuki; Global Analysis for a Two-dimensional Elliptic Eigenvalue Problem with the Exponential Nonlinearity, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9** No.4 (1992), pp. 367-398.

[18] T. Suzuki; Free Energy and Self-Interacting Particles, Birkhäuser, Boston (2004).