

## 連続系と格子系における embedded ソリトン

岐阜大学工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)  
Faculty of Engineering, Gifu University

### 1. はじめに

最近, 非線形光学および水面波に関連した多くの例において, 新しいクラスのソリトン波 (あるいはソリトン) が発見されている (例えば, [1]). これらの波動は連続スペクトルに埋め込まれ (embedded), 波速あるいは内部周波数が微小線形波動と共鳴し, embedded ソリトン [10] と呼ばれている. その存在は一般に高次退化的であるが, 波動を支配する常微分方程式系が reversible な場合余次元 1 となる. embedded ソリトンが得られている代表例としては, 拡張された 5 次 KdV 方程式

$$u_t = \left[ \frac{2}{15} u_{xxxx} - bu_{xx} + au + \frac{3}{2} u^2 + \mu \left( \frac{1}{2} (u_x)^2 + (uu_x)_x \right) \right]_x, \quad u \in \mathbb{R},$$

( $a, b, \mu \in \mathbb{R}$  は定数), 非線形光ファイバー中の 2 次高調波発生モデル

$$\begin{aligned} iu_z + \frac{1}{2} u_{tt} + u^* v + \gamma_1 (|u|^2 + 2|v|^2) u &= 0, \\ iu_z + \frac{1}{2} \delta v_{tt} + qv + \frac{1}{2} u^2 + 2\gamma_2 (|v|^2 + 2|u|^2) v &= 0, \end{aligned} \quad u, v \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

( $\gamma_1, \gamma_2, \delta \in \mathbb{R}$  は定数), 一般化された Thirring モデル

$$\begin{aligned} iu_t + iu_x + (2k)^{-1} (u_{xx} - u_{tt}) + \left[ \frac{1}{2} |u|^2 + |v|^2 \right] u + v &= 0, \\ iv_t - iv_x + (2k)^{-1} (v_{xx} - v_{tt}) + \left[ \frac{1}{2} |v|^2 + |u|^2 \right] v + u &= 0, \end{aligned} \quad u, v \in \mathbb{C},$$

( $k, b, \mu \in \mathbb{R}$  は定数) および 3 つの波の相互作用のモデル

$$\begin{aligned} i(v_1)_z \pm i(v_1)_x + v_2 + v_3 v_2^* &= 0, \\ i(v_2)_z \pm i(v_2)_x + v_1 + v_3 v_1^* &= 0, \\ 2i(v_3)_z - qv_3 + D(v_3)_{xx} + v_1 v_2 &= 0, \end{aligned} \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C},$$

( $D \in \mathbb{R}$  は定数) などがあげられる [1]. 例外的に厳密解が与えられている場合以外では, embedded ソリトンは, shooting 法あるいは解の追跡により数値的に求められているだけである. また, 安定となる特別な例 [9] があるものの, 典型的には良くて半安定 (semi-stable) であると報告されている [1, 10, 11].

本報告では, まず, 連続系 (偏微分方程式系) に対して, 与えられた系における embedded ソリトンの存在を証明するための方法として, 平衡点あるいは周期軌道のホモクリニック軌道に対する解析手法として良く知られているメルニコフの方法 [3] の基本的なアイデアを用いて, reversible 系のサドル・センターに対する対称ホモクリニック軌道の存在を証明するための擾動的な方法を開発する. さらに, 式 (1) と類似の偏微分方程式系の定常解が満足する 4 次元系に対して適用し,

得られた結果を, AUTO [2] と呼ばれるコンピュータ・ソフトウェアにより得られた数値解析の結果と比較することにより, 開発した手法の有効性を検証する. 次に, 格子系 (離散系, 常微分方程式系) に対して, AUTO および HomMap [4,5] と名づけられた AUTO 用のドライバーを用いて, 非線形光ファイバーのモデル (1) を差分法により離散化して得られる系において embedded ソリトンが存在することを数値的に示す. また, 直接的な数値シミュレーションにより, embedded ソリトンの安定性を調べる. これらの結果の詳細については文献 [6-8] を参照されたい.

本報告は, Bristol 大学の Thomas Wagenknecht 氏 と Alan Champneys 氏, Tel Aviv 大学の Boris Malomed 氏との共同研究に基づくものである. ここに彼らに対して感謝の意を表す.

## 2. 連続系における embedded ソリトン (reversible 系の対称ホモクリニック軌道)

### 2.1. 問題設定 次の系を考える.

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x; \mu), \quad x \in \mathbb{R}^{2n+2} \quad (2)$$

ここで,  $\epsilon$  は  $0 < \epsilon \ll 1$  となる微小パラメータであり,  $f: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  と  $g: \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  は  $C^r$  ( $r \geq 2$ ),  $\mu \in \mathbb{R}$  はパラメータである. embedded ソリトンが存在する偏微分方程式系では, 波動を支配する方程式として式 (2) のような常微分方程式系が得られる. 以下のことを仮定する.

(A1) 系 (2) は reversible, すなわち, 線形対合  $R: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  が存在し, すべての  $x$  と  $\mu$  に対して

$$f(Rx) + Rf(x) = g(Rx; \mu) + Rg(x; \mu) = 0$$

が成立する. さらに, 対合  $R$  の不変平面  $\text{Fix}(R) = \{x \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid Rx = x\}$  の次元は  $n+1$  となる.

$x(t)$  が式 (2) の解 (軌道) のとき,  $R(x(-t))$  も解 (軌道) となる.  $x(t) = R(x(-t))$  が成立するとき, 軌道  $x(t)$  は対称であるという.  $x(0) \in \text{Fix}(R)$  のときそのときに限り, 軌道  $x(t)$  は対称となる.

$\epsilon = 0$  のとき, 式 (2) は

$$\dot{x} = f(x) \quad (3)$$

となる. 残りの仮定は非摂動系 (3) に対するものである.

(A2) 原点  $O$  は非摂動系のサドル・センター型の平衡点であり, ヤコビ行列  $A := Df(0)$  の固有値は

$$\sigma(A) = \pm i\omega \cup \{-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i, \omega > 0$$

を満足する.

原点  $O$  は対称な平衡点であり, ヤコビ行列の固有値は虚軸に関して対称となる. 仮定 (A2) は reversible 系において構造安定に (したがって, 小さな  $\epsilon$  に対して) 成立する. さらに, サドル・センター  $O$  は  $n$  次元安定多様体  $W_{\epsilon, \mu}^s(O)$  と  $n$  次元不安定多様体  $W_{\epsilon, \mu}^u(O)$  および 2 次元中心多様体  $W_{\epsilon, \mu}^c(O)$  を有する. 系 (2) の reversible 性によって,  $W_{\epsilon, \mu}^s(O) = R(W_{\epsilon, \mu}^u(O))$  および  $W_{\epsilon, \mu}^u(O) = R(W_{\epsilon, \mu}^s(O))$  が成立する.

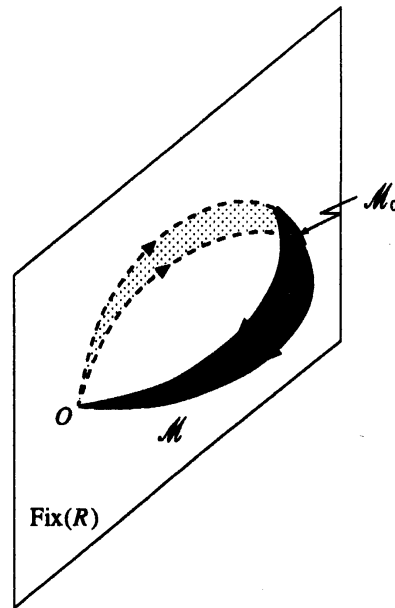


図 1. 非摂動系 (3) の相空間

(A3) 次の性質を満たす, 対称ホモクリニック軌道の  $l$ -パラメータ族  $\Gamma(\theta) = \{x^h(t; \theta), t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\theta \in \Theta$ , が存在する. ここで,  $0 \leq l < n$  で,  $\Theta \subset \mathbb{R}^l$  は開集合である.

- (i)  $x^h(t; \theta)$  は  $\theta$  に関して  $C^r$  である;
- (ii)  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \Theta$  に対して,  $l+1$  個の  $2n+2$  次元ベクトル

$$\frac{\partial x^h}{\partial t}(t; \theta) = f(x^h(t; \theta)), \quad \frac{\partial x^h}{\partial \theta}(t; \theta)$$

は線形独立である.

仮定 (A3) で  $l=0$  の場合, 原点  $O$  に対する孤立したホモクリニック軌道  $\Gamma = \{x^h(t), t \in \mathbb{R}\}$  が存在する.  $W_0^s(O)$  と  $W_0^u(O)$  を  $\epsilon=0$  のときの, 原点  $O$  に対する安定多様体と不安定多様体とする.

(A4)  $x^h(t; \theta)$  に沿った  $W_0^s(O)$  と  $W_0^u(O)$  の交差は  $l+1$  次元, すなわち,

$$\dim(T_{x^h(0, \theta)} W_0^s(O) \cap T_{x^h(0, \theta)} W_0^u(O)) = l+1$$

である.

仮定 (A2)-(A4) を満たす非摂動系 (3) の相空間を図 1 に模式的に示す.

2.2. ホモクリニック軌道の存在  $z_0(\theta) = \dot{x}^h(0; \theta)/|\dot{x}^h(0; \theta)|$ ,  $Z(\theta) = \text{span}\{z_0(\theta)\}$  とおく.  $\bar{Z}(\theta)$  を,  $\mathbb{R}^{2n+2} = Z(\theta) \oplus T_{x^h(0, \theta)} \mathcal{M}_0 \oplus \bar{Z}(\theta)$  を満たす  $(2n-l+1)$ -次元空間とする.

補題 1  $W_{\epsilon, \mu}^{s,u}(O)$  上に次の性質を満たす軌道  $x_{\epsilon}^{s,u}(t; \mu, \theta)$  が存在する: 十分小さな  $\epsilon > 0$  に対して,  $t \in [0, \infty)$  のとき

$$x_{\epsilon}^s(t; \mu, \theta) = x^h(t; \theta) + \epsilon \xi^s(t; \mu, \theta) + O(\epsilon^2),$$

$t \in (-\infty, 0]$  のとき

$$x_\epsilon^u(t; \mu, \theta) = x^h(t; \theta) + \epsilon \xi^u(t; \mu, \theta) + O(\epsilon^2)$$

となる. ここで,  $\xi^{s,u}(t; \mu, \theta)$  は, 初期条件が  $\xi^{s,u}(0; \mu, \theta) \in \bar{Z}(\theta)$  となる, 非摂動系 (3) に対する  $x = x^h(t; \theta)$  のまわりの変分方程式

$$\dot{\xi} = Df(x^h(t; \theta))\xi + g(x^h(t; \theta); \mu) \quad (4)$$

の解である.

さて,  $\Psi(t; \theta)$  を,  $\Psi(0; \theta) = I$  ( $I$ : 単位行列) となる, 変分方程式 (4) に対する同次方程式

$$\dot{\xi} = Df(x^h(t; \theta))\xi,$$

の基本行列とする.  $\xi_0^s(\mu, \theta) = \xi^s(0; \mu, \theta)$  とすると,

$$\xi^s(t; \mu, \theta) = \Psi(t; \theta) \left[ \int_0^t \Psi^{-1}(s; \theta) g(x^h(s; \theta); \mu) ds + \xi_0^s(\mu, \theta) \right] \quad (5)$$

となる.  $Z^s(\theta) = T_{x^h(0; \theta)} W_0^s(O)$  とおく.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^s(t; \mu, \theta) = 0$  であるから,

$$\int_0^\infty \Psi^{-1}(t; \theta) g(x^h(t; \theta); \mu) dt + \xi_0^s(\mu, \theta) \in Z^s(\theta) \quad (6)$$

が成立する. いま,

$$\Xi(\mu, \theta) = \int_0^\infty \Psi^{-1}(t; \theta) g(x^h(t; \theta); \mu) dt,$$

と表し,  $P_\theta^s$  を  $\text{im}(P_\theta^s) = Z^s(\theta)$  となる直交射影とする. このとき, 式 (6) は次のように表される.

$$P_\theta^s (\Xi(\mu, \theta) + \xi_0^s(\mu, \theta)) = \Xi(\mu, \theta) + \xi_0^s(\mu, \theta)$$

あるいは

$$(I - P_\theta^s) \xi_0^s(\mu, \theta) = (P_\theta^s - I) \Xi(\mu, \theta) \quad (7)$$

$\hat{\Xi}(\mu, \theta) = (P_\theta^s - I) \Xi(\mu, \theta)$  とすると, 式 (7) から

$$\xi_0^s(\mu, \theta) = \hat{\Xi}(\mu, \theta) + z \in \bar{Z}(\theta) \quad (8)$$

を満たす  $z \in Z^s(\theta)$  が存在することがわかる. 次式により,  $\mathbb{R}^{2n+2}$  における  $n$  次元多様体  $\tilde{\mathcal{C}}$  を定義する.

$$\tilde{\mathcal{C}} = \bigcup_{\theta \in \Theta} \left( \{ \hat{\Xi}(\mu, \theta) + z \mid \mu \in \mathbb{R}, z \in Z^s(\theta) \} \cap \bar{Z}(\theta) \right)$$

次の定理が証明される.

**定理 1**  $\tilde{\mathcal{C}}$  が  $(\mu, \theta) = (\mu_0, \theta_0)$  において  $\text{Fix}(R)$  に横断的に交差するならば, 十分小さな  $\epsilon > 0$  とある  $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$  に対して,  $\Gamma(\theta_0)$  の  $O(\epsilon)$ -近傍に原点  $O$  に対する対称ホモクリニック軌道が存在する.

2.3. 非線形光学からの4次元系の例 定理1の適用例として次の4次元系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_1 - (x_1^2 + 8x_3^2)x_1 - 2\epsilon x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -\omega^2 x_3 - \alpha(x_1^2 + 2x_3^2)x_3 - \epsilon x_1^2 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで,  $\alpha, \omega > 0$  は定数である. 式(9)は, 定常解

$$u = U(t) \exp(ikz), \quad v = V(t) \exp(2ikz)$$

を仮定し, スケーリング

$$(U, V) \mapsto \sqrt{\gamma_1/4(k-q)} (U, V), \quad t \mapsto \sqrt{k-q} t$$

を行うことにより, 式(1)と類似の非線形光ファイバーのモデル

$$\begin{aligned} iu_z + u_{tt} + qu + u^*v + \gamma_1(|u|^2/4 + 2|v|^2)u &= 0, \\ 2iv_z + v_{tt} + \kappa v + u^2/2 + \gamma_2(4|v|^2 + 2|u|^2)v &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

から導かれる. ここで,

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1(k-q)}}, \quad \alpha = \frac{8\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \omega^2 = \frac{\kappa - 4k}{k - q}$$

である.

$l = 0$  として仮定(A1)-(A4)が成立する. 特に,  $R : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, -x_2, x_3, -x_4)$ ,  $\text{Fix}(R) = \{x_2 = x_4 = 0\}$  であり, 次の非摂動ホモクリニック軌道を有する.

$$x_{\pm}^h(t) = (\pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t, \mp\sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t, 0, 0)$$

簡単な計算により,

$$\hat{\Xi}_4(\alpha) = -\Xi_4(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} \Psi_{33}(t; \alpha) \operatorname{sech}^2 t dt$$

となる. ここで,  $\Psi_{33}(t; \alpha)$  は  $\Psi(t)$  の第(3,3)-成分で, 一般に Gauss の超幾何関数

$$F(c_1, c_2, c_3; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_1(c_1+1) \cdots (c_1+k-1) c_2(c_2+1) \cdots (c_2+k-1)}{k! c_3(c_3+1) \cdots (c_3+k-1)} z^k$$

によって表される.  $\hat{\Xi}_4(\alpha)$  が単純な零点を有するとき, 定理1の条件を満足する. 数値計算および解析的な計算により,  $\hat{\Xi}_4(\alpha)$  が

$$\alpha = 3, 10, 21, 36, 55, 78, \dots \quad (11)$$

に(単純な)零点を有することが示され [8], 十分小さな  $\epsilon > 0$  に対してこれらの  $\alpha$  の近くの値で  $x^h(t)$  の近傍に対称ホモクリニック軌道が存在する. また, これらの軌道は,  $\epsilon$  軸上の式(11)の点で主ホモクリニック軌道  $x_{\pm}^h(t)$  から分岐するものである.

式(9)に対してコンピュータソフトウェア AUTO [2] によって得られた数値解析結果を図に示す.  $\epsilon$  軸上  $\alpha = 3, 10, 21$  の点で対称ホモクリニック軌道の分岐が起こり,  $\epsilon \approx 0$  のとき,  $\alpha = 3, 10, 21$

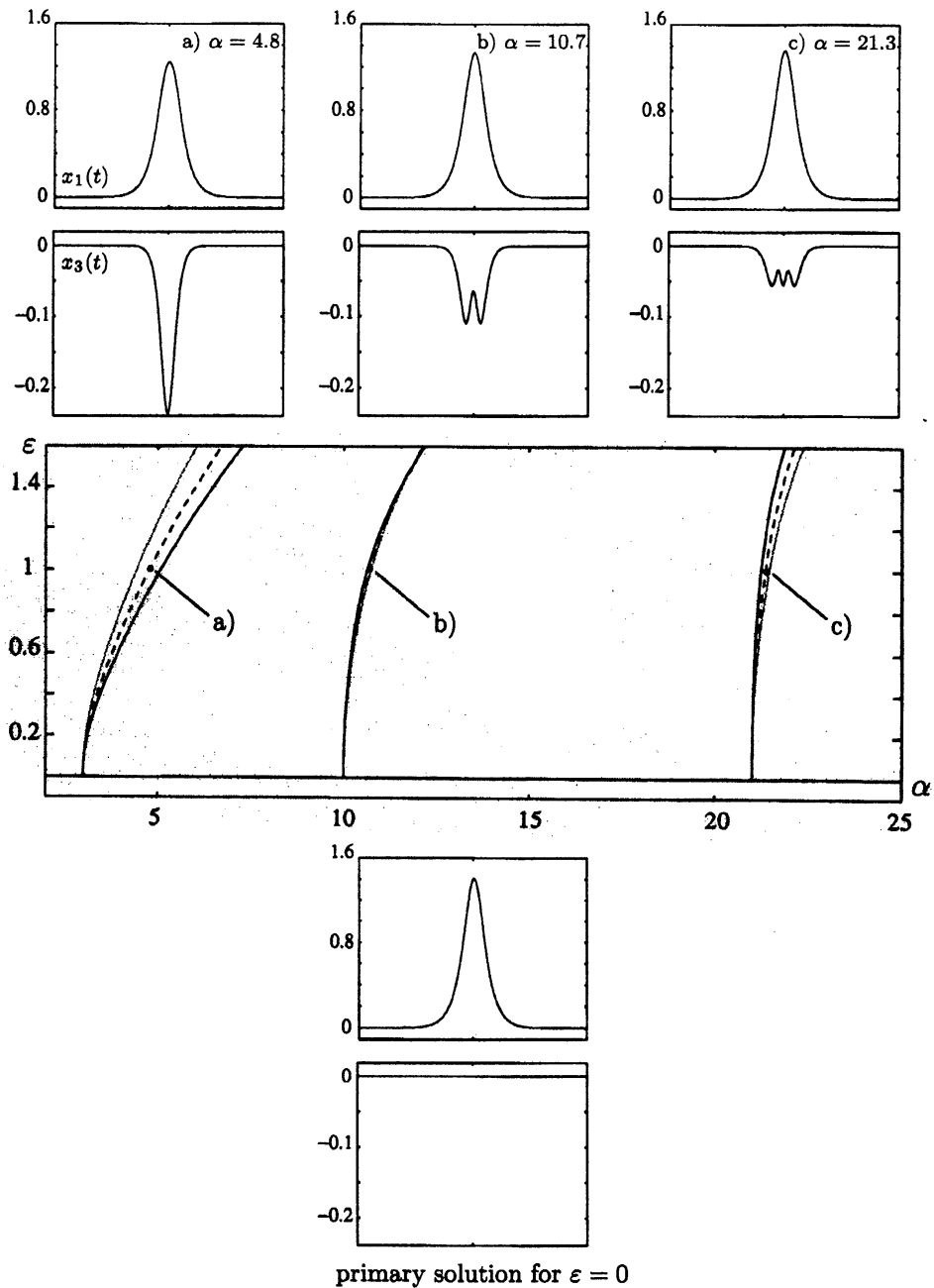


図 2. 式 (9) における対称ホモクリニック軌道の分枝：灰色、破線と黒実線は、それぞれ、 $\omega = 0.5, 1.0$  と  $1.5$  に対する結果を表す。パネル a)-c) は、 $\omega = \epsilon = 1$  における分岐解の  $x_1$  と  $x_3$  成分のプロットである。分岐図の下に ( $\epsilon = 0$  に対する) 主ホモクリニック軌道が与えられている。

の近傍で対称ホモクリニック軌道が存在することがわかる。 $\alpha = 36, 55, 78$  についてもこれらのことを確認している。また、 $\alpha$  の値が大きくなるにつれて、 $x_3$  成分の振幅は小さくなり、振動の個数が多くなっている。初期の研究 [1, 11] でも、式 (1) においてこれらのタイプの embedded ソリトンが数値的に求められている。

さらに、文献 [8] では非振動系がホモクリニック多様体を有する 6 次元系の例が与えられている。

### 3. 格子系における embedded ソリトン

式(1)を  $t$  に関して差分近似して得られる格子系

$$\begin{aligned} i\frac{du_n}{dz} + \frac{1}{2}D(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + u_n^*v_n + \gamma_1(|u_n|^2 + 2|v_n|^2)u_n &= 0, \\ i\frac{dv_n}{dz} + \frac{1}{2}\delta D(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) + qv_n + \frac{1}{2}u_n^2 + 2\gamma_2(|v_n|^2 + 2|u_n|^2)v_n &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

を考える。ここで、 $h$  を差分のきざみ幅として  $D = 1/h^2$  である。

#### 3.1. 単純化モデルの漸近解析 まず、式(12)を単純化したモデル

$$\begin{aligned} i\frac{du_n}{dz} + \frac{1}{2}D(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + u_n^*v_n + \delta_{n0}\gamma_1(|u_n|^2 + 2|v_n|^2)u_n &= 0, \\ i\frac{dv_n}{dz} + \frac{1}{2}\delta D(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) + qv_n + \frac{1}{2}u_n^2 + 2\delta_{n0}\gamma_2(|v_n|^2 + 2|u_n|^2)v_n &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

に対して漸近解析を行う。ここで、 $\delta_{jl}$  はクロネッカーのデルタである。 $n = 0$  のとき、式(13)は式(12)に一致し、 $n \neq 0$  のとき3次の項は零となる。また、 $0 < q - 2k < 2\delta D$  あるいは  $2\delta D < q - 2k < 0$  のとき、原点はサドル・センター型の平衡点となる。 $|v_n| \ll |u_n| = O(1)$  とし、式(13)の embedded ソリトン解を

$$u_n = A \exp(ikz - \lambda|n|), \quad v_n = B \exp(2ikz - 2\lambda|n|) \quad (14)$$

と仮定する。式(14)を式(13)に代入することにより、第1式から

$$\frac{k}{D} = 2 \sinh^2(\lambda/2), \quad A^2 = \frac{\sqrt{k(k+2)}}{D^2\gamma_1} \quad (15)$$

が、第2式から

$$\cosh \lambda = \frac{2\gamma_2}{\delta\gamma_1}, \quad B = -\frac{A^2}{2[2\delta \sinh^2 \lambda + (q - 2K)/D]} \quad (16)$$

が得られる。式(15)の第1式と式(16)の第1式から、embedded ソリトンが存在する条件が

$$\frac{k}{D} = \frac{2\gamma_1}{\delta\gamma_2} - 1 \quad (17)$$

と求められる。また、式(15)の第2式と式(16)の第1式から、 $\gamma_1, \delta\gamma_2 > 0$  となる。

$k \gg D$  (あるいは、式(17)より、 $|\delta| \ll 1$ ) のとき、 $\lambda \gg 1$  となり、 $n \neq 0$  に対して  $u_n, v_n \approx 0$  となる。したがって、単純化モデル(13)は  $n \neq 0$  の場合にのみ元のモデルと異なるので、式(17)は格子系(12)において embedded ソリトンが存在するための条件を精度良く近似する。

**3.2. reversible 写像** 定常解  $u_n = U_n e^{ikz}$ ,  $v_n = V_n e^{2ikz}$  を考える。スケーリング  $\xi_n \equiv \sqrt{2|\gamma_1|/D} U_n$ ,  $\eta_n \equiv \sqrt{2|\gamma_1|/D} V_n$  を行うと、式(12)より、 $\zeta_n \equiv (\chi_n, \xi_n, \mu_n, \eta_n)$ ,  $\chi_n = \xi_{n-1}$ ,  $\mu_n = \eta_{n-1}$ , として、次の4次元写像  $F_\epsilon$  が得られる。

$$\zeta_{n+1} = F_\epsilon(\zeta_n) \equiv \begin{pmatrix} \xi_n \\ f_\epsilon^{(1)}(\zeta_n) \\ \eta_n \\ f_\epsilon^{(2)}(\zeta_n) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

ここで,

$$\begin{aligned} f_\epsilon^{(1)}(\zeta_n) &= -\chi_n + 2\nu_1\xi_n - (\epsilon\xi_n\eta_n + \kappa_1(\xi_n^2 + 2\eta_n^2)\xi_n), \\ f_\epsilon^{(2)}(\zeta_n) &= -\mu_n + 2\nu_2\eta_n - \delta^{-1}\left(\frac{\epsilon}{2}\xi_n^2 + 2\kappa_2(\eta_n^2 + 2\xi_n^2)\eta_n\right), \end{aligned}$$

であり,

$$\nu_1 = 1 + \frac{k}{D}, \quad \nu_2 \equiv 1 + \frac{2k-q}{\delta D}, \quad \epsilon \equiv \sqrt{\frac{2}{D|\gamma_1|}}, \quad \kappa_1 \equiv \text{sgn}(\gamma_1), \quad \kappa_2 \equiv \gamma_2/|\gamma_1|$$

である.

$\nu_1 > 1$ ,  $|\nu_2| < 1$  ( $0 < q - 2k < 2\delta D$  あるいは  $2\delta D < q - 2k < 0$ ) のとき, 原点  $O$  はサドル・センター型の不動点となる.  $F_\epsilon$  の原点に対するホモクリニック軌道は格子系 (12) の embedded ソリトンに対応する. 原点  $O$  の安定多様体  $W^s(O)$  と不安定多様体  $W^u(O)$  は 1 次元で,

$$\text{安定部分空間} = \text{span}\{(1, \nu_1 - \sqrt{\nu_1^2 - 1}, 0, 0)\},$$

$$\text{不安定部分空間} = \text{span}\{(1, \nu_1 + \sqrt{\nu_1^2 - 1}, 0, 0)\}$$

となり, 中心多様体  $W^c(O)$  は 2 次元で,

$$\text{安定部分空間} = \text{span}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

となる. また,  $f_0^{(2)}(\chi, \xi, 0, 0) = 0$  となるから,  $(\chi, \xi)$ -平面は  $F_0$  に対して不変である.

次のように対合  $R_1$  と  $R_2$  を定義する.

$$R_1 : (\chi_n, \xi_n, \mu_n, \eta_n) \mapsto (\xi_n, \chi_n, \eta_n, \mu_n)$$

$$R_2 : (\chi_n, \xi_n, \mu_n, \eta_n) \mapsto \underbrace{(f_\epsilon^{(1)}(\zeta_n))}_{=\xi_{n+1}}, \xi_n, \underbrace{(f_\epsilon^{(2)}(\zeta_n))}_{=\eta_{n+1}}, \eta_n$$

このとき,  $F_\epsilon$  は  $R = R_1, R_2$  に対して reversible, すなわち,  $F_\epsilon^{-1}(R(\zeta_n)) = R(F_\epsilon(\zeta_n))$  となる. したがって,  $\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  が  $F_\epsilon$  の軌道であるとき,  $\{R(\zeta_{-n})\}_{n=-\infty}^{\infty}$  も  $F_\epsilon$  の軌道となる. 特に,  $W^s(O) = R(W^u(O))$ ,  $W^u(O) = R(W^s(O))$  が成立する. 連続系の場合と同様に,  $\zeta_n = R(\zeta_{-n})$  となるとき,  $\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  を対称軌道という.  $\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  が対称であるための必要十分条件は  $\zeta_0 \in \text{Fix}(R) = \{\zeta \in \mathbb{R}^4 \mid F_\epsilon(\zeta) = R(\zeta)\}$  となることである.

不安定多様体  $W^u(O)$  上の軌道  $\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  が  $\zeta_0 \in \text{Fix}(R)$  を満足するならば, この軌道は対称なホモクリニック軌道となる.  $W^u(O)$  は 1 次元であり,  $\text{Fix}(R)$  は 2 次元であるから, embedded ソリトンは余次元 1 で存在する.

**3.3. 数値解析**  $R = R_1$  に対する対称ホモクリニック軌道の計算方法について述べる.  $R = R_2$  に対しても同様に計算することができる.

次の条件が成立するとき, 軌道  $\{\zeta_n\}_{n=-N}^{N+1}$  ( $N \gg 1$ ) は,  $F_\epsilon$  の原点  $O$  に対する近似的な対称ホモクリニック軌道となる.

$$\chi_{-N} - \left(\nu_1 - \sqrt{\nu_1^2 - 1}\right) \xi_{-N} = 0, \quad \xi_1 = \xi_{-1}, \quad \eta_1 = \eta_{-1} \quad (19)$$



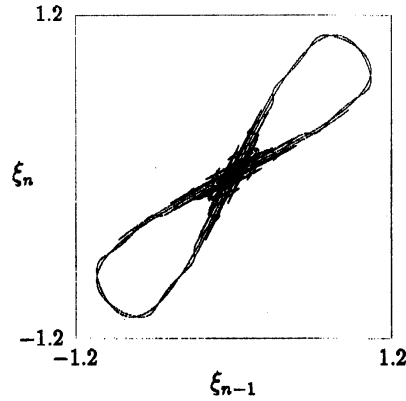


図 3.  $\nu_1 = 1.25, \kappa_1 = 1$  に対する  $(\chi_n, \xi_n)$ -平面上の  $F_0$  の安定多様体と不安定多様体

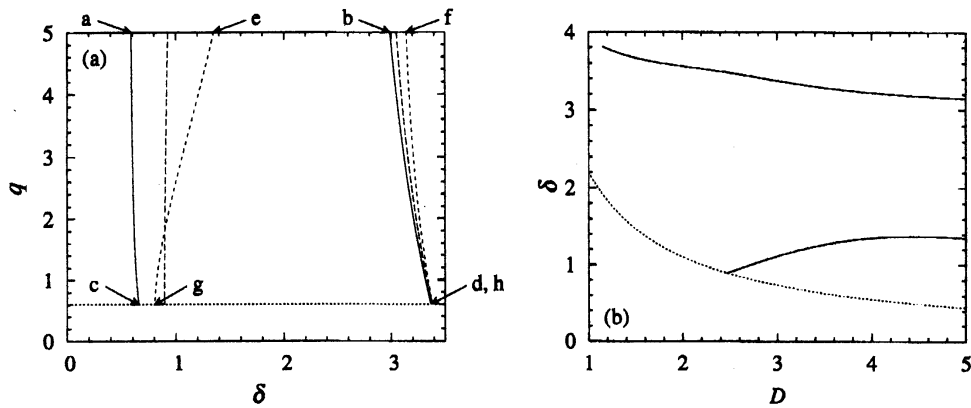


図 4.  $k = 0.3$  に対する embedded ソリトンの分枝: (a) 実線は  $(D, N) = (100, 85)$ , 破線は  $(10, 30)$ , 点線は  $(5, 22)$  に対する結果; (b)  $q = 5, N = 22$  に対する結果

式(19)の第1式は  $\zeta_{-N} \in T_0 W^u(O)$  であることを, 第2および第3式は  $\zeta_0 \in \text{Fix}(R_1)$  であることを意味する. 方程式数が3であるから,  $\chi_{-N}$  と  $\xi_{-N}$ , およびパラメータ1つを未知数として式(19)を数値的に解き, 対称ホモクリニック軌道を近似的に求める. そのため, AUTO [2]を用いて解の数値的追跡を行う. その際必要となる初期解は以下のようにして求める.

まず,  $(\chi_n, \xi_n)$ -平面が  $F_0(\zeta_n)$  に対して不変であることに注意する. 図3に示すように, 不変平面  $(\chi_n, \xi_n)$  上で  $F_0$  の安定多様体と不安定多様体は横断的に交差し, ホモクリニック軌道が存在する. AUTO97 と HomMap [4, 5] を用いて,  $\xi_1 = \xi_{-1}$  を満たす  $F_0$  の対称ホモクリニック軌道を求め, 初期解とする.

以下では,  $\delta > 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.05$  に対する計算結果を与える. 他の場合の計算結果に対しては文献 [6, 7] を参照せよ.

図4は,  $k = 0.3$  に対する,  $(\delta, q)$ -平面における embedded ソリトンの2つの分枝を示す. 図5に,  $D = 100, N = 85$  に対する embedded ソリトンの形状を与える. 図5(c)では2次高調波が2つの“こぶ”をもち, 右側の分枝がソリトンの基本族, 左側の分枝が2次族であることがわかる. これらの結果は, 分枝の位置と共に, 連続極限の結果 [1, 11] と矛盾しない. また, 図6に,

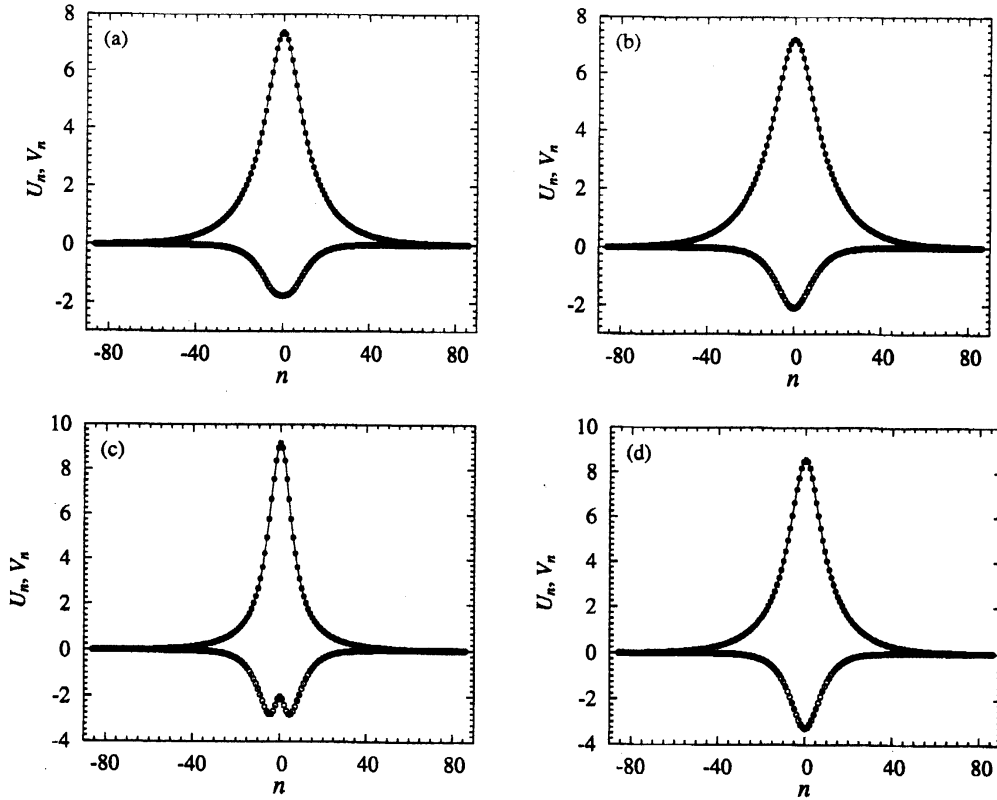


図 5. embedded ソリトンの形状 ( $D = 100, N = 85$ ): (a)  $\delta = 0.58637, q = 5$ ; (b)  $\delta = 2.9894, q = 5$ ; (c)  $\delta = 0.65467, q = 0.6$ ; (d)  $\delta = 3.3693, q = 0.6$ . 基本波 ( $U_n$ ) は “+” 側に, 2 次高調波 ( $V_n$ ) は “-” 側に振れている。

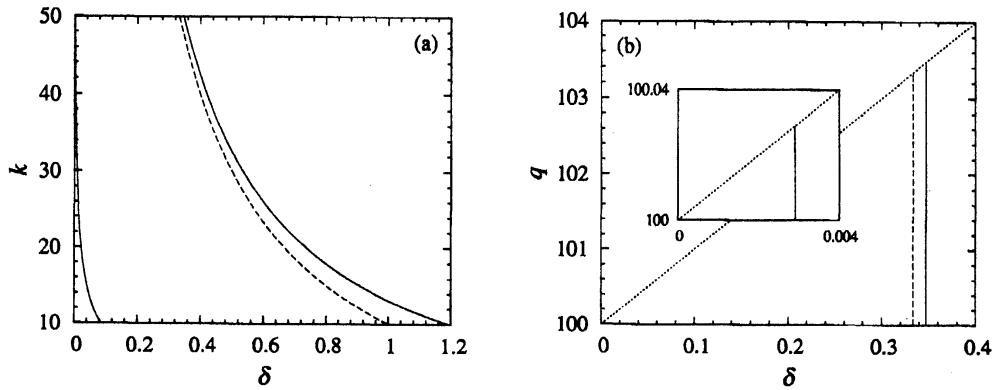


図 6.  $D = 10, N = 5$  あるいは  $7$  に対する embedded ソリトンの分枝: (a)  $q = 2k$ ; (b)  $k = 50$ . 破線は漸近解析の結果 (17) を表す。

embedded ソリトンの分枝に対する数値計算と第 3.1 節の漸近解析の結果を与える.  $k$  が  $D$  に比べて大きいとき, 漸近解析の結果 (17) が非常に良い近似を与えていることがわかる.

図 7 は, 対合  $R = R_2$  に対して,  $D = 5, N = 23$  の場合に得られる対称 embedded ソリトンの形状を示す. 特に, これらの embedded ソリトンは,  $R = R_1$  に対するものとは異なるパラメー

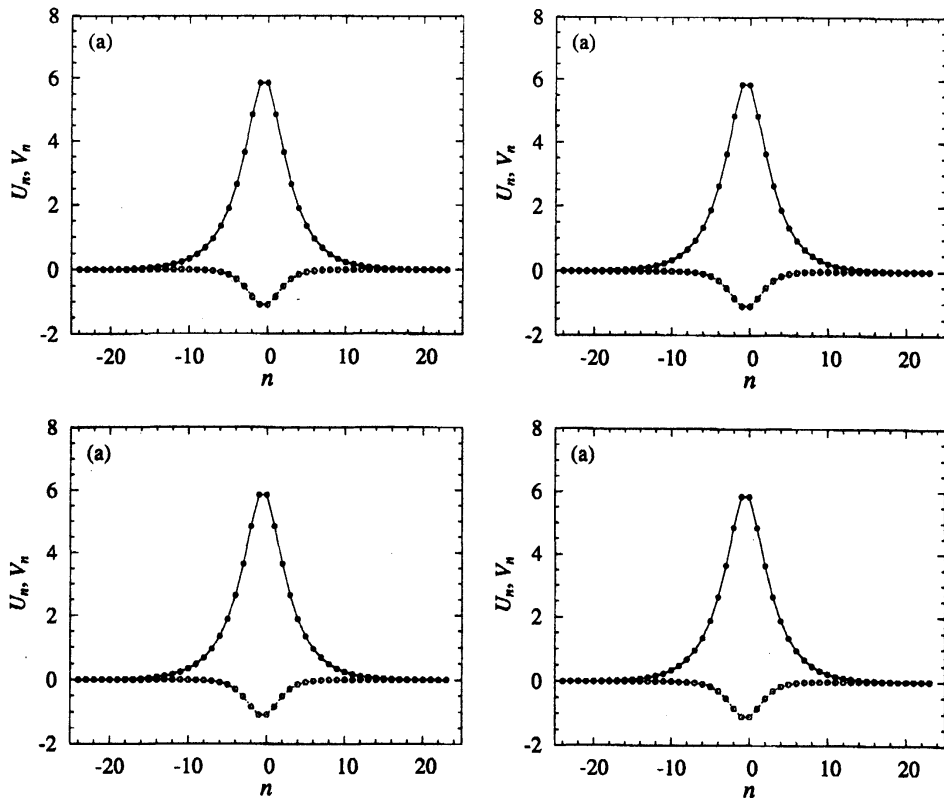


図 7. embedded ソリトンの形状 ( $D = 5$ ,  $N = 23$ ): (a)  $\delta = 1.3574$ ,  $q = 10$ ; (b)  $\delta = 3.1989$ ,  $q = 10$ ; (c)  $\delta = 0.57271$ ,  $q = 0.6$ ; (d)  $\delta = 3.4023$ ,  $q = 0.6$

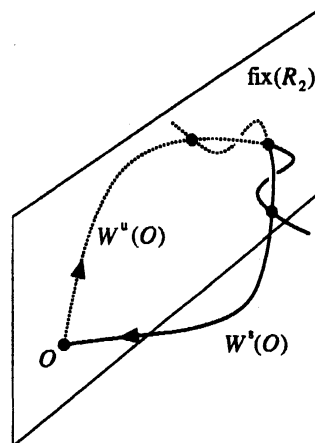


図 8. 相空間  $\mathbb{R}^4$  における 1 次元安定多様体と不安定多様体の交差

タの値で存在する。これは、図 8 に示すように、相空間  $\mathbb{R}^4$  内では 1 次元安定多様体と不安定多様体は 1 個の対称なホモクリニック軌道上でのみ交差し得るためである。

最後に、embedded ソリトンの安定性に関する数値シミュレーションの結果を与える。初期擾乱

$$u_n(0) = (1 + c_1)U_n, \quad v_n(0) = (1 + c_2)V_n$$

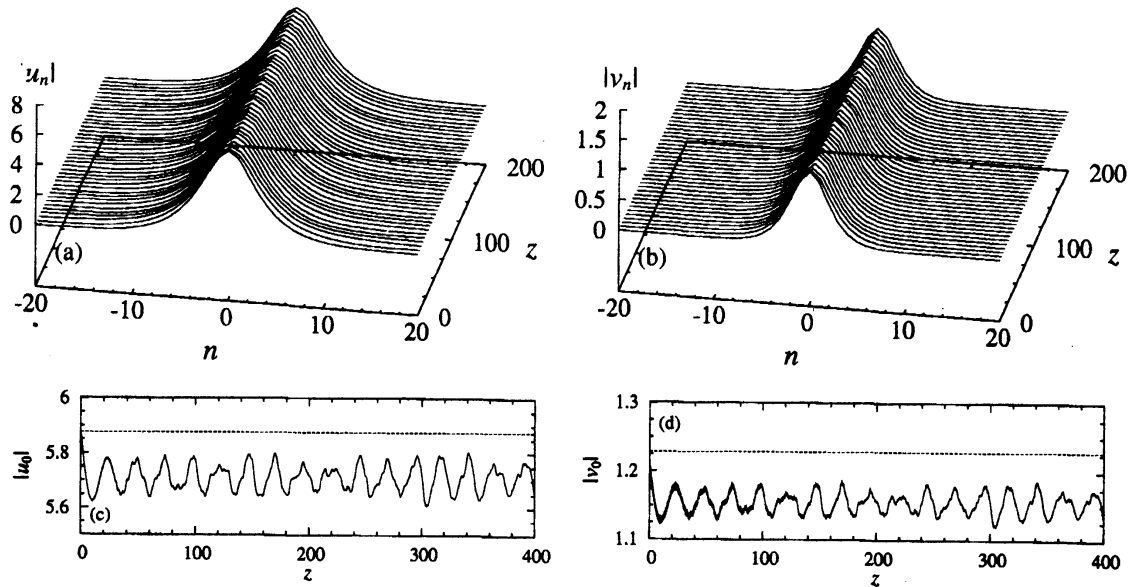


図 9.  $R_1$  に対して対称な, embedded ソリトンの安定性 ( $D = 5$ ,  $N = 22$ ,  $\delta = 3.20978$ ,  $k = 0.3$ ,  $q = 10$ ,  $c_1 = c_2 = -0.01$ )

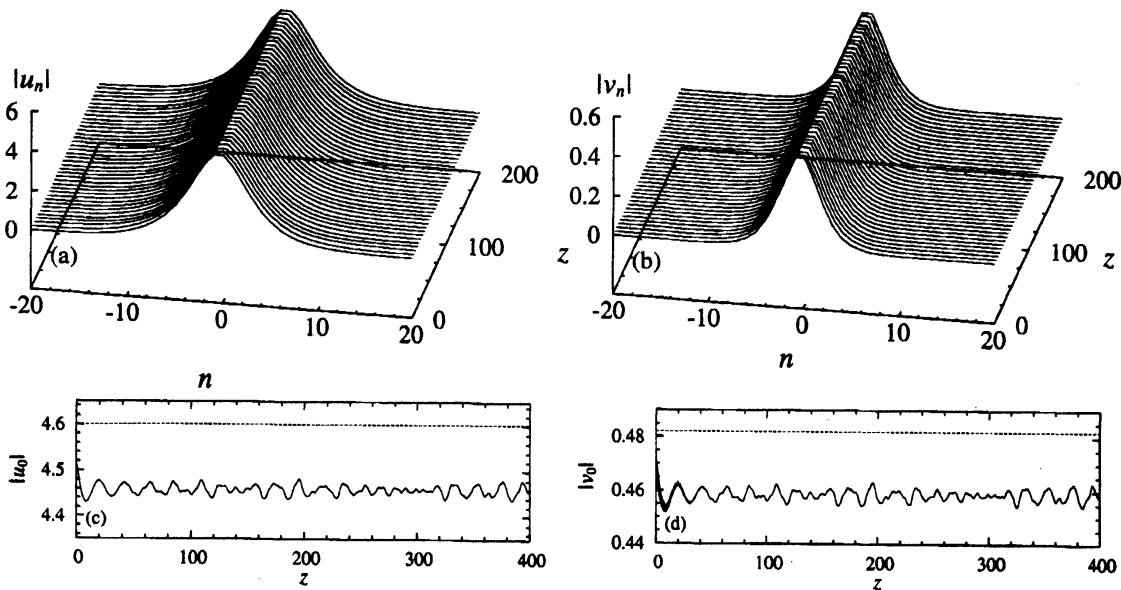


図 10.  $R_2$  に対して対称な, embedded ソリトンの安定性 ( $D = 5$ ,  $N = 22$ ,  $\delta = 3.2006$ ,  $k = 0.3$ ,  $q = 20$ ,  $c_1 = c_2 = -0.01$ )

を受ける embedded ソリトンの時間発展を, 境界条件

$$u_{-3N-4}(z) = u_{3N+4}(z) = v_{-3N-4}(z) = v_{3N+4}(z) = 0$$

の下で, 格子系 (12) に対して計算を行った. 図 9 と 10 にその結果を示す. ここで, 擾乱を受けた

解のエネルギー

$$E = \sum_{n=-3N-3}^{3N+3} (|u_n|^2 + 2|v_n|^2)$$

は,  $c_1, c_2 > 0$  のとき embedded ソリトンのものよりも大きく,  $c_1, c_2 < 0$  のとき小さくなる. したがって, 図 9 と 10 はエネルギーが小さくなるような擾乱の場合の結果である.

$\delta, \gamma_1, \gamma_2 > 0$  の場合, 連続系でも, 図 9 と 10 のように, エネルギーが小さくなるような擾乱に対して, 数値計算の信頼できる限界程度までの長時間に渡る数値シミュレーションにおいて安定であることが観測されているが, この場合に対しても高々エネルギーが大きくなるような擾乱に対してのみ安定となる embedded ソリトンの半安定性が報告されている [1, 11]. 連続系および格子系の embedded ソリトンに対してこの方面の研究のさらなる進展が期待される.

### 参考文献

- [1] A. R. Champneys, B. A. Malomed, J. Yang, and D. J. Kaup. Embedded solitons: solitary waves in resonance with the linear spectrum. *Physica D*, **152** (2001), 340–354.
- [2] E. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, 1997. Available by anonymous ftp from [ftp.cs.concordia.ca, directry pub/doedel/auto](ftp://ftp.cs.concordia.ca/directry/pub/doedel/auto).
- [3] J. Guckenheimer and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.
- [4] K. Yagasaki, Numerical detection and continuation of homoclinic points and their bifurcations for maps and periodically forced systems, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **7** (1998), 1617–1627.
- [5] K. Yagasaki, *HomMap: An AUTO Driver for Homoclinic Bifurcation Analysis of Maps and Periodically Forced Systems*, 1998. Available from <http://www.gifu-u.ac.jp/~chaos/yagasaki/software-j.html>.
- [6] K. Yagasaki, A. R. Champneys and B. A. Malomed, Discrete embedded solitons, *Nonlinearity*, **18** (2005), 2591–2613.
- [7] K. Yagasaki, A. R. Champneys and B. A. Malomed, Existence and stability of discrete embedded solitons under different reversibilities, in preparation.
- [8] K. Yagasaki and T. Wagenknecht, Detection of symmetric homoclinic orbits to saddle-centres in reversible systems, submitted for publication.
- [9] J. Yang, Stable embedded solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 143903.
- [10] J. Yang, B. A. Malomed and D. J. Kaup, Embedded solitons in second-harmonic-generating systems, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999), 1958–1961.
- [11] J. Yang, B. A. Malomed, D. J. Kaup and A. R. Champneys, Embedded solitons: A new type of solitary wave, *Math. Comp. Sim.*, **56** (2001), 585–600.