

## 大気大循環に観られる $E = mc^2$ の法則

Energy Spectrum of  $E = mc^2$  Observed in the  
General Circulation of the Atmosphere

筑波大学・計算科学研究センター 田中 博 (Hiroshi L. Tanaka)

Center for Computational Sciences

University of Tsukuba

### Abstract

In this study, energy spectrum of the large-scale atmospheric motions is examined in the framework of the 3D normal mode decomposition. The horizontal scale of disturbance is measured by the phase speed of a Rossby mode  $c$  instead of the wavenumber based on the wave dispersion relation. Based on the theoretical deduction of the Rossby wave breaking threshold, we have shown that the barotropic energy spectrum of the general circulation  $E$  can be represented as  $E = mc^2$ , where  $m$  is a mass of the atmosphere for unit area. The theoretical inference of the spectrum agrees quite well with the observation.

### 1. 研究の背景

大気大循環のエネルギースペクトルを観ると、総観規模擾乱からメソ擾乱のスケールで波数の-3乗則が観測される。このエネルギースペクトルは、2次元乱流理論により慣性小領域におけるエンストロフィーカスケードの特徴として理解されてきた。しかし、総観規模からプラネタリー波のスケールでは、中緯度の傾圧性を解消するために生じる傾圧不安定波のBarotropization（順圧化）により、大気傾圧成分から順圧成分への擾乱のエネルギー源が大量に存在する。したがって、乱流スペクトルの領域ではエネルギー源はないとする慣性小領域理論は、はじめから成り立たず、この領域のエネルギースペクトルを説明する理論は未だにないと言える。

一方で、全球大気の3次元ノーマルモード展開によりエネルギースペクトルを観ると、大気の順圧成分に図1のような特徴的な乱流スペクトルが観られる。この図では、ロスビー波の分散関係式に従い、波数の代わりに位相速度  $c$  が横軸に目盛っており、それぞれのノーマルモードに射影されたエネルギースペクトルは、乱流領域で  $c$  の2乗に比例するような分布となることが知られている (Tanaka 1985; Tanaka and Kung 1988; Tanaka and Kasahara 1992)。

3次元ノーマルモード (Hough モード) 展開による大気大循環のプリミティブ方程式系はスペクトルモデルとして以下のように書ける。

$$\frac{dw_i}{d\tau} = -i\sigma_i w_i - i \sum_{jk} r_{ijk} w_j w_k + f_i, \quad (1)$$

ここで、 $w_i$  は状態変数の展開係数、 $\sigma_i$  はラプラス潮汐方程式の固有振動数、 $r_{ijk}$  は非線形相互作用係数、 $f_i$  は外力の展開係数である。添え字の  $i$  は3次元波数を表す。気圧傾度力やコリオリ力などのすべての線形項が  $\sigma_i$  により対角化されて表記されるのが特徴である。個々のノーマルモードに射影されたエネルギーは以下の式で定義される。

$$E_i = \frac{1}{2} p_0 h_m |w_i|^2. \quad (2)$$

ここで、 $p_0$  は平均地上気圧、 $h_m$  は等価深度である。

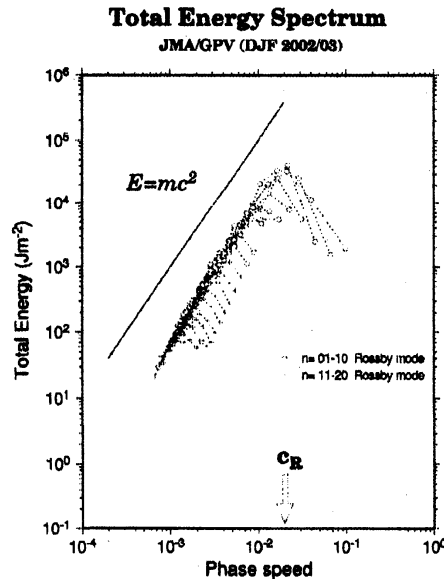


図 1: 大気大循環のエネルギースペクトル (順圧成分)

図 1 の位相速度 (絶対値) は、地球の半径  $a$ 、回転の角速度  $\Omega$  をもちいて  $2\Omega a$  で無次元化され、東西波数を  $n$  として、 $c_i = \sigma_i/n$  で定義される。ロスビー波の分散関係式に従い、西進位相速度の値が大きいほど波のスケールは大きい。解析領域はメソ擾乱からプラネタリー波までをカバーしている。さらに位相速度 (振動数) の大きいところには重力波のスペクトルが存在するが、ここでは省略した (Tanaka 1985 参照)。

(1) 式の線形項と非線形項の比は、運動が乱流的になるか波動的 (ノーマルモード) にな

るかを定める重要な無次元量となる。

$$R_i = \frac{|\sum_{jk} r_{ijk} w_j w_k|}{|\sigma_i w_i|} \quad (3)$$

本研究ではこの比  $R_i$  を球面 Rhines 比と呼ぶ (図 2)。この  $R_i$  が 1 となるようなスケールは  $\beta$  平面では Rhines スケールと呼ばれる (Rhines 1975)。

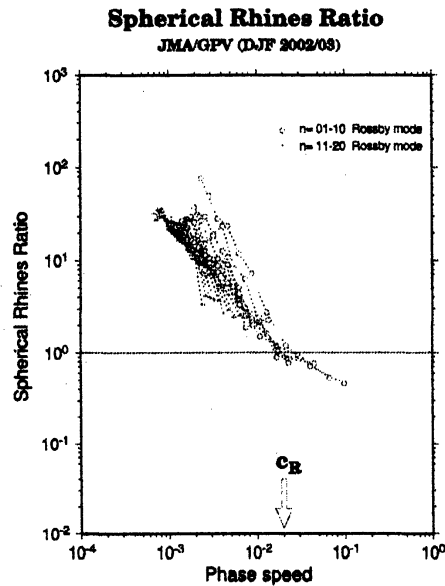


図 2: 球面 Rhines 比と球面 Rhines スケール

図 1 のスペクトルピークは、球面で定義した Rhines スケール (以後、球面 Rhines 速度  $c_R$  と呼ぶ) により決定され、非線形項が卓越する乱流領域と線形項が卓越する波動領域が明瞭に分離される。乱流領域では、Barotropization により総観規模擾乱に供給されたエネルギーが 2 次元流体力学の束縛により逆カスケードを生じ、 $c_R$  に向かって流れる。しかし、 $c_R$  を越えると非線形項が働かなくなり、逆カスケードはここで止まるため、ここにエネルギーピークが形成される。さらに振動数の大きな領域のスペクトルは、重力波のスペクトルにつながるため、減少するようになる (Tanaka 1985)。 $c_R$  を越えるプラネタリー波から重力波へのスペクトルは  $c$  の  $-3/5$  乗則に従うことが観測的に知られているが、それを説明する理論はまだない。球面 Rhines 速度は、西進するロスビー波 (線形項) と平均流による移流効果 (非線形項) がバランスし停滞波となるスケールでもであり、そこに山岳強制も加わることで、スペクトルピークが一層強化される (吉野・田中 2000)。

図3はエネルギーの Wave-wave interaction を位相速度空間で積分することにより得られるエネルギーフラックスで、正の値が逆カスケードを示す。データは NCEP/NCAR 再解析の 1950 から 2003 年までの冬季 (DJF) の平均である。解析結果によると、総観規模擾乱 ( $c = 0.004$ ) に供給されたエネルギーが wave-wave interaction により、 $c_R$  まで逆カスケードを生じていることが解る。一部は総観規模からメソ擾乱にカスケードしているという解析結果も得られている。Tanaka and Terasaki (2006) では、総観規模擾乱から  $c_R$  へ向かうエネルギーの逆カスケードが急増し、 $c_R$  でエネルギーが過剰に蓄積される時にブロッキングが形成されることを示した。

位相速度空間におけるスペクトルピークの形成は、これまでの研究である程度は理解できたが、その特徴的なスペクトルの傾斜を説明する理論は未だにない。そこで本研究 (Tanaka et al. 2004) では、このエネルギースペクトルの傾斜について理論的な考察を行った。対象としたのは長周期変動を支配する大気の順圧成分についてのエネルギースペクトルであり、用いたデータは気象庁 GSM/GPV の 2002/03 年 DJF の期間である。

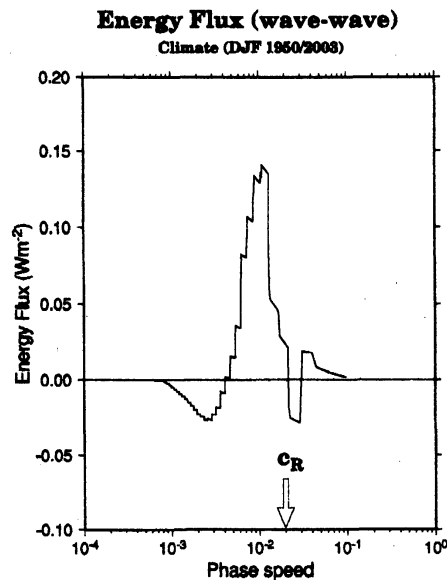


図 3: Wave-wave 相互作用による乱流エネルギーフラックス

## 2. ロスピー波の砕波と飽和スペクトル

3次元ノーマルモード展開において、大気の順圧成分は状態変数の鉛直平均場に相当する。発散場は位相速度  $c$  の大きい重力波領域で卓越し、 $c$  の小さいロスビー波領域では非発散の近似が成り立つ。

従って、ロスビー波の碎波条件は、図4のように順圧非発散流体における渦位  $q$  の南北微分が負になることである (Garcia 1991, Tanaka and Watarai 1999)。

$$\frac{\partial q}{\partial y} < 0, \quad q = \nabla^2 \psi + f, \quad (4)$$

ここで、 $\psi$  は流線関数、 $f$  はプラネタリー渦度である。中緯度  $\beta$  平面を仮定すると、この碎波条件は擾乱の東西流速  $u$  についての飽和点を与える。

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi + f) = -\nabla^2 u + \beta < 0. \quad (5)$$

一方、 $u$  の飽和点はそのままロスビー波の位相速度  $c$  と関係するので、これを  $c$  で表現すると

$$u < -\frac{\beta}{n^2 + l^2} = c. \quad (6)$$

つまり、擾乱の振幅が傾圧不安定によるエネルギー供給で指数関数的に増大し、その東西流速がロスビー波の西進位相速度よりも速くなると、ロスビー波は碎波する、というのが碎波条件の解釈になる。

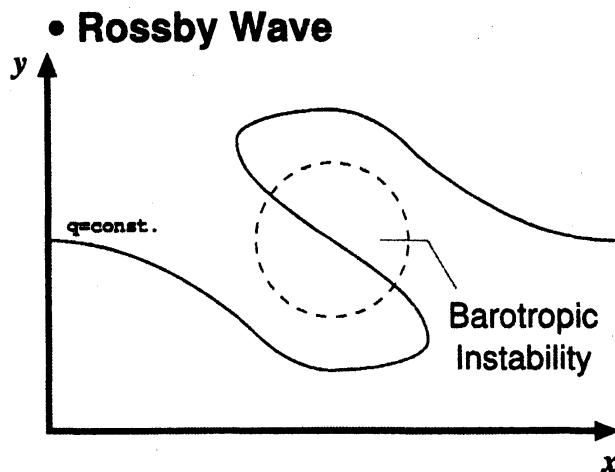


図4: Rossby 波の碎波条件

この議論は球面にも拡張できて、位相速度は (1) 式から  $c_i = \sigma_i/n$  で与えられる。従って、ロスビー波の飽和で規定される擾乱のエネルギースペクトル  $E$  をロスビー波の位相速度  $c$  で表すと

$$E = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) dp = \frac{p_0}{g} c^2 = m c^2, \quad (7)$$

となり、このスペクトルを越えるとロスビー波は碎波し、エネルギーの飽和が生じる (図1 参照)。ここで、重力加速度を  $g$ 、地上気圧を  $p_0$  とすると、 $m = p_0/g$  は単位面積あたりの質量

である。Shepherd (1987) で示されたように、波動領域では  $u$  成分が  $v$  成分よりも明らかに大きい。乱流領域では  $u$  と  $v$  についての等方向性が十分な精度で仮定できる。この法則は、 $u$  の上限の値でエネルギーレベルが示されるが、平面波に対してはエネルギーレベルはこの 1/4 倍となり、定量的にも定性的にも観測されるエネルギースペクトルと一致する。

### 3. まとめと結論

3次元ノーマルモード展開による大気大循環のエネルギースペクトルは、順圧成分において球面 Rhines 速度にピークを持つ特徴的なエネルギースペクトルを形成する。球面 Rhines 速度よりも遅い位相速度では、非線形項が卓越して乱流領域となり、総観規模擾乱により供給された順圧エネルギーは、2次元流体力学の束縛の中で逆カスケードを起こす。この領域では、Barotropization という外部強制により増幅する順圧ロスビー波が砕波を繰り返し、エネルギー的に飽和することでスペクトルが決定すると考えられる。本研究 (Tanaka et al. 2004) により、ロスビー波の砕波条件 ( $\partial q / \partial y < 0$ ) から導かれる地球規模のエネルギースペクトルは  $E = mc^2$  という関係を満たすことが示された。この関係は観測とほぼ一致する結果である。

### 参考文献

- Garcia, R. R., Parameterization of planetary wave breaking in the middle atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **48**, 1405–1419, 1991.
- Rhines, P. B., Waves and turbulence on a beta-plane, *J. Fluid Mech.*, **69**, 417–443, 1975.
- Shepherd, T., A spectral view of nonlinear fluxes and stationary-transient interaction in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1166–1178, 1987.
- Tanaka, H.L., Global energetics analysis by expansion into three dimensional normal mode functions during the FGGE winter. *J. Meteor. Soc. Japan*, **63**, 180–200, 1985.
- Tanaka, H.L. and E.C. Kung, Normal mode energetics of the general circulation during the FGGE year. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 3723–3736, 1988.
- Tanaka, H.L., and A. Kasahara, On the normal modes of Laplace's tidal equation for zonal wavenumber zero. *Tellus*, **44A**, 18–32, 1992.
- Tanaka, H. L., and Y. Watarai, A numerical experiment of breaking Rossby waves in the barotropic atmosphere with parameterized baroclinic instability, *Tellus*, **51A**, 552–573, 1999.
- Tanaka, H. L., Y. Watarai, and T. Kanda, Energy spectrum proportional to the squared phase speed of Rossby modes in the general circulation of the atmosphere, *Geophys. Res. Letters*, **31**(13), 13109, doi: 10.1029/2004GL019826, 2004.
- Tanaka, H.L. and K. Terasaki, Blocking formation by the accumulation of barotropic energy at the spherical Rhines speed. *J. Meteor. Soc. Japan* (accepted), 2006.
- 吉野純・田中博, 順圧大気モデルを用いた波長別エネルギースペクトルのピーク形成過程に関する研究. *天気* **47**, 619–633, 2001.