数理解析研究所講究録
1489 巻 2006 年 195-201

紐解かれた項書換え系の文脈依存条件の除去のための変換
Transformation for Removing Context-Sensitivity of TRSs Obtained by Unraveling

水谷 知博 † 西田 直樹 ‡ 酒井 正彦 ‡ 坂部 俊樹 ‡ 草刈 圭一朗 ‡

Tomohiro MIZUTANI †, Naoki NISHIDA ‡, Masahiko SAKAI ‡,
Toshiki SAKABE ‡, and Keiichirou KUSAKARI ‡

† 名古屋大学 工学部電気電子情報工学科 ‡ 名古屋大学 大学院情報科学研究科

†Dept. of Information Engineering, School of Engineering, Nagoya University
‡Graduate School of Information Science, Nagoya University

†mizutani@sakabe.i.is.nagoya-u.ac.jp
‡{nishida,sakai,sakabe,kusakari}@is.nagoya-u.ac.jp

概　要

条件付き項書換え系（CTRS）からそれと同等の計算をする項書換え系（TRS）に変換する手法として紐解き変換（unraveling）がある．しかし，変換によって得られる TRS が変換前の CTRS と同等な計算をするためには文脈依存条件と所属制約条件を必要とする．そのため，変換によって得られる TRS は，一般的な TRS と同様には扱うことができない．本稿では，紐解き変換によって得られる TRS から文脈依存条件を緩和するための変換の手法を提案し，文脈依存条件を除去することを目指す．

キーワード　条件付き項書換え系，プログラム変換，紐解き変換，文脈依存書換え，所属制約

1　はじめに

条件付き項書換え系（CTRS）とは，規則の適用時に成り立つべき条件を付加した条件付き書換え規則からなる計算モデルである．条件の代表的な形式は 2 つの項の組であり，その評価には CTRS 自身の書換えを用いる．そのため，CTRS の書換えでは条件部の評価の入れ子が生じ，項書換え系（TRS）の書換えに比べて非常に複雑となる．さらに，停止性などの計算の性質を解析することも困難である．CTRS の計算の複雑さを解消する方法として，CTRS からそれと同等の計算をする TRS に変換する紐解き変換（unraveling）[3],[5],[8] がある．決定的 CTRS を対象とした紐解き変換 [5],[8] では，n 個の条件を持つ規則を，条件を 1 つずつ順に評価する $n+1$ 個の書換え規則に分解する．紐解き変換で得られた TRS の停止性を示すことで，CTRS の停止性を保証することもできる．しかし，紐解き変換は与えられた CTRS に対して一般には模倣完全ではない．すなわち，変換によって得られる TRS の書換えと，与えられた CTRS の書換えが元の関数記号上で等しいとは限らない．書換えが等しくなるためには，変換によって得られる TRS に対して文脈依存条件 [2] と所属制約条件 [6] が必要になる [4]．そのため，変換によって得られる TRS は，一般的な TRS と同様には扱うことができない．

本稿では，まず決定的 CTRS を対象とする紐解き変換 [5],[8] を 1-CTRS を対象とする紐解き変換 [3] に基づいて改良する．具体的には，同時に判定できる複数の条件を一度に評価する書換え規則を生成する．これにより，文献 [5],[8] の紐解き変換よりも生成規則数の減少を図る．さらに，改良した紐解き変換によって得られる TRS の書換えと変換前の CTRS の書換えを等しくするために必要な文脈依存条件を取り除く方法について議論する．書換えの制限は，紐解き変換によっ

て生成される新しい関数記号に対して与えられる．この新しい記号を減らすことによって文脈依存条件を緩和する．これらの記号が全て削除できる場合には文脈依存条件が不要になる．この考えに基づいて，紐解き変換によって得られるTRSから文脈依存条件を緩和させるための変換を提案する．

2 準備

ここでは，項書換え系の基本的な定義を記す．本論文では，項書換え系の一般的な記法に従う [1],[5].

関数記号の集合 $\mathcal{F}$，変数の可算無限集合 $\mathcal{V}$，写像 arity: $\mathcal{F} \to \mathbb{N}$（ただし，$\mathbb{N}$ は自然数の集合）から生成されるすべての項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．項 s の中のどの変数も 1 回しか現れないとき，s は**線形**であるという．項 $t_1,\ldots,t_n$ のいずれかに現れる変数の集合を $\mathcal{V}ar(t_1,\ldots,t_n)$ で表す．項 s と t が同一であるときは $s \equiv t$ と記述する．

項 t における**位置**の集合 $\mathcal{O}(t)$ を正整数の列（空列を ε で表現）を用いて，次のように定義する：

- $t \in \mathcal{V}$ のとき，$\mathcal{O}(t) = \{\varepsilon\}$,
- $t \equiv f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき，$\mathcal{O}(t) = \{\varepsilon\} \cup \{iu \mid i \leq n, u \in \mathcal{O}(t_i)\}$.

位置 $p,q \in \mathcal{O}(t)$ に対して，$pp' = q$ を満たす $p' \in \mathcal{O}(t)$ が存在するとき，$p \leq q$ と書く．特に $p' \neq \varepsilon$ とき，$p < q$ と記す．root(s) は項 s の先頭（位置 ε）の記号を表す．

ホール $\Box \notin \mathcal{F}$ を特別な定数記号とする．**文脈**とは，$\Box$ を一つだけ含む項である．ホール自身も文脈であり，このような文脈を空の文脈という．文脈 $C[\,]$ において位置 p に出現するホール $\Box$ を項 t で置き換えることによって得られる項を $C[t]_p$ と記す．なお，p を省略してもよい．$\mathcal{F},\mathcal{V}$ 上のすべての文脈の集合を $\mathscr{C}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．項 t,u に対して $t = C[u]_p$ となるような文脈 C が存在するとき，u は t の**部分項**であるという．特に $\varepsilon < p$ のとき，u を**真部分項**という．また，位置 $p \in \mathcal{O}(t)$ における部分項 u を $u \equiv t|_p$ と記す．

代入とはその定義域が有限集合である変数から項への写像である．代入 σ の定義域，値域は，それぞれ $\mathcal{D}om(\sigma) = \{x \mid x \in \mathcal{V}, x \not\equiv \sigma(x)\}$，$\mathcal{R}an(\sigma) = \{\sigma(x) \mid x \in \mathcal{D}om(x)\}$ で定義される．値域に現れる変数の集合を $\mathcal{VR}an(\sigma) = \bigcup_{t \in \mathcal{R}an(\sigma)} \mathcal{V}ar(t)$ とする．$\mathcal{D}om(\sigma) = \{x_1,\cdots,x_n\}$ であり，かつ $\sigma(x_i) \equiv t_i$ のとき，σ を $\{x_1 \mapsto t_1,\cdots,x_n \mapsto t_n\}$ と記す．項 t に対して，$\sigma(t)$ を t の**インスタンス**と呼び，$t\sigma$ と略記する．代入 σ,σ' について，$\mathcal{D}om(\sigma) = \mathcal{D}om(\sigma')$ かつすべての $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ において $\sigma(x) \equiv \sigma'(x)$ のとき，$\sigma = \sigma'$ と記述する．σ と σ' の合成は $\sigma\sigma'$ と記述し，$x\sigma\sigma' \equiv \sigma'(\sigma(x))$ で定義する．

$\mathcal{F}$ 上の**条件付き書換え規則**は次の条件を満たす 3 項組 $(l,r,Cond)$ であり，$l \to r \Leftarrow Cond$ と書かれる：(1) l,r はそれぞれ右辺，左辺と呼ばれる $\mathcal{F}$ 上の項であり，l は変数ではない，(2) $Cond$ は**条件部**と呼ばれ，$Cond_1 \wedge \cdots \wedge Cond_n$ $(n > 0)$ の形式している．$Cond_i$ は true または $\mathcal{F}$ 上の項 s_i と t_i の組 $s_i \to t_i$ の形式をしている．$Cond' \wedge$ true や true $\wedge\, Cond'$ のような節は $Cond'$ と省略する．特に，条件部が true である規則 $l \to r \Leftarrow$ true を単に**書換え規則**と呼び，$l \to r$ と略してもよい．$Cond$ 中の変数の集合を $\mathcal{V}ar(Cond)$ で表す．$\approx$ を項上の 2 項関係としたとき，$\approx$ と代入 σ が条件部 $Cond = s_1 \to t_1 \wedge \cdots \wedge s_n \to t_n$ のすべての i について $s_i\sigma \approx t_i\sigma$ を満たす，もしくは $Cond =$ true であるならば，$\approx$ と σ は $Cond$ を満たすといい，$Cond(\sigma,\approx)$ と書く．条件付書換え規則は他の規則と区別できるラベル ρ を用いて $\rho : l \to r \Leftarrow Cond$ と書くこともあり，略記するために ρ のみを記述してもよい．

$\mathcal{F}$ 上の**条件付き項書換え系**（CTRS）は $\mathcal{F}$ 上の条件付き書換え規則の有限集合である．CTRS が書換え規則のみの集合であるとき，その CTRS を**余剰変数付き項書換え系**（EV-TRS）と呼ぶ．特に，すべての書換え規則 $l \to r$ が $\mathcal{V}ar(l) \supseteq \mathcal{V}ar(r)$ を満たすならば，その CTRS は**項書換え系**（TRS）である．

R を $\mathcal{F}$ 上の CTRS とすると，R による n レベルの書換え関係 $\underset{n}{\to}_R$ は次のように再帰的に定義される：

- $\underset{0}{\to}_R = \emptyset$,
- $\underset{n+1}{\longrightarrow}_R = \{(C[l\sigma]_p, C[r\sigma]_p) \mid \rho : l \to r \Leftarrow Cond \in R,\ C \in \mathscr{C}(\mathcal{F},\mathcal{V}),\ Cond(\sigma, \overset{*}{\underset{n}{\to}}_R)\}$（ただし，$\overset{*}{\underset{n}{\to}}_R$ は $\underset{n}{\to}_R$ の推移的反射的閉包である）.

R の書換え関係 $\to_R$ は $\to_R = \bigcup_{n \geq 0} \underset{n}{\to}_R$ と定義される．規則を適用した位置 p を明記する場合は $s \overset{p}{\to}_R t$，更に適用した規則 ρ を明記する場合は $s \overset{[p,\rho]}{\to}_R t$ と記述する．任意の左辺のインスタンス $l\sigma$ は**リデックス**と呼ばれる．$\to_R$ の推移的反射閉包を $\overset{*}{\to}_R$ とする．$t \equiv t_0 \to_R t_1 \to_R \cdots$ を**書換え系列**と呼び，n ステップの系列は $t \overset{n}{\to}_R t_n$ と書く．

書換え規則 $\rho : l \to r \Leftarrow Cond$ において，条件部もしくは右辺のみに現れる変数 $x \in \mathcal{V}ar(r,Cond) \backslash \mathcal{V}ar(l)$ を ρ の**余剰変数**（extra variable）と呼ぶ．R を $\mathcal{F}$ 上

の CTRS とする．すべての規則 ρ: $l \to r \Leftarrow s_1 \to t_1 \wedge \cdots \wedge s_n \to t_n \in R$ に対して，$\mathcal{V}ar(s_1,\ldots,s_n) \subseteq \mathcal{V}ar(l)$ を満たすとき，この CTRS を **1-CTRS** と呼ぶ．CTRS R のすべての規則において，右辺の余剰変数は必ず条件部に現れるとき R を **3-CTRS** と呼び，余剰変数の出現に制限のないときは R を **4-CTRS** と呼ぶ．4-CTRS は CTRS すべてを含むクラスである．よって単に CTRS と表記した場合は 4-CTRS を意味する．条件付き書換え規則 ρ: $l \to r \Leftarrow s_1 \to t_1 \wedge \cdots \wedge s_n \to t_n$ が任意の i について $\mathcal{V}ar(s_i) \subseteq \mathcal{V}ar(l, t_1, \ldots, t_{i-1})$ を満たすとき，ρ は**決定的**であるという．全ての規則が決定的である CTRS を決定的であるという．これは 3-CTRS に対する定義の自然な拡張である．

3　紐解き変換の改良

本節では，$\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に関して同等の書換えをする EV-TRS に変換する紐解き変換 [5],[8] を 1-CTRS を対象とする紐解き変換 [3] を基に改良した変換を与え，これまでの変換と同様に模倣完全性を保つことを示す．

文献 [5],[8] にある紐解き変換を簡単に説明すると，条件付き書換え規則が持つ n 個の条件を，1つずつ順に評価する $n+1$ 個の書換え規則に分解する．以下に，その変換例を与える．ここで，文献 [5],[8] にある紐解き変換については U，本稿で与える紐解き変換については $\mathbb{U}$ と区別することにする．

例 1 次の R_1 は決定的 CTRS である．

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) \to z \Leftarrow G(x) \to w \wedge G(y) \to z \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge H(w,x) \to z, \\ G(x) \to x, \quad H(x,y) \to x \end{array} \right.$$

R_1 は U によって次のように変換される．

$$U(R_1) = \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) \to \mathsf{u}_1(G(x),x,y), \\ \mathsf{u}_1(w,x,y) \to \mathsf{u}_2(G(y),w,x), \\ \mathsf{u}_2(z,w,x) \to \mathsf{u}_3(H(w,x),z), \\ \mathsf{u}_3(z,z) \to z, \\ G(x) \to x, \quad H(x,y) \to x \end{array} \right.$$

規則 ρ の左辺には変数 x, y があるので条件部の $G(x) \to w$ と $G(y) \to z$ は同時に判定することが可能である．よって，この2つの条件部に対して $F(x,y) \to \mathsf{u}'_1(G(x),G(y),x)$，$\mathsf{u}'_1(w,z,x) \to \mathsf{u}'_2(H(w,x),z)$ のような規則を生成することができる．このように，同時に判定できる複数の条件を一度に評価する書換え規則に変換することにより，紐解き変換を改良する．この改良が有効である例は後述する．次に，改良した紐解き変換の定義を与える．以下では，変数の集合 X に対して，$\overrightarrow{X}$ は X の要素を辞書順序によって並べたリストとする．また，n_i 個の項の並び $t_{i,1},\ldots,t_{i,n_i}$ を $\overrightarrow{t_i}$ と略記する．

定義 1 (紐解き変換 $\mathbb{U}$) R を $\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS とする．$\rho : l \to r \Leftarrow \bigwedge_{j=1}^{m_1} s_{1,j} \to t_{1,j} \wedge \cdots \wedge \bigwedge_{j=1}^{m_k} s_{k,j} \to t_{k,j} \in R$ を R の規則とし，以下の条件を満たすとする[1]：

$$\forall i \forall j.\ \mathcal{V}ar(s_{i,j}) \subseteq \mathcal{V}ar(l, \overrightarrow{t_1}, \ldots, \overrightarrow{t_{i-1}}).$$

R の各規則 ρ に対して，$\mathcal{F}$ 上にない記号 $\mathsf{u}^\rho_1,\ldots,\mathsf{u}^\rho_k$ を用意する．l 及び $\overrightarrow{t_1},\ldots,\overrightarrow{t_{i-1}}$ のいずれかに現れる変数のうち，$r, \overrightarrow{t_i}$ もしくは i 番目以降の条件部 $\bigwedge_{j=1}^{m_{i'}} s_{i',j} \to t_{i',j} (i' > i)$ のいずれかに再び現れる変数の集合を X_i $(= \mathcal{V}ar(l, \overrightarrow{t_1}, \ldots, \overrightarrow{t_{i-1}}) \cap \mathcal{V}ar(r, \overrightarrow{t_i}, \ldots, \overrightarrow{t_k}, \overrightarrow{s_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{s_k}))$ とする．このとき，書換え規則の集合 $\mathbb{U}(\rho)$ は次のように定義される：

$$\mathbb{U}(\rho) = \left\{ \begin{array}{r} l \to \mathsf{u}^\rho_1(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{X_1}) \\ \mathsf{u}^\rho_1(\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{X_1}) \to \mathsf{u}^\rho_2(\overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{X_2}) \\ \vdots \\ \mathsf{u}^\rho_k(\overrightarrow{t_k}, \overrightarrow{X_k}) \to r \end{array} \right.$$

$k = 0$ のときは，$\mathbb{U}(\rho) = \{l \to r\}$．$\mathbb{U}$ は CTRS 上に自然に拡張され，$\mathbb{U}(R) = \bigcup_{\rho \in R} \mathbb{U}(\rho)$ とする．$\mathcal{F}$ と $\mathbb{U}$ と R によって定まる関数記号の集合を $\mathcal{F}_{\mathbb{U}(R)} = \mathcal{F} \cup \{\mathsf{u}^\rho_i \mid \rho : l \to r \Leftarrow s_1 \to t_1 \wedge \cdots \wedge s_n \to t_n \in R,\ 1 \le i \le n\}$ とする．□

$\mathbb{U}(R)$ は明らかに $\mathcal{F}_{\mathbb{U}(R)}$ 上の EV-TRS である．$m_1,\ldots,m_k$ がすべて1のとき文献 [5],[8] の変換と等価であり，すべての ρ について $k = 1$ のとき文献 [3] の 1-CTRS のための変換とほぼ等価である．本稿では，$\mathbb{U}(\rho)$ の規則の数が少なくなることを目指しているので，すべての $i\ (> 1)$ に対して $\mathcal{V}ar(\overrightarrow{s_i}) \not\subseteq \mathcal{V}ar(l, \overrightarrow{t_1}, \ldots, \overrightarrow{t_{i-2}})$ を仮定する．

例 2 例1の R_1 は $\mathbb{U}$ によって次のように変換される．

$$\mathbb{U}(R_1) = \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) \to \mathsf{u}_4(G(x),G(y),x), \\ \mathsf{u}_4(w,z,x) \to \mathsf{u}_5(H(w,x),z), \\ \mathsf{u}_5(z,z) \to z, \\ G(x) \to x, \quad H(x,y) \to x \end{array} \right.$$

[1] 任意の決定的な条件付き書換え規則は上記の条件を満たすように条件部を並び替えることができる．

文献 [5],[8] の変換では6個の規則に分解されたが，本稿の紐解き変換では5個で済む．

最後に，CTRS R と本稿の変換で得られる EV-TRS $\mathbb{U}(R)$ の書換えの等価性について議論する．R を $\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS とする．任意の $\mathcal{F}$ 上の項 $s,t \in \mathcal{V}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ について，$s \xrightarrow{*}_{\mathbb{U}(R)} t$ ならば $s \xrightarrow{*}_R t$ であるとき，$\mathbb{U}$ は R に対して**模倣健全**であるという．また，$s \xrightarrow{*}_{\mathbb{U}(R)} t$ かつ，そのときに限り $s \xrightarrow{*}_R t$ であるとき，$\mathbb{U}$ は R に対して**模倣完全**であるという．$\mathbb{U}$ が模倣完全であれば CTRS R と EV-TRS $\mathbb{U}(R)$ の書換えは等価であると言える．

しかし，$\mathcal{F}$ 上の CTRS R と変換 $\mathbb{U}$ によって得られる EV-TRS $\mathbb{U}(R)$ とでは $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上に関して完全に書換えが等しくなるわけではない [3]．これは1つの条件付き書換え規則に含まれるそれぞれの変数について，条件部も含め同じ変数ならばすべて等しいはずなのだが，紐解き変換によって複数の書換え規則に分けられてしまうことが原因である．そこで，文脈依存条件 [2] と所属制約条件 [6] を用いて EV-TRS の書換えに制限を与えると書換えが等しくなる [4]．**文脈依存条件**は関数記号から自然数の集合への写像であり，全ての関数記号に対して書換え可能な引数の位置を決定する．**所属制約条件**はリデックスの部分項が所属する集合を指定し，書換えを制限する．以下に，文脈依存書換えの定義を与える．

定義 2 ([2]) R を $\mathcal{F}$ 上の EV-CTRS とする．$\mathcal{F}$ について，**文脈依存条件** μ はすべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(f) = \{i_1,\ldots,i_n\}$，$1 \le n \le \mathsf{arity}(f)$，$1 \le i_j \le \mathsf{arity}(f)$ とする．さらに，項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，$\mathcal{O}_\mu(t)$ は以下のように再帰的に定義される：

- $\mathcal{O}_\mu(x) = \emptyset$ ただし，x は変数，
- $\mathcal{O}_\mu(f(t_1,\ldots,t_n))=\{i_jq \mid 1 \le j \le m, q \in \mathcal{O}_\mu(t_{i_j})\}$ ただし，$f \in \mathcal{F}$，$\mu(f) = \{i_1,\ldots,i_m\}$．

文脈依存項書換え系を R と文脈依存条件 μ の組として (R,μ) のように表現することにする．このとき，$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上での書換え関係 $\to_{(R,\mu)}$ は $\to_{(R,\mu)} = \{\ (s,t) \mid s \to^p_R t, p \in \mathcal{O}_\mu(s)\ \}$ のように定義される． □

紐解き変換 $\mathbb{U}$ が模倣完全であるためには定義1中の $\mathbb{U}(R)$ に対して，文脈依存条件 μ を (1) すべての $\mathsf{u}^\rho_j \in \mathcal{F}_{\mathbb{U}(R)} \backslash \mathcal{F}$ に対して $\mu(\mathsf{u}^\rho_j) = \{1,\ldots,m_k\}$ とし，(2) すべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(f) = \{1,\ldots,\mathsf{arity}(f)\}$ とする．さらに，所属制約条件として，リデックスの真部分項に関数記号 u^ρ_j が出現した場合は書き換えてはならないとすればよい [4]．$\mathcal{F}$ 上の CTRS R に対して，$\mathbb{U}(R)$ と模倣完全のための条件である文脈依存条件の組を $\mathbb{U}_\mu(R) = (\mathbb{U}(R),\mu)$ と表現することにする．

例 3 例2の $\mathbb{U}(R_1)$ において文脈依存条件 μ は，$\mu(F) = \{1,2\}$，$\mu(G) = \{1\}$，$\mu(H) = \{1,2\}$，$\mu(\mathsf{u}_4) = \{1,2\}$，$\mu(\mathsf{u}_5) = \{1\}$ となる．

例2の $\mathbb{U}(R_1)$ の書換えは，例3の μ を考慮することによって R_1 の書換えと等しくなる．

$\mathbb{U}$ が任意の R に対して $s \xrightarrow{*}_R t$ ならば $s \xrightarrow{*}_{\mathbb{U}_\mu(R)} t$ であることは $\mathbb{U}$ の定義より明らかである．よって，$\mathbb{U}$ の模倣健全性のみを示す．

定理 1 ($\mathbb{U}$ の模倣健全性) R を $\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS とする．このとき，$\mathcal{F}$ 上の任意の項 $s,t \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ について，$s \xrightarrow{*}_{\mathbb{U}_\mu(R)} t$ ならば $s \xrightarrow{*}_R t$． □

略証 $s \xrightarrow{k}_{\mathbb{U}_\mu(R)} t$ のステップ数 k に関する帰納法により示される． □

定理1より次が得られる．

系 1 紐解き変換 $\mathbb{U}$ は μ による文脈依存書換え上で模倣完全である． □

4 文脈依存条件の除去

本節では，$\mathbb{U}_\mu(R)$ から文脈依存条件を緩和するための変換方法を示す．紐解き変換を行うと元の規則には含まれていなかった新たな関数記号ができる．この新たな関数記号に関して，同じ関数記号を含む書換え規則は $\mathbb{U}_\mu(R)$ の中に，左辺に現れる規則，右辺に現れる規則のそれぞれ1つずつしか存在しない．この2つの書換え規則をまとめ，1つの規則にすることによって新しく生成された関数記号の数を減らすような変換を示す．$\mathcal{F}$ 上の EV-TRS において，すべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(f) = \{1,\ldots,\mathsf{arity}(f)\}$ となっているとき，文脈依存条件が**除去**されたと呼ぶことにする．なお，所属制約条件については u^ρ_j の存在に依存するので，本稿においては議論しないことにする．

まず，変換の直感的な考え方を説明する．次の TRS は規則 $\rho_1 : f(x,y) \to z \Leftarrow g(x) \to w \wedge f(w,y) \to z$

を紐解き変換した後に得られるものである．

$$\mathbb{U}(\rho_1) = \begin{cases} f(x,y) \to \mathsf{u}_6(g(x),y), \\ \mathsf{u}_6(w,y) \to \mathsf{u}_7(f(w,y)), \\ \mathsf{u}_7(z) \to z \end{cases}$$

新たに生成された関数記号 $\mathsf{u}_6, \mathsf{u}_7$ に対する文脈依存条件は $\mu(\mathsf{u}_6) = \{1\}$，$\mu(\mathsf{u}_7) = \{1\}$ である．$\mathbb{U}(\rho)$ の書換え規則について，$\mathsf{u}_6, \mathsf{u}_7$ はここにしか出現せず，u_6 や u_7 から書換えが始まることはない．よって，この３つの書換え規則は $f(x,y) \to f(g(x),y)$ のように１つの規則で表すことができ，新しく生成された関数記号はなくなる．つまり，書換えに制限が無く文脈依存条件は除去されたことになる．

もう少し複雑な例を考える．次の TRS は規則 ρ_2 : $f(x,y) \to z \Leftarrow g(x) \to w \wedge g(y) \to z \wedge h(w,x) \to z$ を紐解き変換した後に得られるものである．

$$\mathbf{U}(\rho_2) = \begin{cases} f(x,y) \to \mathsf{u}_8(g(x),g(y),x), \\ \mathsf{u}_8(w,z,x) \to \mathsf{u}_9(h(w,x),z), \\ \mathsf{u}_9(z,z) \to z \end{cases}$$

新たに生成された関数記号に対する文脈依存条件は $\mu(\mathsf{u}_8) = \{1,2\}$，$\mu(\mathsf{u}_9) = \{1\}$ である．上の場合と同様に考えると，$\mathbb{U}(\rho_2)$ の上２つの規則は $f(x,y) \to \mathsf{u}_9(h(g(x),x),g(y))$ と書くことが出来る．このとき，$\mu(\mathsf{u}_8) = \{1,2\}$ であったので u_9 の変数 z の位置も書き換えられてよくなる．つまり，$\mu(\mathsf{u}_8) = \{1,2\}$ となる．この場合，u_9 は残ったままだが文脈依存条件に関しては制限がなくなる．このように，紐解き変換によって生成された新しい関数記号 u を含む規則について，書換えの等価性を失わないように２つの規則を１つに変換していく．以下に，文脈依存条件を除去するための変換を与える．

定義 3 (変換 T) R を $\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS とする．R を紐解いた結果が $\mathbf{U}_\mu(R)$ であるとき，書換え規則の集合 R_i とそれに対応する文脈依存条件 μ_i を次のように再帰的に定義する：

(1) $R_0 = \mathbf{U}(R)$，$\mu_0 = \mu$，[2]

(2) $R_i = R' \cup \{l \to \mathsf{u}^\rho_j(s_1,\ldots, s_n),\ \mathsf{u}^\rho_j(t_1,\ldots, t_n) \to r\}$ のとき，$\mathsf{u}^\rho_j(s_1,\ldots, s_n) \equiv \mathsf{u}^\rho_j(t_1,\ldots, t_n)\delta$ を満たす代入 δ が存在[3]し，かつ $\mathsf{root}(r) = \mathsf{u}^\rho_m$ のときは，$\mu_i(\mathsf{u}^\rho_m)$ で定まる書き換えてよい位置とそうでない位置で，$\mathcal{D}om(\delta)$ の変数を共有していない，すなわち，$\mathcal{D}om(\delta) \cap (\bigcup_{k \in \mu_i(\mathsf{u}^\rho_m)} \mathcal{V}ar(r|_k) \cap \bigcup_{k \notin \mu_i(\mathsf{u}^\rho_m)} \mathcal{V}ar(r|_k)) = \emptyset$ ならば，$R_{i+1} = R' \cup \{l \to r\delta\}$ とし，さらに μ_{i+1} を以下のように与える．

  (i) $\mathsf{root}(r) = \mathsf{u}^\rho_m$ のとき，すべての $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{U}(R)} \setminus \{\mathsf{u}^\rho_m\}$ に対して $\mu_{i+1}(f) = \mu_i(f)$ とし，u^ρ_m に対しては $\mu_{i+1}(\mathsf{u}^\rho_m) = \mu_i(\mathsf{u}^\rho_m) \cup \{p \mid r|_p \in \bigcup_{p' \in \mu_i(\mathsf{u}^\rho_j)} \mathcal{V}ar(\mathsf{u}^\rho_j(t_1,\ldots,t_n)|_{p'}),\ \not\exists\ q \in \mu_i(\mathsf{u}^\rho_m),\ q < p)\}$ とする．

  (ii) それ以外のとき，$\mu_{i+1} = \mu_i$ とする．

また，R_i と μ_i の組 (R_i, μ_i) を $\mathbb{T}_i(\mathbf{U}_\mu(R))$ と表現し，$\mathbb{T}_k(\mathbb{U}_\mu(R)) = \mathbb{T}_{k+1}(\mathbb{U}_\mu(R))$ のとき $\mathbf{T}(\mathbf{U}_\mu(R)) = \mathbb{T}_k(\mathbb{U}_\mu(R))$ とする． □

$\mu_{i+1}(\mathsf{u}^\rho_m)$ の作り方が上の定義でうまくいくのは，$\mu_i(\mathsf{u}^\rho_m)$ に無い位置（書換えが禁止されている引数）には変数しか現れないからである．また，上記の変換が停止するのは明らかである．なぜなら，(2) は u^ρ_j の記号それぞれにたかだか１回しか行なわれないからである．

例 4 例2の $\mathbf{U}(R_1)$ は $\mathbf{T}$ によって次のように変換される．

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}(R_1)) = \begin{cases} F(x,y) \to \mathsf{u}_5(H(G(x),x),G(y)) \\ \mathsf{u}_5(z,z) \to z \\ G(x) \to x \\ H(x,y) \to x \end{cases}$$

文脈依存条件は $\mu(F) = \{1,2\}$，$\mu(G) = \{1\}$，$\mu(H) = \{1,2\}$，$\mu(\mathsf{u}_5) = \{1,2\}$ となり $\mathbf{T}(\mathbf{U}(R_1))$ には書換えの制限がなく，通常の TRS と同様に扱うことができるようになっている．つまり，文脈依存条件は除去された．ただし，u_5 が残っているので所属制約条件は必要である．

定義 3 (2) にある条件は書換えの等価性を保つために必要である．つまり，この条件を満たさないような場合では変換 $\mathbf{T}$ によって文脈依存条件を除去することが出来ない．

例 5 次の R_2 は決定的 CTRS である．

$$R_2 = \begin{cases} h(b) \to c, \quad a \to b, \quad a \to c, \\ f(x) \to g(y) \Leftarrow a \to y \wedge h(y) \to y \end{cases}$$

R_2 は $\mathbf{U}$ によって次のように変換されるが，変換 $\mathbf{T}$ によって文脈依存条件を除去することが出来ない．

$$\mathbf{U}(R_2) = \begin{cases} h(b) \to c, \quad a \to b, \quad a \to c, \\ f(x) \to \mathsf{u}_{10}(a), \quad \mathsf{u}_{10}(y) \to \mathsf{u}_{11}(h(y),y), \\ \mathsf{u}_{11}(y,y) \to g(y) \end{cases}$$

---

[2]すべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(f) = \mu'(f)$ となる場合，これを $\mu = \mu'$ と書く．

[3]$\mathcal{D}om(\delta) \subseteq (\bigcup_{k \in \mu_i(\mathsf{u}^\rho_j)} \mathcal{V}ar(t_k)) \setminus (\bigcup_{k \notin \mu_i(\mathsf{u}^\rho_j)} \mathcal{V}ar(t_k))$，すなわち，すべての $k \notin \mu_i(\mathsf{u}^\rho_j)$ に対して $s_k \equiv t_k$ とする．

文脈依存条件は $\mu(\mathsf{u}_{10}) = \{1\}$，$\mu(\mathsf{u}_{11}) = \{1\}$ である．もし，定義 3 (2) の条件を無視して以下の TRS R_3 を得ても，模倣完全性は失われる．

$$R_3 = \begin{cases} h(b) \to c, \quad a \to b, \quad a \to c, \\ f(x) \to \mathsf{u}_{11}(h(a), a), \quad \mathsf{u}_{11}(y, y) \to g(y) \end{cases}$$

例えば，項 $f(b)$ を $\mathbb{U}_\mu(R_2)$ と R_3（$\mu'(\mathsf{u}_{11}) = \{1,2\}$ である）のそれぞれで書き換えてみる．$\mathbb{U}_\mu(R_2)$ では関数記号 u_{11} を含む項で書換えが終わってしまう．これに対して R_3 では $g(c)$ となり書換えが成功してしまい，$\mathbb{U}_\mu(R_2)$ での書換えとは違う結果が得られる．つまり模倣完全性は失われている．

以下では，EV-TRS $\mathbb{U}(R)$ と EV-TRS $\mathbf{T}(\mathbb{U}(R))$ の書換えの等価性について議論していく．書換えが等しいことを示すには，$\mathbf{T}$ が $\mathbb{U}(R)$ に対して模倣完全であることを示せばよい．そこで，以下の２つの補題を与える．

補題 1 R を $\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS とする．このとき，$\mathcal{F}$ 上の任意の項 $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ について $s \xrightarrow{*}_{\mathbf{T}_i(\mathbb{U}_\mu(R))} t$ ならば，$s \xrightarrow{*}_{\mathbf{T}_{i+1}(\mathbb{U}_\mu(R))} t$． □

略証 $s \xrightarrow{k}_{\mathbf{T}_i(\mathbb{U}_\mu(R))} t$ のステップ数 k と s の構造の辞書式順序に関する帰納法により示される． □

補題 2 (T の模倣健全性) R を $\mathcal{F}$ 上の決定的 CTRS とする．このとき，$\mathcal{F}$ 上の任意の項 $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ について $s \xrightarrow{*}_{\mathbf{T}_{i+1}(\mathbb{U}_\mu(R))} t$ ならば，$s \xrightarrow{*}_{\mathbf{T}_i(\mathbb{U}_\mu(R))} t$． □

略証 $s \xrightarrow{k}_{\mathbf{T}_{i+1}(\mathbb{U}_\mu(R))} t$ のステップ数 k と s の構造の辞書式順序に関する帰納法により示される． □

定理 2 $\mathbf{T}(\mathbb{U}_\mu(\cdot))$ は模倣完全である． □

略証 補題 1,2 により示される． □

最後に，本稿で提案した変換が有用であることを示す例を挙げる．次は，U と $\mathbb{U}$ では $\mathbf{T}$ を適用した結果が異なる例である．

例 6 規則 $\rho : f(x, y) \to x \Leftarrow g(x) \to x \wedge g(y) \to x$ は U,$\mathbb{U}$ によって次のように変換される．

$$U(\rho) = \begin{cases} f(x, y) \to \mathsf{u}_{12}(g(x), x), \\ \mathsf{u}_{12}(x, x) \to \mathsf{u}_{13}(g(y), x), \\ \mathsf{u}_{13}(x, x) \to x \end{cases}$$

$$\mathbb{U}(\rho) = \begin{cases} f(x, y) \to \mathsf{u}_{14}(g(x), g(y), x), \\ \mathsf{u}_{14}(x, x, x) \to x \end{cases}$$

どちらも変換 $\mathbf{T}$ によって変化はない．

このような場合も考えられるので，本稿で示した細解き変換の改良が規則の簡単化に有効であることがわかる．

次の R_4 は文献 [4] の方法を使って乗算プログラムから得た除算の CTRS の一部である．

$$R_4 = \begin{cases} \mathsf{div}(\mathsf{s}(z), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{tp}_1(\mathsf{s}(x)) \\ \quad \Leftarrow z - y \to \mathsf{tp}_1(w) \\ \quad\quad \wedge\ \mathsf{div}(w, \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{tp}_1(x), \\ \quad\quad\quad \vdots \end{cases}$$

ここで，tp_n は n 個の項の組を表すための関数記号であり，$n = 1$ のときは $\mathsf{tp}_1(t)$ を単に t としても直感的には問題ないと考えられる．このように考えた場合，R_4 は $\mathbb{U}$ と $\mathbf{T}$ によって次のように変換される．

$$\mathbf{T}(\mathbb{U}(R_4)) = \begin{cases} \mathsf{div}(\mathsf{s}(z), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(z - y, \mathsf{s}(y))), \\ \quad\quad \vdots \end{cases}$$

本稿の変換を利用することで，今までのものよりかなり簡潔となった除算の TRS が得られ，これは代表的な除算の規則に一致する．

次に，文献 [7] で得られている結果と本研究で提案した変換 $\mathbf{T}$ の比較を行なう．文献 [7] より，文献 [4],[8] の細解き変換 U について，次の条件のどちらかを満たすとき，模倣完全である．

- 生成した TRS が右線形かつ変数非消去 (non-erasing) である．
- 生成した TRS が左線形である．

ただし，左線形の場合には右辺のみに現れる変数に代入されて現れた項の部分項は書き換えられていないとする．そこで，次の例を考えてみる．

例 7 規則 $\rho : f(x, x) \to g(z, z, x) \Leftarrow h(x) \to z$ は u によって次のように変換される．

$$U(\rho) = \begin{cases} f(x, x) \to \mathsf{u}_{15}(h(x), x), \\ \mathsf{u}_{15}(z, x) \to g(z, z, x) \end{cases}$$

$U(\rho)$ は文献 [7] で示されている条件をどちらも満たしていないため，例 7 の結果は文脈依存条件として $\mu(\mathsf{u}_{15}) = \{1\}$ を定めなければ模倣完全性を保つことができない．次に，本研究で提案した変換 $\mathbf{T}$ を $U(\rho)$ に適用してみる．

例 8 $U(\rho)$ は $\mathbf{T}$ によって次のように変換される．

$$\mathbf{T}(U(\rho)) = \{\ f(x, x) \to g(h(x), h(x), x)$$

このようになり，文脈依存条件を除去することに成功した．よって，文献 [7] で得られた結果では模倣完全性を保つために文脈依存条件を与えなくてはならない場合でも，本研究の変換 𝕋 によって文脈依存条件を除去することができる．

5 おわりに

本稿では，決定的 CTRS を対象とする紐解き変換 [5],[8] と 1-CTRS を対象とする紐解き変換 [3] を基に決定的 CTRS を対象とする紐解き変換を改良した．改良した紐解き変換の利点として，生成される規則の数の減少が挙げられる．さらに，紐解き変換によって得られる TRS の書換えと変換前の CTRS の書換えが等しくなるなるための文脈依存条件について述べ，その文脈依存条件を除去するための変換を与えた．

今後の課題として，文脈依存条件と所属制約条件を考えない場合において，紐解き変換が模倣完全であるための条件について解析することが挙げられる．文献 [7] には紐解き変換が模倣完全であるための２つの条件が示されている．１つは生成した TRS が右線形かつ変数非消去 (non-erasing) であること，もう１つは生成した TRS が左線形であることである．ただし，左線形の場合には右辺のみに現れる変数に代入されて現れた項の部分項は書き換えられていないとする．この条件は改良した紐解き変換についても成り立つと考えている．

本稿では議論しなかった所属制約条件に関して，例 4 のような場合に，所属制約条件が必要であるかどうかの議論も今後の課題である．

また，本稿で定義した変換 𝕋 では変換の順番については考えられていない．変換の順番をかえることで文脈依存条件の除去の可否が変化するかもしれない．これについて考えることも課題の１つである．

謝辞 本研究は一部，科研費#15500007，#16650005，#17700009 の補助を受けている．

文献

[1] F. Baader and T. Nipcow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[2] S. Lucas. Context-sensitive computations in functional and functional logic programs. *Journal of Functional and Logic Programing*, pp. 1–61, 1998.

[3] M. Marchiori. Unravelings and ultra-properties. *Proc. 5th Int. Conf. on Algebraic and Logic Programing*, Vol. 1139 of LNCS, pp. 107–121, 1996.

[4] N. Nishida, M. Sakai, and T. Sakabe. Partial inversion of constructor term rewriting systems. *In Proceedings of the 16th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, Vol. 3467 of LNCS, pp. 264–278, 2005.

[5] E. Ohlebusch. *Advanced Topic in Term Rewiting.* Springer, 2002.

[6] Y. Toyama. Confluent term rewriting systems with membership conditions. *In Proceedings of the 1th International Workshop on Conditional Term Rewriting Systems*, Vol. 308 of LNCS, pp. 228–241, 1987.

[7] 西田直樹，酒井正彦，坂部俊樹．On simulation-completeness of unraveling for conditional term rewriting systems. 信学技報 SS2004-18，電子情報通信学会，Vol. 104, No. 243, pp. 25–30, 2004.

[8] 西田直樹，酒井正彦，坂部俊樹．構成子項書換え系の逆計算プログラムの生成．電子情報通信学会論文誌 D-I, Vol. J88–D–I, No. 8, pp. 1171–1183, 2005.