

Ginzburg-Landau 方程式の分岐構造 —振幅方程式の観点から—

大阪大学・大学院基礎工学研究科 小川知之 (Toshiyuki Ogawa)
Graduate School of Engineering Science
Osaka University

1 はじめに

よく知られているように Ginzburg-Landau 方程式は超伝導理論に現れる方程式であり次のような複素数値の未知関数 $\psi(x)$ を記述する一種の非線形楕円型方程式である。

$$\Delta\psi + \mu\psi(1 - |\psi|^2) = 0$$

ここで、 μ は正定数で Δ は空間方向のラプラス作用素である。 $\psi(x)$ は秩序パラメータと呼ばれるもので、本来磁場の方程式と結合して記述されるが、磁場の効果を無視したこの方程式のことを Ginzburg-Landau 方程式ということも慣例的に多い。これは、パターン形成などの問題で不安定化直後のパターンのダイナミクスを記述する振幅方程式（の定常問題）が、同じ形をしているため広く研究対象となってきたためであろう。ただし振幅方程式の観点で Ginzburg-Landau 方程式というときには

$$\psi_t = \Delta\psi + \mu\psi - |\psi|^2\psi \tag{1}$$

のように λ を不安定化パラメータとして高次の非線形項と分離した形で扱う。一方超伝導理論のときには $|\psi| = 1$ という超伝導状態と $\psi = 0$ の常伝導状態の転移を記述するために前者のような形をとるのが自然である。もちろん両者は適当なスケールで同等であるが、本稿では後者の (1)（もしくはその定常問題）を GL 方程式と呼ぶことにする。さて例えば Newell-Whitehead [NW] は熱対流の問題から GL 方程式を導出した。これはある波数の不安定化が起きる直後の挙動をその波数の固有モードの振幅の変化で記述しようという考え方で、不安定化の原理が同じであれば普遍的に GL 方程式が得られる。熱対流の Boussinesq 近似モデルはやや煩雑であるので同じ熱対流の現象論的なモデルである Swift-Hohenberg 方程式を例にとり、振幅展開の手続きをおさらいしておこう。

まず 1 次元の Swift-Hohenberg 方程式：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left\{ \nu - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} w - w^3. \tag{2}$$

の線形部分に $w = e^{\lambda t + ikx}$ を代入し自明解の線形安定性を見てみよう。すなわち波数関係式 $\lambda = \nu - (1 - k^2)^2$ を得る。これは、 $\nu > 0$ のとき $k \approx 1$ 付近で不安定化が起こることを意味する。そこで $\nu = \varepsilon^2 \mu$ としスケールされた変数 $T = \varepsilon^2 t$, $X = \varepsilon x$ を用い、

$$w = \varepsilon \{ A(T, X)e^{iX} + \overline{A(T, X)}e^{-iX} \} = 2\varepsilon \Re \left(A(T, X)e^{iX} \right) \tag{3}$$

を (2) に代入し $O(\varepsilon^4)$ の項と e^{3ix} の高波数成分を無視すると, GL 方程式:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = 4 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \mu A - 3|A|^2 A \quad (4)$$

が得られる. ここで \Re は複素数の実部を表す. もちろん上に述べた縮約は形式的な手続きであるが, 領域が無限区間であれば適当な問題設定の下で GL 方程式が元の方程式の挙動を近似しうることが知られている. 無限区間のときの振幅展開の有効性は [N] を参照されたい.

これに対して有限区間の問題のときにも, 元の問題を GL 方程式に縮約して議論することが可能であろうか. その際, [TB] に指摘されているように境界条件に注意しなければならない. 例えば (2) で周期境界条件を課すことは (4) に同じ周期境界条件を課すことにはならない. 実際には, 次の擬周期境界条件を課すことに相当する. すなわち $w(x+L) = w(x)$ は $A(X + \tilde{L})e^{iL} = A(X)$ に相当する. ここで $\tilde{L} = L/\varepsilon$ とした. 実部の周期性からなぜ虚部の周期性が従うのか, [TB] ではこの導出がやや不明確であった. またノイマン境界条件の取り扱いなども整理しながらこの点も明らかにしたい. さらにこのような擬周期境界条件を課すことによって GL 方程式の定常解の分岐構造が Swift-Hohenberg 方程式の分岐構造にどの程度反映されるのかを議論したい. なお, 有限区間のときの (2) と (4) の関係を厳密に議論することはまだできていないが, 領域サイズを大きくすればある程度大域的な分岐構造が両者で一致すると期待される.

一方 GL 方程式の定常解の大域的な分岐構造は, 最近 Kosugi-Morita-Yotsutani [KMY1], [KMY2] の研究により急速に明らかになってきた. すなわち周期境界条件もしくは擬周期境界条件下でのすべての定常解が求められた. 周期境界条件下での GL 方程式の非自明な解がすべて楕円関数で表せることを用いて [KMY1] ではいままでも局所分岐しかわかっていなかった回転波からの分岐枝を完全に延長したのみならずそれ以外に定常解がないことも示した. 同様の手法で擬周期境界条件下での分岐構造も [KMY2] で明らかにされた.

さて, 実際の熱対流の問題では, 種々の異なる境界条件を考慮する必要があり, 場合によっては周期境界条件のときのような分岐構造をもつこともあれば, そうでないこともある. Mizushima-Nakamura [MN] は粘着-自由の混合境界条件を考えることにより自由境界条件のときに交差していた各モードの中立安定曲線が非交差になることを示し分岐構造が変わることを示唆した. さらにごく最近 Kato-Fujimura [KF] は中立安定曲線の交差が外れることが分岐構造にどのような影響を与えるかを振幅方程式を考慮することで調べた. 分岐論的には周期境界条件を壊し混合型の境界条件にすることは $SO(2)$ 対称性を破壊することに相当し, 興味深い. $SO(2)$ 対称性の下での大域分岐構造が先に述べたように完全にわかっている GL 方程式で, 対称性をやぶることに対応する境界条件を見つけ解析を行うことは重要であろう. そこで, 煩雑さを避けるために, 再び Swift-Hohenberg 方程式に種々の境界条件を設定しこれが対称性とどう関係するか, そしてどのようなときに中立安定曲線の非交差が起こるのかを調べることにする. さらに対応する GL 方程式の境界条件も求め, GL 方程式の非周期的境界値問題を提案する.

なお, 本稿の内容と直接関係はないが, 神保-森田による [JM1][JM2] は, Ginzburg-Landau 方程式の由来やその時点までの結果が簡潔に整理されており貴重な解説である.

2 境界条件の対称性

すでに述べたように物理モデルの境界条件が振幅方程式にどのように反映されるのかを明らかにするのがひとつの目的である。Swift-Hohenberg 方程式を物理モデルと考え、その定常解の分岐構造と振幅方程式としての GL 方程式の定常解の分岐構造の関係を調べる。まず SH 方程式 (2) 自身が次の不変性をもつことを注意する。

- (並進対称性) $S_\theta : w(t, x) \mapsto w(t, x - \theta)$
- (鏡映対称性) $\mathcal{K} : w(t, x) \mapsto w(t, -x)$
- (反転対称性) $\mathcal{H} : w(t, x) \mapsto -w(t, -x)$

ここで並進対称性と鏡映対称性は作用素の線形部分が偶数階微分からなることに起因し反転対称性は加えて非線形部 w^3 が奇関数であることによるものである。ここでは (2) を次のような境界条件の下で考えよう。

- (周期境界条件) $w(t, x) \equiv w(t, x + L)$
- (自由端境界条件) $\frac{\partial w}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(t, x) = 0$ at $x = 0, L/2$
- (固定端境界条件) $w(t, x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = 0$ at $x = 0, L/2$
- (混合型境界条件) $w(t, x) = \delta \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) + (1 - \delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = 0$ at $x = 0, L/2$

さて (2) の解 $w(t, x)$, $x \in (0, L/2)$ が自由端境界条件を満たすとき, $w(t, -x) = \mathcal{K}w(t, x)$, $x \in (-L/2, 0)$ と定義すれば $x \in (-L/2, L/2)$ の解として拡張される。こうして自由端境界条件を満たす解の全体は周期境界条件を満たし鏡映対称性をもつものの全体と等しいことがわかる。これは Golubitsky-Stewart [GS] によれば “hidden symmetry” と呼ばれるが, Fujii-Mimura-Nishiura [FMN] により最初に指摘されたものである。同様に (2) の解 $w(t, x)$, $x \in (0, L/2)$ が固定端境界条件を満たすとき, $w(t, -x) = \mathcal{H}w(t, x)$, $x \in (-L/2, 0)$ と定義すれば $x \in (-L/2, L/2)$ の解として拡張される。従ってこの場合も周期 L の周期関数の中で議論すれば十分であることがわかる。周期境界条件を満たすものは周期を法とする並進の対称性 ($SO(2)$ 不変性) をもち, 例えば分岐が必ず Pitchfork の型で起こるなどの性質はこのことの帰結である。

さて周期境界条件を含めてこれら 4 つに対応する GL 方程式 (4) の境界条件を求めよう。それには空間座標を

$$\tilde{x} := \frac{2\pi}{L}x = \frac{2\pi}{\varepsilon L}X$$

で書き換えると便利である。この座標で GL 方程式の標準形にするために, さらに次のスケールリング:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\tilde{x}) &:= \frac{\varepsilon L}{2\pi\alpha}A\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\tilde{x}\right) = \frac{\varepsilon L}{2\pi\alpha}A(X) \\ \tilde{t} &:= \frac{1}{\tau}\left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon L}\right)^2 T \\ \tilde{\mu} &:= \frac{\mu}{3}\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi\alpha}\right)^2\end{aligned}$$

により方程式は以下のように GL 方程式の標準形に帰着する.

$$\tilde{A}_{\tilde{x}} = \tilde{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\mu}\tilde{A} - |\tilde{A}|^2\tilde{A} \quad (5)$$

ただし, $\alpha^2 = 4/3, \tau = 1/3$ で, さらに $Q = L/2\pi$ とおけば

$$\phi(\tilde{x}) = \tilde{A}(\tilde{x})e^{iQ\tilde{x}} \quad (6)$$

を用いて

$$w(x) = 2\Re\left(\frac{2\pi\alpha}{L}\phi(\tilde{x})\right)$$

と表せる. したがって (2) の周期境界条件に対応する (5) の境界条件は

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = \tilde{A}(\tilde{x} + 2\pi)e^{iQ2\pi}$$

となることがわかる.¹

(6) を微分して

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{x}}\phi(\tilde{x}) &= (\tilde{A}_{\tilde{x}} + iQ\tilde{A})e^{iQ\tilde{x}} \\ \partial_{\tilde{x}}^2\phi(\tilde{x}) &= (\tilde{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} + 2iQ\tilde{A}_{\tilde{x}} - Q^2\tilde{A})e^{iQ\tilde{x}} \\ \partial_{\tilde{x}}^3\phi(\tilde{x}) &= (\tilde{A}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 3iQ\tilde{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} - 3Q^2\tilde{A}_{\tilde{x}} - iQ^3\tilde{A})e^{iQ\tilde{x}} \end{aligned}$$

したがって次を得る.

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi\alpha}{L}2\Re\left(\tilde{A}(\tilde{x})e^{iQ\tilde{x}}\right) \\ w_x &= \frac{2\pi\alpha}{L}2\Re\left(\left(\frac{1}{Q}\tilde{A}_{\tilde{x}} + i\tilde{A}(\tilde{x}) + O(Q^{-2})\right)e^{iQ\tilde{x}}\right) \\ w_{xx} &= \frac{2\pi\alpha}{L}2\Re\left(\left(\frac{2i}{Q}\tilde{A}_{\tilde{x}} - \tilde{A}(\tilde{x}) + O(Q^{-2})\right)e^{iQ\tilde{x}}\right) \\ w_{xxx} &= \frac{2\pi\alpha}{L}2\Re\left(\left(-\frac{3}{Q}\tilde{A}_{\tilde{x}} - i\tilde{A}(\tilde{x}) + O(Q^{-2})\right)e^{iQ\tilde{x}}\right) \end{aligned}$$

我々の興味は区間長 L が十分大きいときにあるので上で $O(Q^{-2})$ の項を無視して考えよう. $\tilde{A} = \phi e^{-iQ\tilde{x}}$ より $\tilde{A}_{\tilde{x}} = (\phi_{\tilde{x}} - iQ\phi)e^{-iQ\tilde{x}}$ を代入して次を得る.

$$\begin{aligned} w = 0 &\Rightarrow \Re\phi = 0 \Rightarrow u = 0 \\ w_x = 0 &\Rightarrow \Re\phi_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 \\ w_{xx} = 0 &\Rightarrow \Re\left(\frac{2i}{Q}\phi_x + \phi\right) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{Q}v_x + u = 0 \\ w_{xxx} = 0 &\Rightarrow \Re\left(-\frac{3}{Q}\phi_x + 2i\phi\right) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{Q}u_x - 2v = 0 \end{aligned}$$

ただし上で ϕ の実部・虚部を $\phi = u + iv$ とした. 改めて GL 方程式の境界条件を $\phi = u + iv$ を用いて整理しておこう.

- (周期境界条件) $u(0) = u(2\pi), u_x(0) = u_x(2\pi), v(0) = v(2\pi), v_x(0) = v_x(2\pi),$
- (自由端境界条件) $u_x(\tilde{x}) = v(\tilde{x}) = 0$ at $\tilde{x} = 0, \pi$
- (固定端境界条件) $u(\tilde{x}) = v_x(\tilde{x}) = 0$ at $\tilde{x} = 0, \pi$
- (混合型境界条件) $u(\tilde{x}) = \delta u_x(\tilde{x}) + (1 - \delta)\left(-\frac{2}{Q}v_x(\tilde{x})\right) = 0$ at $\tilde{x} = 0, \pi$

もちろん GL 方程式の自由端/固定端境界条件ともに 2π 周期関数に拡張できる.

¹ $\Re\phi$ の周期性から ϕ の周期性は一般に従わないが, この場合は以下と同様な議論で結果的には成立する.

3 周期境界条件下での GL 方程式と SH 方程式の大域分岐

周期境界条件のもとで GL 方程式と SH 方程式それぞれの自明解からの分岐構造を追跡してみよう。まず局所分岐を見るために 0 解のまわりで SH 方程式 (2) を線形化する。周期 L の境界条件下では、整数 m に対して $w_m = e^{i\frac{2\pi}{L}mx}$ が固有関数を与えるので、対応する固有値は

$$\lambda_m^{SH} = \nu - \left(1 - \left(\frac{2\pi}{L}m\right)^2\right)^2$$

である。従って m モードの中立安定曲線

$$C_m = \{(L, \nu); \nu - \left(1 - \left(\frac{2\pi}{L}m\right)^2\right)^2 = 0\}$$

をパラメーター空間 (L, ν) に書けば C_m の近傍で局所分岐解が現れる。実は $\tilde{\nu} = \nu L^2$ としてパラメーター空間を $(L, \tilde{\nu})$ と考えると便利である。ここでは中立安定曲線は

$$C_m^{SH} = \{(L, \tilde{\nu}); \tilde{\nu} = \frac{(L + 2\pi m)^2}{L^2}(L - 2\pi m)^2\}$$

となる。異なるモードの中立安定曲線が交差する、すなわち退化分岐点が現れることがあるが、正負のモードを同一視すればたかだか 2 つのモードが交差している。周期境界条件では並進対称性から定常解が退化するので偶関数に限定して考えることにしよう。すべての単純分岐点（中立安定曲線上の点でかつ交差点でないところ）では定常解への分岐が超臨界 Pitchfork 分岐で起こることがただちにわかる。これは固有関数で展開して中心多様体上の方程式系が直接計算できるためである。実際、基本波数 $k_0 = 2\pi/L$ として $u(t, x)$ のフーリエ展開を考える：

$$u(t, x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \alpha_m(t) e^{imk_0 x}. \quad (7)$$

関数 $u(t, x)$ は実数値としているので、フーリエ係数はエルミート対称性： $\alpha_{-m} = \overline{\alpha_m}$ をもつ。さらに、偶関数を仮定したので $\alpha_{-m} = \alpha_m$ であり従って $\alpha_m \in \mathbf{R}$ である。これによって (2) は

$$\dot{\alpha}_m = \lambda_m^{SH} \alpha_m - \sum_{m_1+m_2+m_3=m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3}, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad (8)$$

となる。 m モードの単純分岐点近傍では中心多様体近似を行いその縮約方程式は

$$\dot{\alpha}_m = \lambda_m^{SH} \alpha_m - 3\alpha_m^3$$

となる。一方 m, n のモードの 2 つの多重分岐点近傍での縮約方程式も同様に計算できて、

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_m &= \lambda_m^{SH} \alpha_m - \alpha_m(3\alpha_m^2 + 6\alpha_n^2) \\ \dot{\alpha}_n &= \lambda_n^{SH} \alpha_n - \alpha_n(6\alpha_m^2 + 3\alpha_n^2) \end{aligned}$$

これにより (8) の局所分岐構造を調べることができる。

より大域的な分岐のシナリオは次のように理解されている。すなわち L を固定して $\tilde{\nu}$ を動かしてゆくと、中立安定曲線を超えるごとに Pitchfork 分岐の枝が現れる。これらは

いずれも周期定常解である。最初の枝の定常解は0解の安定性を受け継ぐが、2番目以降の枝上の定常解は分岐直後にすでに不安定である。しかしながらこれらの不安定な定常解の枝は途中で亜臨界 Pitchfork 分岐を必要な回数繰返し、不安定な分岐定常解を放出し最終的には安定性を回復する。これは Eckhaus 安定性と呼ばれるものに対応する。この途中で2次分岐する不安定定常解は各退化分岐点から出現する亜臨界 Pitchfork 分岐である。こうした分岐シナリオは、局所分岐解析や数値実験結果から示唆されるものであるが、 ν がさらに大きくなると、SH 方程式ではこのシナリオと食い違いが起こることも知られている ([HOM])。しかしながら本来 SH 方程式はある波数の不安定化が起きた直後、すなわち $\nu \approx 0$ で意味をもつ方程式であることを考えればこのことは問題ではなくむしろ $\nu \approx 0$ での“準”大域的な分岐構造がどうなっているか、特にそれが GL 方程式の分岐構造と対応するかが問題なのである。

そこで1次元の GL 方程式：

$$\psi_t = \psi_{xx} + \mu\psi - |\psi|^2\psi \quad (9)$$

の分岐を考えてみよう。前節で見たように、SH 方程式の周期境界条件は $\psi(x+2\pi)e^{iQ2\pi} = \psi(x)$ という擬周期境界条件に対応する。これはパラメーター $Q = L/2\pi$ に依存する変換を施した

$$\phi(x) = \psi(x)e^{iQx} \quad (10)$$

で表現すれば 2π 周期であることに相当する。そこで (10) を用いて方程式を ϕ の式に書き換えよう。

$$\phi_t = \phi_{xx} - 2iQ\phi_x + (\mu - Q^2)\phi - |\phi|^2\phi \quad (11)$$

この (11) を $\phi(x) = \phi(x+2\pi)$ の周期境界条件で解くことが、SH 方程式を周期 L の周期境界条件で解くことに対応するのであった。 $\phi = u + iv$ として実2次元の方程式系で表せば次が得られる。

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (\mu - Q^2)u + 2Qv_x - (u^2 + v^2)u \\ v_t &= v_{xx} + (\mu - Q^2)v - 2Qu_x - (u^2 + v^2)v \end{aligned} \quad (12)$$

(11)(12) いずれも周期境界条件下では三角関数 e^{imx} が0解の周りの線形固有関数を与えるのでその対応する固有値を求めて $\lambda_m = \mu - (Q - m)^2$ が線形安定性を与える。すなわち中立安定曲線が

$$C_m^{GL} = \{(Q, \mu); \mu = (Q - m)^2\}$$

となる。

かくして、自明解からの局所分岐が周期境界条件下の SH 方程式と擬周期境界条件下の GL 方程式で同等であることがわかる。数値計算による両者の分岐図を見る限り L を大きくとる限り非常によく近似になっていることがわかる。なお、擬周期境界条件下の GL 方程式の定常解はすべて [KMY2] で得られているので、その意味では GL 方程式の分岐構造をよりどころにして、他の有限系の物理モデルの分岐構造を理解できることが期待される。なお、次節に紹介するように擬周期境界条件の解構造の擾動として捉えることにより周期境界条件以外の場合にも GL 方程式の分岐構造が利用できる可能性もあり、その意味でも [TB][KMY2] などで明らかになってきた GL 方程式の大域分岐構造の重要性が改めて認識されるであろう。

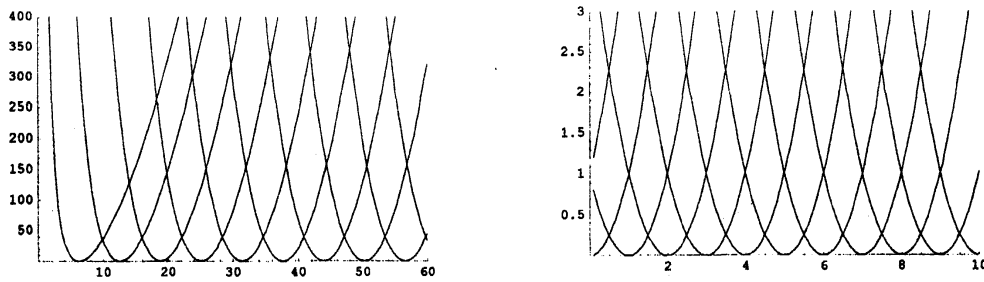


図 1: (2) の周期境界条件での中立安定曲線 C_m^{SH} (左) および (1) の擬周期境界条件での中立安定曲線 C_m^{GL} (右).

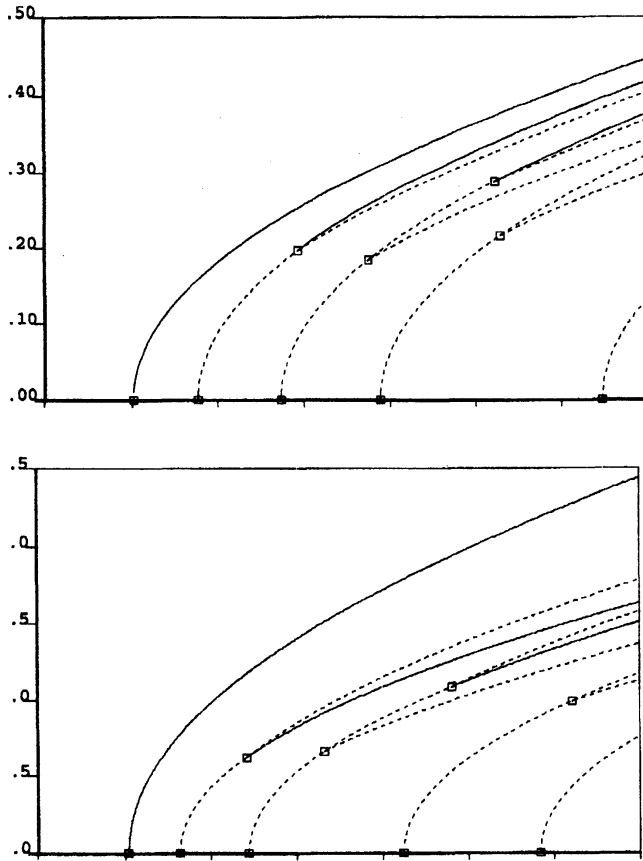


図 2: (2) の周期境界条件での分岐図 (左) および (1) の擬周期境界条件での分岐図 (右). それぞれ 0 解からの第 n 番目の分岐定常解の枝から, 亜臨界 Pitchfork 分岐として $(n-1)$ 個の混合モード定常解の枝を放出した後, 安定性を回復する.

4 境界条件の対称性破壊

GL方程式の有限系の分岐構造というところ、(擬)周期境界条件でのみ研究されているようである。しかしながら、熱対流の問題では[MN][KF]などに見られるようにこの範疇に入らない分岐問題が研究され始めている。そこで明らかにされてきたことは、境界条件によっては並進から来るSO(2)対称性が破れてそれによってまず線形安定性が定性的に変化する。すなわち前節でみたように隣接モードの中立安定曲線が交差することがもはや起こらなくなり、 $2n - (2n + 1)$ モードの間で擬交差もしくは固有値の反発といった現象が起こる。ここでは、SH方程式に混合型境界条件を課すと類似の擬交差が見られることを報告する。図3は(2)の線形化固有値問題を差分法により対応する行列の固有値問題として近似的に調べたものである。これによると、混合型境界条件を課すことにより、[MN][KF]などで見られたのと同様の中立安定曲線の擬交差が見られた。対応することをGL方程式で行うと、やはり同様に擬交差が見られた。目下、数値的に線形安定性を調べただけで、定常解の分岐追跡すら行っていないが、SH方程式GL方程式とともに擬交差が正しいとすれば交差した状態すなわちSO(2)不変な状態を退化分岐点と考えその摂動として擬交差状態での定常解の分岐構造を系統的に調べることができるはずで興味深い。なお、この擬交差はSH方程式のみならず反応拡散系(activator-inhibitor系)などでも混合型の境界条件を課すことにより得られるので普遍的なものと考えられ期待される。

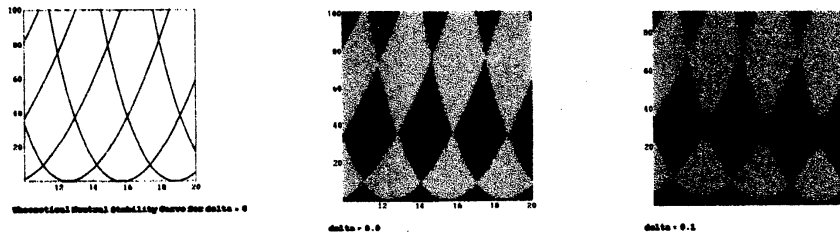


図3: (2)の固定端境界条件での理論的な中立安定曲線(左)と近似計算による固有値分布(中)。明暗の境界が中立安定曲線を表し理論曲線とほぼ一致している。一方、右図は混合型境界条件で $\delta = 0.1$ とした結果である。1-2モードは交差しているが、2-3モードは擬交差を起こしていることがわかる。

参考文献

- [FMN] H.FUJII, M.MIMURA AND Y.NISHIURA, *A Picture of the global bifurcation diagram in ecological interacting and diffusing systems*, Physica D 5, 1982, 1-42.
- [GS] M.GOLUBITSKY AND I.STEWART, *The Symmetry Perspective*, Birkhäuser, 2002.
- [HOM] Y.HIRAOKA, T.OGAWA AND K.MISCHAIKOW, *Swift-Hohenberg* 方程式の定常解大域分岐の Conley 指数を用いた検証, 日本応用数学会論文誌, 13(2), 2003, 191-211.
- [JM1] 神保秀一, 森田善久, ギンツブルグ・ランダウ方程式の安定平衡解とその構造, 都立大学数学教室セミナー報告, 2000.
- [JM2] 神保秀一, 森田善久, ギンツブルグ・ランダウ方程式の解の構造, 数学, 56(1), 2004, 18-32.
- [KF] Y.KATO AND K.FUJIMURA, レーリー・ベナール対流における線形固有値の分裂と非線形解の分岐特性, 数理解析研究所講究録, 2005.
- [KMY1] S.KOSUGI, Y.MORITA AND S.YOTSUTANI, *A complete bifurcation diagram of the Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions*, Communications on Pure and Applied Analysis, Vol.4, No.3 (2005) 665-682.
- [KMY2] S.KOSUGI, Y.MORITA, S.YOTSUTANI, *Global bifurcation structure of a 1-d Ginzburg-Landau model*, Journal of Mathematical Physics. September, 2005 special issue of JMP on Superconductivity and the Ginzburg-Landau Model.
- [MN] J.MIZUSHIMA AND T.NAKAMURA, *Repulsion of Eigenvalues in the Rayleigh-Bénard Problem*, J. Phys. Soc. Jap., 71(3), 2002, 677-680.
- [N] Y.NISHIURA, *Far-from-Equilibrium Dynamics*, AMS Translations of mathematical monographs (209), 2002.
- [NW] A.C.NEWELL AND J.WHITEHEAD, *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid Mech. 38, 1969, 279-303.
- [TB] L.TUCKERMAN AND D.BARKLEY, *Bifurcation analysis of the Eckhaus instability*, Physica 46 D, 1990, 57-86.