数理解析研究所講究録
1485 巻 2006 年 149-153

不動点の分岐における分枝の絡み

鳴門教育大学　松岡 隆 (Takashi Matsuoka)
Naruto University of Education

ある多様体上の1－パラメータ自己連続写像族において，一対の不動点がサドル・ノード分岐によって生成し，それらがまたサドル・ノード分岐によって消滅するような状況を位相的に考察する．写像族の不動点集合の連結成分は一般に多様体と区間の直積空間内の曲線となるので，この問題は，サドル・ノード分岐点につながる不動点の2本の分枝がなす閉曲線の位相的特徴を調べることと同値である．ここでは，多様体が円板の場合にこの問題を考察し，写像がパラメータが変化したあとでまた元の写像に戻るとき，閉曲線状の分枝が他の分枝にどのように絡むかについて調べた．得られた結果の証明は，Geoghegan と Nicas [1] によって開発された1－パラメータ不動点理論を用いる．

D を円板，I を閉区間 $[0,1]$ とする．$F: D\times I\to D$ を連続写像とする．$F(x,t)=x$ をみたす点 $(x,t)\in D\times I$ を F の不動点といい，$\mathrm{Fix}(F)$ を不動点集合とする．すなわち，

$$\mathrm{Fix}(F)=\{(x,t)\mid F(x,t)=x\}.$$

$t\in I$ に対し，連続写像 $F_t: D\to D$ を $F_t(x)=F(x,t)$ で定義する．以下の仮定をおく．

1. F はイソトピーである．すなわち，各 $t\in I$ に対し F_t は単射．
2. $F_0=F_1$ （F_0 を f とかく）．
3. D 上の閉曲線 $x_i(t)$ $(i=1,\ldots,n,\ n\geq 2)$ が存在して，$(x_i(t),t)\in\mathrm{Fix}(F)$ かつ $\mathrm{Fix}(f)=\{x_1(0),\ldots,x_n(0)\}$.
4. $\gamma_i=\{(x_i(t),t)\mid t\in I\}$ とおくとき，$\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ が定める $D\times I$ 内の braid は自明．

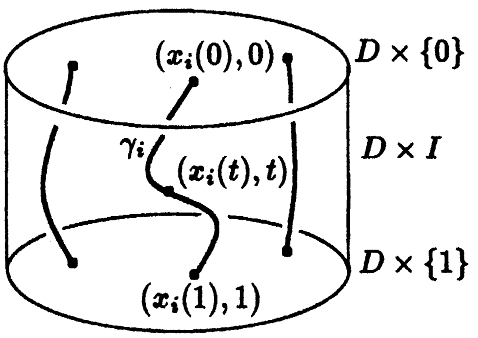

図1

不動点集合の連結成分は，F_t が有限個の t を除いて $D\times\{t\}$ と横断的に交わるとき，非退化と呼ばれる．以後，閉曲線成分はすべて非退化とする．このとき，F_t は横断的に交わる点で不動点指数 ±1 をもつ．指数が -1 のときはサドルである．

定義 1．（閉曲線成分の向きと絡み数） 閉曲線成分 ω に対し次のような向きを与えることができる．t-座標が最小である ω 上の点から指数が $+1$ の方向に回る向きを正の向きとする．この向きが指定された閉曲線 ω が γ_i の周りを回る回数を ω と γ_i の絡み数といい，$lk(\omega,\gamma_i)$ とかく．n 個の整数の組 $lk(\omega)\in\mathbb{Z}^n$ を

$$lk(\omega)=(lk(\omega,\gamma_1),\ldots,lk(\omega,\gamma_n))$$

で定義する．

例えば，図 2 において，ω の実線部分を不動点指数 1，点線部分を不動点指数 -1 の分枝とすると，

$$lk(\omega)=(0,-1,-1)\in\mathbb{Z}^3.$$

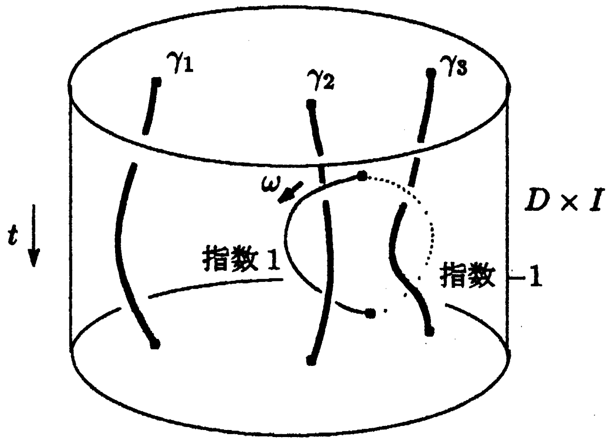

図 2

$\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ のなす組ひもは自明なので，一般性を失わず $x_i(t)\equiv x_i(0)$ と仮定してよい．$x_i(0)$ を x_i とかく．$p:D\times I\to D$ を射影とする．$D-\mathrm{Fix}(f)=D-\{x_1,\ldots,x_n\}$ の 1 次元ホモロジー群 $H_1(D-\mathrm{Fix}(f))$ を $\mathbb{Z}^n$ と同一視するとき，$lk(\omega)$ は，$D-\mathrm{Fix}(f)$ 内の閉曲線 $p(\omega)$ が定めるホモロジー類 $[p(\omega)]\in H_1(D-\mathrm{Fix}(f))$ に一致する．

X を $D-\mathrm{Fix}(f)$ のコンパクト化とする．X は各 x_i をその点での接平面 $T_{x_i}(D)$ 内の原点を中心とする単位円周 S_i に取り替えたものである．任意の t,i に対し，F_t は x_i において微分可能で微分が正則とする．このとき，F は blow-up $\hat{F}:X\times I\to X$ をもつ．$\hat{F}$ は

次式で定められる同相写像である（例えば [1, Sect. 1.6] 参照）.

$$\hat{F}(x,t)=\begin{cases} F(x,t) & x\in D-\mathrm{Fix}(f)\ \text{のとき},\\ DF_t(x_i)x/|DF_t(x_i)x| & x\in S_i\ \text{のとき}\end{cases}$$

ここに, $DF_t(x_i)x$ は F_t の x_i での微分行列であり, x は $\mathbb{R}^2$ の元と考えている。 $p:X\times I\to X$ を射影とする.

定義 2. $\hat{F}$ の不動点 (x,t) と (x',t') が同値とは，これら 2 点をつなぐ $X\times I$ 内の道 μ が存在して $p\circ\mu$ と $\hat{F}\circ\mu$ が端点を止めてホモトピックであることとする．不動点集合の連結成分 C 上の 2 点は常に同値である．C のある点（従ってすべての点）がある不動点 (x,t) と同値であるとき，C は (x,t) と同値であるという。

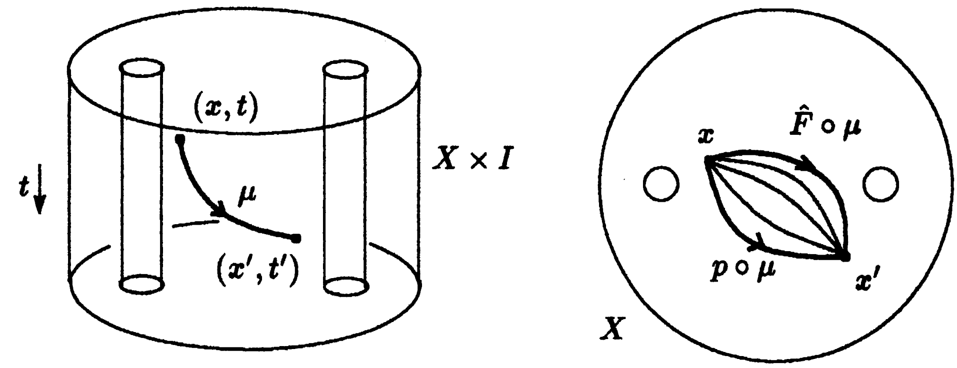

図 3

定理. $\mathrm{Fix}(\hat{F})\cap(X\times\{0,1\})$ のどの点とも同値でない閉曲線成分を $\omega_1,\ldots,\omega_m$ とするとき,

$$\sum_j lk(\omega_j)=0.$$

定理において，仮定 $n\geq 2$ は必要である．実際 $n=1$ のときは，以下に示すように反例が簡単に構成される．説明を簡単にするため，$I=[-\pi,\pi]$ とする．$\theta: I\to\mathbb{R}$ を $\theta(t)=a\sin t$ で定義する．ここに a は 1 より小さな正数である．D を原点を中心とし半径 2 の円板とし，C を原点を中心とする半径 1 の円とする．$g: D\to D$ を次をみたす同相写像とする.

1. g の不動点は 3 点 $(0,0),(1,0),(-1,0)$ のみであり，$(0,0)$ は g の微分が 1 を固有値にもたない source，$(1,0)$ は saddle，$(-1,0)$ は sink である.
2. $g(e^{is})=e^{i(s+\theta(s))}$.

r_t を原点を中心とする角度 t の回転とする．このとき，$F_t = r_t \circ g \ (t \in I)$ とおくと，F_t は D から D への同相写像であり，$\mathrm{Fix}(F_t) \subset \{0\} \cup C$ が成り立つ．

また，$x = e^{is} \in C$ に対し，

$$F_t(x) = r_t(xe^{i\theta(s)}) = xe^{i(t+\theta(s))}$$

だから

$$\mathrm{Fix}(F_t) - \{0\} = \{e^{is} \mid t + \theta(s) = 0\}.$$

これより，$-a < t < a$ のとき，0 以外の不動点は丁度 2 個存在する．これらは sink と saddle であり，sink の方を $x_+(t)$，saddle の方を $x_-(t)$ とかくことにする．$\gamma = \{0\} \times I$ とおく。$\omega = \mathrm{Fix}(F) - \gamma$ とおくと，これは閉曲線となる。$\mathrm{Fix}(F) = \gamma \cup \omega$ であり，$\mathrm{Fix}(\hat{f}) = \emptyset$. また，$\omega$ は γ の周りを反時計回りに 1 回転することが容易に分かるので，$lk(\omega) = lk(\omega, \gamma) = 1 \neq 0$. よって，定理の結論は成り立たない．

id から f へのイソトピー $f_\lambda : D \to D$ を一つ選ぶ．f の不動点 $x_1, \ldots, x_n$ はすべて非退化とする．$i \neq j$ のとき，$f_\lambda(x_i) - f_\lambda(x_j)$ $(\lambda \in I)$ は $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 内の閉曲線となる．この曲線の位相的指数，すなわち原点の周りを回転する回数を x_i と x_j の $\{f_\lambda\}$ に関する絡み数といい，$lk(x_i, x_j)$ と表す．また，x_i がサドルのとき，自己絡み数が次のように定義される．$v \in S_i$ を不安定方向のベクトルとする．λ が 0 から 1 まで動くとき単位接ベクトル $Df_\lambda(x_i)v/|Df_\lambda(x_i)v|$ が円周 S_i 上を回転する回数を x_i の自己絡み数といい，$lk(x_i, x_i)$ とかく．

注：$lk(x_i, x_i)$ は文献 [3] では，"torsion number" と呼ばれている．また，

$$lk(x_i, x_i) = 1/2 \sum_{\ell \neq i} \epsilon_\ell \, lk(x_i, x_\ell)$$

が成り立つことが，[3] の Prop.2 を，そこで指定される不動点集合が x_i の 1 点のみからなる場合に適用することにより導かれる．ここに ϵ_ℓ は x_ℓ の不動点指数．

$\mathbb{Z}^n$ の部分集合 S を

$$S = \{\ (lk(x_i, x_1), \ldots, lk(x_i, x_n)) \ \mid \ x_i \text{ はサドル}\ \}$$

で定義する．

系．$\mathrm{Fix}(F) = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n \cup \omega$ のとき，$lk(\omega) \in S \cup \{0\}$.

定理の証明の概略.

一般に，コンパクト空間 V 上のホモトピー $H : V \times I \to V$ において $\mathrm{Fix}(H) \cap (V \times \{0, 1\})$ の点と同値でない閉曲線の成分を $\omega_1, \ldots, \omega_m$ とするとき，

$$L(H) = \sum_j [p(\omega_j)] \in H_1(V)$$

とおき，H の Lefschetz 数と呼ぶ [2]．$L(H)$ はホモトピー不変である。すなわち，別なホモトピー H' が $V \times \{0,1\}$ を止めて H とホモトピックのとき，$L(H) = L(H')$ である．定イソトピー $G : X \times I \to X$ を $G_t \equiv \hat{f}$ で定めれば G は $X \times \{0,1\}$ を止めて $\hat{F}$ とホモトピックであるので，$L(\hat{F}) = L(G) = 0$. 従って，$[p(\omega_j)] = lk(\omega_j)$ より定理の結論を得る．

参考文献

[1] P. Boyland, Topological methods in surface dynamics, Topology and its Appl. 58 (1994), 223–298.,

[2] R. Geoghegan and A. Nicas, Parametrized Lefschetz-Nielsen fixed point theory and Hochschild homology traces, Amer. J. Math. 116 (1994), 397–446.

[3] T. Matsuoka, Braid type of the fixed point set for orientation-preserving embeddings on the disk, Tokyo J. Math. 18 (1995), 457–472.