数理解析研究所講究録
1484巻 2006年 52-58

Weak and strong convergence theorems for accretive operators by an implicit iterative scheme

芝浦工業大学　厚芝 幸子　(Sachiko Atsushiba)
Department of Mathematics,
Shibaura Institute of Technology

1. 序

$A \subset E \times E$ は増大作用素とし, 任意の $r>0$ に対して J_r は A のレゾルベントであるとする. $0 \in Au$ をみたす $u \in E$ を見つける問題は多くの数学者によって研究されてきた. 中でも最も良く知られたスキームは次のものである: $x_0 = x \in E$ とし,

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1}$$

ここで $\{r_n\}$ は正の実数列である. (1) で定義される点列の収束については多くの数学者によって研究されている ([17, 18, 23] などを参照). Kamimura and Takahashi [12, 13] は Mann's type [16] と Halpern's type [9] の点列近似法について研究し, m-増大作用素に対する弱および強収束定理を証明した.

T を Banach 空間の空でない閉凸部分集合 C から C への非拡大写像とする. u を C の元とし, t を $0<t<1$ の任意の実数とする. 任意の $x \in C$ に対して

$$T_t x = tu + (1-t)Tx$$

で定義される C 上の縮小写像 T_t は唯一の不動点 x_t を持つ. Browder [6] は Hilbert 空間において, $t \to 0$ のときにこの $\{x_t\}$ が T の不動点に強収束することを証明した. Takahahi and Ueda [28] は Browder [6] の定理におけるこの $\{x_t\}$ の収束について Banach 空間で研究した. そして一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間において, $k \to \infty$ のときに次の点列 x_k が T の不動点に強収束することを証明した ([20] も参照):

$$x_k = \frac{1}{k} x + \left(1 - \frac{1}{k}\right) T x_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots. \tag{2}$$

ここで x は C の元とする. 一方, Xu and Ori [29] は有限個の写像 $T_1, T_2, \dots, T_r$ に対して次の陰的点列近似法 (implicit iterative process) を導入した: $x = x_0 \in C$ とし,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_n x_n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $T_n = T_{n+r}$ とする. そして Xu and Ori [29] は (3) で定義される点列の弱収束定理を Hilbert 空間において証明した. Liu [15] は (3) で定義される点列を研究し, 一様凸な Banach 空間において, 写像族 $T_1, T_2, \dots, T_r$ の中で semicompact となる写像 T_i が存在するという仮定のもとで強収束定理を証明した ([1, 2, 5, 3, 10, 11, 24, 30] も参照).

本論文では, [12, 13, 29] の考えを用いて, Banach 空間における増大作用素の零点を求めるための implicit iterative process を導入し, Opial 条件をみたす Banach 空間において m-増大作用素に対する弱収束定理を証明する. さらに, 定義域がコンパクトであ

るという仮定のもとに, m-増大作用素のレゾルベントを用いて構成される点列の強収束についても記す.

2. 準備

本論文では以後, E は実Banach空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $x_n \rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また w-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に弱収束することを表す. B_r は集合 $\{x \in E : \|x\| \le r\}$ をあらわす. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに $\mathbb{N}$ はすべての正整数からなる集合を表す.

C を実Banach空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が非拡大であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$$

をみたすときであり, $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. I は E の恒等作用素とする. E から E^* への双対写像を次のような集合値写像と定義する:

$$J(x) = \{y^* \in E^* : \langle x, y^* \rangle = \|x\|^2 = \|y^*\|^2\}, \quad x \in E.$$

Banach空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ について $\|x + y\|/2 < 1$ が成立するときをいう. 狭義凸なBanach空間 E では, 任意の $x, y \in E$, $\lambda \in (0,1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば, $x = y$ となる. Banach空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し, $\|x - y\| \ge \varepsilon$ をみたす $x, y \in B_1$ について $\|x + y\|/2 \le 1 - \delta$ となることである. 一様凸なBanach空間は回帰的であり, 狭義凸であることが知られている ([25] 参照).

Banach空間 E がOpial条件をみたすとは, w-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ をみたす E の点列 $\{x_n\}$ と $x \in C$ について

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するときにいう ([19] 参照). 回帰的なBanach空間においては, この条件が成立するための必要十分条件は w-$\varliminf_{\alpha} x_\alpha = x$ をみたす E の net$\{x_\alpha\}$ と $x \in C$ について

$$\varliminf_{\alpha} \|x_\alpha - x\| < \varliminf_{\alpha} \|x_\alpha - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するという条件である ([4] 参照). もし双対写像が弱点列的連続であるならば, E はOpial条件をみたす. すべてのHilbert空間はOpial条件をみたすし, $1 < p < \infty$ のときの空間 ℓ^p はOpial条件をみたす ([14, 19] 参照). $p \neq 2$ のときの L^p 空間は通常Opial条件をみたさないが, 任意の可分なBanach空間はOpial条件をみたすようにリノルミング可能である ([8, 19] 参照).

作用素 $A \subset E \times E$ の定義域を $D(A) = \{z \in E : Az \neq \emptyset\}$ とし, 値域を $R(A) = \bigcup\{Az : z \in D(A)\}$ とする. 任意の $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$ に対して $\langle y_1 - y_2, j \rangle \ge 0$

をみたす $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するとき, A を増大作用素とよぶ. A が増大作用素であるとすると

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + r(y_1 - y_2)\|$$

が $x_i \in D(A)$, $y_i \in Ax_i$, $i = 1, 2$ と $r > 0$ に対して成立する. 増大作用素 A が任意の $r > 0$ に対して $R(I + rA) = E$ をみたすのであれば, その A は m-増大であるといわれる. A が増大作用素であるとき, 任意の $r > 0$ に対して一価の非拡大写像 $J_r : R(I + rA) \to D(A)$ を $J_r = (I + rA)^{-1}$ で定義し, これを A のレゾルベントとよぶ. また $(I - J_r)/r$ で吉田近似 A_r を定義する. 任意の $x \in R(I + rA)$ に対して $A_r \in AJ_r x$ が成立する. また m-増大作用素 A に対して $A^{-1}0 = F(J_r)$ が全ての $r > 0$ に対して成立する. Hilbert では A が m-増大作用素であることの必要十分条件は A が極大単調作用素であることである ([25, 26, 27] など参照).

この論文では特に断りがなければ, 以後 E は実 Banach 空間で, $A \subset E \times E$ は m-増大作用素とし, J_r で A のレゾルベントとする.

3. 増大作用素の零点への弱収束定理

この節では次に定義される点列 $\{x_n\}$ を考え, この点列の弱収束について考察する ([29] 参照): $x_0 = x \in E$ であり, $\{x_n\}$ を

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \tag{4}$$

が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立するように定義される点列とする. ここで $\{\alpha_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $\{r_n\}$ は正の実数列とする.

まず先に, 弱収束定理の証明に使う補題を記す.

Lemma 3.1 ([3]). $x_0 = x \in E$ であり, $\{x_n\}$ は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立する E の点列と定義する. ここで $\{\alpha_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $\{r_n\}$ を正の実数列とする. $A^{-1} \neq \emptyset$ とする. 任意の $w \in A^{-1}0$ に対して $\|x_{n+1} - w\| \leq \|x_n - w\|$ が成立し, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\|$ が存在する.

次の補題は Theorem 3.4 の証明の中で本質的である.

Lemma 3.2 ([3]). E を Opial 条件をみたす Banach 空間とし, C を E の空でない弱コンパクト凸部分集合とする. A は $D(A) \subset C$ をみたす m-増大作用素とする. $x_0 = x \in C$ であり, $\{x_n\}$ は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立するように定義される C の点列とする. ここで $\{\alpha_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_n < 1$ をみたし, かつ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ をみたす実数列とする. $\{r_n\}$ は $\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n > 0$ をみたす正の実数列とする. もし, $A^{-1} \neq \emptyset$ であれば, $\{x_n\}$ の弱収束する部分点列は $A^{-1}0$ の元に弱収束する.

次の補題は Theorem 3.5 の証明の中で本質的である.

Lemma 3.3 ([3]). Eを一様凸なBanach空間とする. $x_0 = x \in E$であり, $\{x_n\}$は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての$n \in \mathbb{N}$に対して成立するように定義される点列とする. ここで$\{\alpha_n\}$は任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$0 < \alpha_n < 1$をみたし, かつ$\overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$をみたす実数列とする. $\{r_n\}$は$\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n > 0$をみたす正の実数列とする. もし, $A^{-1} \neq \emptyset$であれば, $\{x_n\}$の弱収束する部分点列は$A^{-1}0$の元に弱収束する.

Lemma 3.2を用いることでOpial条件をみたすBanach空間における次の弱収束定理を得る.

Theorem 3.4 ([3]). EをOpial条件をみたすBanach空間とし, CをEの空でない弱コンパクト凸部分集合とする. Aは$D(A) \subset C$をみたすm-増大作用素とする. $x_0 = x \in C$であり, $\{x_n\}$は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての$n \in \mathbb{N}$に対して成立するように定義される点列とする. ここで$\{\alpha_n\}$は任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$0 < \alpha_n < 1$をみたし, かつ$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$をみたす実数列とする. $\{r_n\}$は$\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n > 0$をみたす正の実数列とする. もし, $A^{-1} \neq \emptyset$であれば, $\{x_n\}$は$A^{-1}0$の元に弱収束する.

Lemma 3.3を用いることで一様凸でOpial条件をみたすBanach空間における次の弱収束定理を得る.

Theorem 3.5 ([3]). Eを一様凸でOpial条件をみたすBanach空間とし, $x_0 = x \in E$であり, $\{x_n\}$は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての$n \in \mathbb{N}$に対して成立するように定義される点列とする. ここで$\{\alpha_n\}$は任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$0 < \alpha_n < 1$をみたし, かつ$\overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$をみたす実数列とする. $\{r_n\}$は$\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n > 0$をみたす正の実数列とする. もし, $A^{-1} \neq \emptyset$であれば, $\{x_n\}$は$A^{-1}0$の元に弱収束する.

4. 増大作用素の零点への強収束定理

この節では(4)で定義された点列の強収束について考察する.

Theorem 4.1 ([3]). CをBanach空間Eの空でないコンパクト凸部分集合とする. Aは$D(A) \subset C$をみたすm-増大作用素とする. $x_0 = x \in C$であり, $\{x_n\}$は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての$n \in \mathbb{N}$に対して成立するように定義される点列とする. ここで$\{\alpha_n\}$は任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$0 < \alpha_n < 1$をみたし, かつ$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$をみたす実数列とする. $\{r_n\}$は$\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n > 0$をみたす正の実数列とする. もし, $A^{-1} \neq \emptyset$であれば, $\{x_n\}$は$A^{-1}0$の元に強収束する.

次に距離射影に関する強収束定理を示す.

Theorem 4.2 ([3]). E を一様凸な Banach 空間とする. $x_0 = x \in E$ であり, $\{x_n\}$ は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立するように定義される点列とする. ここで $\{\alpha_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $\{r_n\}$ は正の実数列とする. $A^{-1} \neq \emptyset$ と仮定する. P は E から $A^{-1}0$ の上への距離射影とする. $\{Px_n\}$ は

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_0\| = \inf\{\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\| : w \in A^{-1}0\}.$$

をみたす $A^{-1}0$ の唯一の元 z_0 に強収束する.

Remark 4.3. D を一様凸な Banach 空間の閉凸部分集合とし, P は E から D の上への距離射影とする. $\{y_n\}$ を E の点列で, 任意の $w \in D$ に対して $\{\|y_n - w\|\}$ が単調減少列になっているものとする. すると $\{Py_n\}$ は

$$\lim_n \|y_n - z\| = \inf\{\lim_n \|y_n - w\| : w \in D\}$$

をみたす D の唯一の元 z に強収束することもわかる.

Theorems 3.5,4.2 から次の結果を得る.

Theorem 4.4 ([3]). H を Hilbert 空間とし, A を極大単調作用素とする. $x_0 = x \in H$ であり, $\{x_n\}$ は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n$$

が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立するように定義される点列とする. ここで $\{\alpha_n\}$ と $\{r_n\}$ は Theorem 3.5 と同様とする. $A^{-1} \neq \emptyset$ と仮定し, P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影とする. $\{x_n\}$ は $v \in A^{-1}0$ に弱収束し, この v は $v = \lim_{n\to\infty} Px_n$ となる.

5. 主定理の応用

この節では, 主結果から直接得られる結果について述べる ([25] 参照). この節では, H は Hilbert 空間とする.

変分不等式について考察する. X を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T を X から H への一価写像とする. また $VI(X,T)$ で集合 $\{w \in X : \langle w-u, Tw\rangle \geq 0, \forall u \in X\}$ をあらわす. 一価写像 T は X の線分から H への写像で弱位相の意味で連続であるものとするとこの T は hemicontinuous であるといわれる. F を X の線分から H への一価写像で単調で hemicontinuous な作用素とする. $N_X z$ で $z \in X$ における X への normal cone, すなわち,

$$N_X z = \{w \in H : \langle z-u, w\rangle \geq 0, \quad \forall u \in X\}.$$

とする. Az を

$$Az = \begin{cases} Fz + N_X z, & z \in X, \\ \emptyset, & z \notin H\backslash X \end{cases}$$

で定義される集合とすると, A は極大単調作用素となる ([22, Theorem 3] 参照). $0 \in Av$ であることの必要十分条件は $v \in VI(X,F)$ であることも確かめられるし, また任意の

$r>0$ と $x\in H$ に対して $J_r x = VI(X, F_{r,x})$ が成立することも確かめられる．ここで任意の $z\in H$ に対して $F_{r,x}z = Fz + (z-x)/r$ が成立する ([25] 参照). 従って, 以下の結果を得る．

Corollary 5.1. X を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする．F を X から H への一価写像で単調で hemicontinuous な作用素とする．$D(A)\subset C$ と仮定する．$\{\alpha_n\}$ と $\{r_n\}$ は Theorem 3.5 と同様とする．$x_0 = x\in X$ であり, $\{x_n\}$ は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) VI(X, F_{r_n,x_n})$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して成立するような点列と定義する．もし, $VI(x,F)\neq\emptyset$ であり, P は H から $VI(X,F)$ の上への距離射影とすると, $\{x_n\}$ は $v\in VI(X,F)$ へ弱収束する．ここで $v=\lim_{n\to\infty} Px_n$ が成立する．

Corollary 5.2. X を Hilbert 空間 H の空でないコンパクト凸部分集合とする．F を X から H への一価写像で単調で hemicontinuous な作用素とする．$D(A)\subset C$ と仮定する．$\{\alpha_n\}$ と $\{r_n\}$ は Theorem 4.1 と同様とする．$x_0 = x\in X$ であり, $\{x_n\}$ は

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) VI(X, F_{r_n,x_n})$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して成立するような点列と定義する．もし, $VI(x,F)\neq\emptyset$ であるとすると, $\{x_n\}$ は $v\in VI(X,F)$ へ強収束する．

References

[1] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 57-68.

[2] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T.Tanaka Eds.), pp.9–16, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004.

[3] S. Atsushiba, *Approximating zero points of accretive operators by an implicit iterative sequences*, to appear.

[4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opials's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.

[5] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive semigroups in Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications **2005** (2005), 343-354.

[6] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of non-expansive non-linear mappings in Banach spaces*, Arch. Rational. Mech. Anal. **24** (1967) 82–90.

[7] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Sympos. Pure Math. **18**, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1976.

[8] D. Van Dulst, *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London. Math. Soc. **25** (1982), 139–144.

[9] B. Halpern, *Fixed points of nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[10] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **80** (1979), 493–501.

[11] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of an implicit iterative process for A countable family of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect.A **58** (7) (2004), 69-78.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solution of maximal monotone operatos in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications,* Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[14] J. P. Gossez and E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math. **40** (1972), 565–573.

[15] J.A. Liu, *Some convergence theorems of implicit iterative process for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Commun. **7** (2002), 113–118.

[16] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math.Soc. **4** (1953), 506–510.

[17] B. Martinet, *Regularisation d'inequations variationnelles par approximations successive*, Rev. Franc. Inform. Rech. Opéer. **4** (1970), 154–159.

[18] B. Martinet, *Determination appochee D'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox,* C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A-B **274** (1972), A163–165.

[19] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[20] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.

[21] R.T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math., **17** (1966), 497–510.

[22] R.T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotome operators,* Trans. Amer. Math. Sor.,**149** (1970), 75–88.

[23] R.T. Rockafellar, *Monotome operators and the proximal point algorithm,*, SIAM J.Control Optim.,**14** (1976), 877–898.

[24] Z.H.Sun, C.He and Y.Q.Ni, *Strong convergence of an implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **8** (2003), 595- 602.

[25] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[26] W. Takahashi, 凸解析と不動点近似, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[27] W. Takahashi, 非線形・凸解析学入門, Yokohama Publishers, Yokohama, 2005.

[28] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., **104** (1984), 546–553.

[29] H. K. Xu and R.G.Ori, *An implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **22** (2001), 767–773.

[30] Y.Zhou and S.S. Chang, *Convergence of implicit iteration process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 23 (2002), 911–921.