

## フーリエ積分作用素の有界性と PDE への応用

杉本 充 (MITSURU SUGIMOTO) \*

### 1. 序

フーリエ積分作用素の理論は、1970年代初頭に Hörmander ら ([Hör], [DH]) により確立された。これを偏微分方程式論 (PDE) に応用した研究も数限りなく存在するが、それらを包括的に概説するのが本稿の目的ではない。そのような論説が書ければ望ましいには違いないが、筆者の非才からこれはもとより不可能な事である。その点をご容赦願いたい。

しかしながら筆者は、最近の Michael Ruzhansky (Imperial College) との共同研究により、シュレディンガー方程式の平滑化作用の問題に関して、フーリエ積分作用素を用いた新しい方法論を考案した ([RS1], [RS2], [RS3], [RS4])。そのアイデアには汎用性があり、他の PDE の諸問題に対しても有効であるものと期待している。本稿では、この方法論を説明することを主目的としたい。

この考え方を具現化する際、フーリエ積分作用素の具体的な関数空間での有界性が重要な役割を果たしている。しかしながらこの有界性の問題は、フーリエ積分作用素論の整備の過程において常に後回しとされてきた課題である。これまでその重要性が十分には認識されてこなかったこと、あるいは証明の道具が十分に開発されていなかったことなどが原因と考えられる。例えば、フーリエ積分作用素の  $L^p$ -有界性が示されるには、1991年の Seeger, Sogge & Stein [SSS] の仕事を待たなければならなかった。このような基本的な問題が解決されるのでさえ、フーリエ積分作用素が誕生してから20年を要しているのである。

いずれにせよ、調和解析に関する多くの優れた手段が知られている現在において、もう少し有界性の理論の整備が進んでいくべきである。実際、これから紹介する筆者らの最近の共同研究においても、大域的  $L^2$ -有界性が成立するクラスでのフーリエ積分作用素の理論を新たに構築する必要にせまられた。このあたりの事情も解説したい。

本稿のプランであるが、まず第2節～第4節においてフーリエ積分作用素論に関する一般的な考え方を説明したい。正確な定義や条件を述べる事はあえて避けるが、これら基本的な事項に触れておくことにより、本稿における以降の理解が容易となる。より詳しくは、Duistermaat [Du] などのすぐれた解説書が存在するので、そちらを参照していただきたい。引き続き第5節～第7節では、この考え方をを用いてシュレディンガー方程式の平滑化作用を調べる方法について述べる。第8節～第9節で、問題に即した限定的状況においてではあるが、上述のフーリエ積分作用素論に関する一般的な考え方を厳密に定式化する方法について述べる。最後にその応用として、第10節においてシュレディンガー方程式の平滑化作用について再論し、その古典軌道とのかわりについて模索してみたい。

偏微分方程式論における方法論が展開されていく上で、本稿が何らかの形で貢献できることを筆者としては願っている。

\* 大阪大学大学院・理学研究科 (Graduate School of Science, Osaka University) .

## 2. フーリエ積分作用素とは

フーリエ積分作用素とは何であるかについて、簡単に説明しておこう。

- ・  $X \subset \mathbf{R}^{n_1}, Y \subset \mathbf{R}^{n_2} \dots$  開集合,
- ・  $\phi(x, y, \xi) \in C^\infty(X \times Y \times \mathbf{R}^N) \dots$  Phase (実数値)
- ・  $a(x, y, \xi) \in C^\infty(X \times Y \times \mathbf{R}^N) \dots$  Amplitude,

として、作用素

$$Tu(x) = \int_Y \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\phi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi \quad (x \in X)$$

を定義する。この  $T$  をフーリエ積分作用素と呼ぶことにする。ここで、右辺の積分はいつでも絶対収束するとは限らないが、振動する因子  $e^{i\phi(x, y, \xi)}$  による打ち消しあいにより、積分の値が定まっていると解釈する：

$$Tu(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_Y \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\phi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) \rho(\varepsilon\xi) u(y) dy d\xi.$$

ここで  $\rho$  は  $\mathbf{R}^N$  の原点の cut-off. この解釈は、phase と amplitude がしかるべきクラスに属しているときには正当化され、連続な作用素

$$T: \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{E}(X)$$

として与えられる。ここで

- ・  $\mathcal{D}(Y) \dots Y$  上にコンパクト台をもつ滑らかな関数全体,
- ・  $\mathcal{E}(X) \dots X$  上で滑らかな関数全体,

であり、それぞれにはしかるべき位相が与えられている。また、 $T$  の双対作用素

$$T': \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$$

も同様に、

$$T'v(y) = \int_X \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\phi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) v(x) dx d\xi \quad (y \in Y)$$

と定義されるが、これを用いることにより  $T: \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{E}(X)$  を

$$T: \mathcal{E}'(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$$

にまで拡張することができる。実際

$$\langle Tu, v \rangle_{\mathcal{D}'(X) \times \mathcal{D}(X)} = \langle u, T'v \rangle_{\mathcal{E}'(Y) \times \mathcal{E}(Y)} \quad (u \in \mathcal{E}'(Y), v \in \mathcal{D}(X))$$

と定義すればよい。ここで

- ・  $\mathcal{E}'(Y) \dots Y$  上にコンパクト台をもつ distribution 全体,
- ・  $\mathcal{D}'(X) \dots X$  上の distribution 全体

であり、それぞれ  $\mathcal{E}(Y)$  および  $\mathcal{D}(Y)$  の双対空間とみなすことができる。

## 例 1. 波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)u(t, x) = 0, \\ u(0, x) = 0, \\ \partial_t u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

の解は,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= F_\xi^{-1} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} F_x f(x) \\ &= F_\xi^{-1} \frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|} F_x f(x) \\ &= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int \int e^{i((x-y)\cdot\xi + t|\xi|)} \frac{1}{|\xi|} f(y) dy d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int \int e^{i((x-y)\cdot\xi - t|\xi|)} \frac{1}{|\xi|} f(y) dy d\xi \end{aligned}$$

とフーリエ積分作用素として表現できる。ここで, phase は

$$\phi(t, x, y, \xi) = (x - y) \cdot \xi \pm t|\xi|$$

であり, amplitude は

$$a(\xi) = |\xi|^{-1}$$

である。一般に「双曲型」方程式の初期値問題の解は, 適当な phase と amplitude を用いて, フーリエ積分作用素で表示することが出来る。

## 3. フーリエ積分作用素から読み取れる事

例1のように解をフーリエ積分作用素で表示することにより, それから何が読み取れるであろうか? ここでは, 波動方程式の初期値問題の場合によく知られた

- 有限伝播性 … 時刻  $t$ , 位置  $x_0$  での解の状態は, 初期値の  $|x - x_0| \leq t$  をみたく位置  $x$  での状態のみから定まる。

• エネルギー保存則 … 解の持つエネルギーは初期値のエネルギーを越えない。という二つの性質に焦点を当ててみよう。これらは, フーリエ積分作用素の持つ一般的性質からも説明することができる。以下, このことについて簡単に説明したい。

特異性の伝播. まず最初に

$$\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{E}'(X)$$

に注意しておく。すなわち, 滑らかな関数は超関数の特別な場合である。一方, 滑らかな関数をそれ以外の超関数と区別するには, そのフーリエ像を調べてみるとよい。実際, 超関数  $u \in \mathcal{E}'(X)$  の特異性は, そのフーリエ像  $\hat{u}$  の増大度により特徴付けられる:

$u \in \mathcal{D}(X)$  ならば  $\hat{u}(\xi)$  は急減少.

$u \in \mathcal{E}'(X)$  ならば  $\hat{u}(\xi)$  は緩増加.

これらの中間的状況として,  $\hat{u}(\xi)$  が, ある conic な集合

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$$

においてのみ緩増加し、それ以外では急減少となっている場合が考えられる。このような場合においては、もちろん  $u$  は滑らかな関数ではありえないが、その特異性はフーリエ像の  $\Gamma$  方向での挙動にのみ由来し、その影響を除けば  $u$  は滑らかであるものと解釈できる。

以上のことをふまえて、 $u \in \mathcal{D}'(X)$  に対し、その wave front set

$$\text{WF}(u) \subset T^*X \setminus 0 \simeq X \times \mathbb{R}^n \setminus 0$$

の概念を導入しよう。  $(x, \xi) \notin \text{WF}(u)$  とは、  $u$  を  $x$  のある近傍で cut-off したもののフーリエ像が、  $\xi$  のある conic な近傍で急減少する事をいう。ここまでの説明から

$$\pi: T^*X \ni (x, \xi) \mapsto x \in X$$

を自然な射影として

$$\pi(\text{WF}(u)) = \text{sing supp}(u)$$

が成立することが容易に理解できるであろう。  $\text{sing supp}(u)$  とは、  $X$  から  $u$  が滑らかである点を除いたもの全体の集合 ( $u$  の特異台) のことである。したがって、  $\text{WF}(u)$  とは  $u$  の特異性の位置と、そこでの特異性の要因となっている方向とをペアにして表記した集合であるといえる。

さて、フーリエ積分作用素  $T$  の phase  $\phi(x, y, \xi)$  に対し、集合

$$C_\phi = \{(x, \phi_x, y, -\phi_y); \phi_\xi = 0\} \subset T^*X \times T^*Y$$

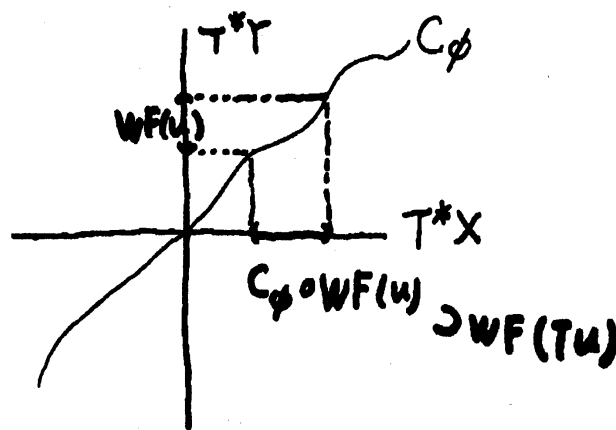
を考える。これを  $T$  に対応する Lagrange 多様体という。このとき (適当な条件の下)

$$\text{WF}(Tu) \subset C_\phi \circ \text{WF}(u)$$

が成立することが知られている。ただし

$$C_\phi \circ \text{WF}(u) = \{(x, \xi); \exists (y, \eta) \in \text{WF}(u) \text{ s.t. } (x, \xi, y, \eta) \in C_\phi\}$$

の意味である。すなわち  $C_\phi$  は、  $T$  が wave front set をどのように移すかを示すグラ



フに相当する。例えば、例1において波動方程式の初期値問題の解が

$$\phi(t, x, y, \xi) = (x - y) \cdot \xi \pm t|\xi|$$

を phase とするフーリエ積分作用素で表現されることをみたが、このとき (時刻  $t$  を固定するごとに)

$$\begin{aligned} C_\phi &= \left\{ (x, \xi, y, \xi); x - y \pm t \frac{\xi}{|\xi|} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left( y \mp t \frac{\xi}{|\xi|}, \xi, y, \xi \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。この集合から、初期データの位置  $y$  における  $\xi$  方向への特異性が、時刻  $t$  では位置  $y \mp t \frac{\xi}{|\xi|}$  に伝播することが読み取れる。この事実は、この節の冒頭に述べた波動方程式の有限伝播性に対応している。(さらに、「波動の粒子性」を数学的に述べているのだとの解釈も成立する。)

**正則度.** フーリエ積分作用素の様々な関数空間上での有界性を調べる事により、これで記述されている関数の正則度を知る事が出来る。ここで「正則度」とは、「滑らかさの度合い」を意味するものとする。(あるいは「regularity property」といった方が適切かもしれない。) これに関しては、対応する Lagrange 多様体  $C_\phi$  に対する以下の条件の下で調べられている:

- (Local graph condition) :  $C_\phi$  の  $T^*X$  および  $T^*Y$  への自然な射影は、局所的に微分同相。

Local graph condition が満たされているときは、 $\dim X = \dim Y (=: n)$  でなくてはならないことがわかる。またこの条件は、 $C_\phi$  が局所的にある関数  $\chi(x, \xi)$  のグラフの形

$$\{(x, \xi, y, \eta); (y, \eta) = \chi(x, \xi)\}$$

にかけることを意味している。このとき  $\chi(x, \xi)$  は正準変換とよばれている。さらに、この条件は

$$D(\phi) = \begin{pmatrix} \phi_{xy} & \phi_{x\xi} \\ \phi_{\xi y} & \phi_{\xi\xi} \end{pmatrix}$$

とおいたときに

$$\phi_{\xi\xi} = 0 \text{ ならば } \det D(\phi) \neq 0$$

である事とも同値である。

Phase  $\phi(x, y, \xi)$  は  $\xi$  に関して一次斉次でかつ local graph condition をみたし、また amplitude  $a(x, y, \xi)$  が  $\xi$  に関して  $m$  次の振る舞いをするとき、対応するフーリエ積分作用素  $T$  は以下の有界性を持つことが知られている:

- Hörmander [Hör].
  - $m \leq 0$  ならば  $T : L^2_{comp}(Y) \rightarrow L^2_{loc}(X)$ .
- Seeger, Sogge & Stein [SSS].
  - $1 < p < \infty$  かつ  $m \leq -(n-1)|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$  ならば  $T : L^p_{comp}(Y) \rightarrow L^p_{loc}(X)$
  - $m \leq -(n-1)/2$  ならば  $T : Lip_{comp}(Y) \rightarrow Lip_{loc}(X)$

これらの結果において、 $m$  の臨界指数は最良である事も知られている。

例えば、この結果を例1における波動方程式の初期値問題に適用してみると、初期値の「正則度」に応じて解の「正則度」が定まる関係が読み取れる。特に Hörmander の  $L^2$  有界性を適用した結果は、波動方程式のエネルギー保存則に対応している。

問題提起. 余談になるが, 以上のことをふまえて, 以下の問題を考えるのは自然なことのように思えてくる:

- Lagrange 多様体は, 特異性の伝播などの定性的性質のみならず, 正則度などの定量的な性質をも記述しているか? だとすれば, これをどのようにして抽出するか?

実際,  $X = Y = \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  として phase と amplitude が

$$\begin{aligned}\phi(x, y, \xi) &= (x - y) \cdot \xi + \varphi(\xi), \\ a(x, y, \xi) &= (1 + |\xi|^2)^{m/2}\end{aligned}$$

である場合に考えてみる. この phase から定まる Lagrange 多様体は,

$$\begin{aligned}C_\phi &= \{(x, \xi, y, \xi); x - y \pm \nabla\varphi(\xi) = 0\} \\ &= \{(y \mp \nabla\varphi(\xi), \xi, y, \xi)\}\end{aligned}$$

である. このとき, 対応するフーリエ積分作用素  $T$  に関して次の事実が知られている:

Sugimoto [Su1].  $\varphi$  は一次斉次かつ正值で, 超曲面

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n; \varphi(\xi) = 1\}$$

が凸であるものとする. また  $\Sigma$  の接平面の「最大接触次数」を  $\gamma(\Sigma)$  とする. このとき  $1 < p \leq 2$ ,  $1/p + 1/p' = 1$  かつ  $m \leq -(2n - \frac{2(n-1)}{\gamma(\Sigma)})(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$  ならば

$$T: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

また,  $m$  の臨界指数  $-(2n - \frac{2(n-1)}{\gamma(\Sigma)})(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$  は最良である.

この結果が意味するのは,  $\Sigma$  の幾何学的形状から定まる指数  $\gamma(\Sigma)$  が, フーリエ積分作用素の  $L^p$ - $L^{p'}$ -有界性を制御しているという事である. 従って  $\Sigma$  の法線方向を集めた集合

$$\Sigma^* = \{\nabla\varphi(\xi); \xi \in \Sigma\}$$

と  $C_\phi$  との関連性から, Lagrange 多様体が正則度を記述しているのだと言えなくも無い. この研究には続きが存在し,  $\Sigma$  が必ずしも凸では無い場合に対応する結果も知られている ([Su2], [Su3]).

また, 上述の Seeger, Sogge & Stein [SSS] が述べているのは,  $L^p$ -有界性に関しては,  $\Sigma$  の幾何学的形状の影響は及ばないと言うことである. しかしそれでも local graph condition が崩れると,  $L^p$ -有界性に影響が及ぶことにも言及しており, その意味でやはり Lagrange 多様体が正則度にかかわっている. これに関しては, Ruzhansky [Ru] なども参照してもらいたい.

本稿でも第 10 節において, シュレディンガー方程式の平滑化作用と 古典軌道とのかかわりを探ることを通じて, ここでの問題を再び取り扱うことにする.

## 4. Egorov の定理

正準変換を用いた（擬）微分作用素の変換が，フーリエ積分作用素を用いて実現される。これは，本稿における最も重要な考え方である。この節では，これについて説明しておこう。

$X = Y = \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  として，以下の特別な場合のフーリエ積分作用素を考える。

$$A(X, D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} A(x, \xi) u(y) dy d\xi,$$

$$Iu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(x, y, \xi)} u(y) dy d\xi$$

( $x \in \mathbb{R}^n$ ). 前者は，表象  $A(x, \xi)$  に対応する，擬微分作用素である。特に表象が多項式の場合は，微分作用素となる。これらに関して，以下が成立する。

**Egorov の定理.**  $\phi$  が定める Lagrange 多様体が local graph condition を満たし，正準変換  $\chi(x, \xi)$  を定めているものとする。すなわち，局所的に

$$C_\phi = \{(x, \phi_x, y, -\phi_y); \phi_\xi = 0\}$$

$$= \{(x, \xi), \chi(x, \xi)\} \subset T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n$$

であるものとする。この時，（局所的に）

$$I \cdot A(X, D) = B(X, D) \cdot I + (\text{誤差}),$$

$$B(x, \xi) = (A \circ \chi)(x, \xi)$$

が成立する。

作用素  $B(X, D)$  の性質の考察は，（phase をうまく選んで Egorov の定理を用いることにより）簡単な作用素  $A(X, D)$  の考察に帰着されることがある。例えば，特に

$$\phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi)$$

の場合には，

$$Iu(x) = F^{-1}[(Fu)(\psi(\xi))](x)$$

となっているので，関係式

$$I \cdot \sigma(D) = (\sigma \circ \psi)(D) \cdot I$$

が成立する。例えば，一般の正値かつ2次斉次な関数  $a(\xi)$  に対して

$$\sigma(\eta) = |\eta|^2, \quad \psi(\xi) = \sqrt{a(\xi)} \frac{\nabla a(\xi)}{|\nabla a(\xi)|}$$

とおくことにより  $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  となるので，

$$I \cdot (-\Delta) = a(D) \cdot I$$

を得る。さらに，

$$\Sigma = \{\xi; a(\xi) = 1\}$$

の Gaussian curvature が消えてないことを仮定すると，Gauss map

$$\frac{\nabla a}{|\nabla a|} : \Sigma \rightarrow S^{n-1}$$

が global diffeomorphism となることから (例えば Kobayashi & Nomizu [KN] を参照せよ),  $\psi^{-1}$  が存在する. よって,  $I$  において  $\psi$  を  $\psi^{-1}$  にとりかえれば逆作用素  $I^{-1}$  が構成され,

$$a(D) = I \cdot (-\Delta) \cdot I^{-1}$$

となる. Laplacian  $-\Delta$  の諸性質はよく知られているので, この関係式から全く同じ性質が  $a(D)$  に対しても期待できる.

この考え方をを用いて, 様々な偏微分方程式の解の「正則度」を調べたい. そのためには, フーリエ積分作用素  $I$  の (問題に応じた) 様々な関数空間上での有界性を調べておく必要がある事もわかる. 本稿では, これらの事柄を, 主にシュレディンガー方程式の平滑化作用の問題に限定して取り扱う.

### 5. シュレディンガー方程式の平滑化作用

ここではまず, シュレディンガー方程式の平滑化作用とは何かについて説明しておこう. (ポテンシャルが無い場合の) シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_x) u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の解

$$u(t, x) = e^{it\Delta} \varphi(x)$$

は, Plancherel の定理により以下を満たす:

- 時刻  $t$  を固定

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

すなわち, 各時刻における解の空間変数に関する  $L^2$ -ノルムは常に一定で, 初期値の  $L^2$ -ノルムがそのまま保存されている.

一般にシュレディンガー方程式においては, (ポテンシャルによる障害が無い限り) 初期値の特異性は瞬時に遠方に飛び去るものと理解されている. 従って, 解の空間変数に関する滑らかさは, 初期値の滑らかさより増大するものと期待してよい. これをシュレディンガー方程式の平滑化作用と呼ぶのだが, 上の等式からはそれは読み取れない. もっとも, 初期値の無限遠からの特異性も「瞬時に」伝わって来るわけであるから, 完全に滑らかになることもありえない. しかしながら, 解を時刻  $t$  に関して積分して平均を取ってみると, この現象を評価式の形で捉える事ができる:

- 位置  $x$  を固定 ( $n = 1$  の場合)

$$\| |D_x|^{1/2} u(\cdot, x) \|_{L^2(\mathbb{R}_t)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

すなわち, 解の空間変数に関する滑らかさは, 初期値の滑らかさより「 $1/2$ 」増大している事が読み取れる. この不等式の証明も, Plancherel の定理を使って容易に与えられる. 実際第7節において, やや一般の状況においてその証明が与えられている. (命題2とその証明を参照せよ.)

しかしこの不等式は  $n = 1$  の場合であり, これを高次元化  $n \geq 2$  できるか? ということが次に問題となる. この問題に関しては様々な研究がなされているが, これらをタイプ別に分類すると以下ようになる:



•  $n \geq 2$  の場合

$$(S) \quad \|Au(t, x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}.$$

ただし  $\langle \cdot \rangle = \sqrt{1 + |\cdot|^2}$  として,  $A$  は次のいずれかである:

- [1]  $A = \langle x \rangle^{-s} |D_x|^{1/2}; s > 1/2,$
- [2]  $A = \langle x \rangle^{-s} \langle D_x \rangle^{1/2}; s \geq 1 \quad (s > 1, n = 2),$
- [3]  $A = |x|^{\alpha-1} |D_x|^\alpha; 1 - n/2 < \alpha < 1/2.$

注. [1] は Ben-Artzi & Klainerman [BK] ( $n \geq 3$ ), Chihara [Ch] ( $n \geq 2$ ) による結果である. [2] は Kato & Yajima [KY] ( $n \geq 3$ ), Walther [Wa1] ( $n \geq 2$ ) による. [3] は Kato & Yajima [KY] ( $n \geq 3, 0 \leq \alpha < 1/2$  および  $n = 2, 0 < \alpha < 1/2$ ), 筆者 [Su4] ( $n \geq 2, 1 - n/2 < \alpha < 1/2$ ) による. また, Walther [Wa1] により, [2] は  $s < 1$  ( $s \leq 1, n = 2$ ) では成立しない事, Watanabe [Wat] により, [3] は  $\alpha = 1/2$  では成立しない事がそれぞれ示されている. これらの事実と [1] を見比べることにより, 評価式 (S) において,  $|\cdot|$  と  $\langle \cdot \rangle$  との違いは本質的であることがわかる.

ここで, 従来の証明方法について概説しておこう. (S) を示すには, 以下のいずれかを示せばよいことが知られている. 上記の一連の結果の証明も, 基本的にこの考え方に基づいている:

• フーリエ制限定理

$$(F) \quad \left\| \widehat{A^* f} \Big|_{S_\rho^{n-1}} \right\|_{L^2(S_\rho^{n-1})} \leq C \sqrt{\rho} \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

ただし,  $S_\rho^{n-1} = \{\xi; |\xi| = \rho\}, (\rho > 0).$

• Resolvent 評価

$$(R) \quad \sup_{\text{Im } \zeta > 0} |(R(\zeta)A^* f, A^* f)| \leq C \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$$

ただし,  $R(\zeta) = (-\Delta - \zeta)^{-1}.$

実際 (F) と (S) は互いに双対評価の関係となっており, (F)  $\Rightarrow$  (S) である. また, レゾルベント  $R(\zeta)$  と解作用素  $e^{it\Delta}$  は Laplace 変換

$$R(\zeta) = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{it\Delta} e^{i\zeta t} dt \quad (\text{Im } \zeta > 0)$$

を通じて関係し合っているので, (R)  $\Rightarrow$  (S) も正当化される. ちなみに, (R) と (F) は公式

$$\text{Im} (R(\rho^2 + i0)f, f) = \frac{1}{4(2\pi)^{n-1}\rho} \left\| \widehat{f} \Big|_{S_\rho^{n-1}} \right\|_{L^2(S_\rho^{n-1})}^2$$

により関連し合っており, (R)  $\Rightarrow$  (F) も正しい事が確かめられる.

これら従来の証明方法は,  $n = 1$  の場合のように単純ではない. 少なくともこれまで, そのように認識されてきた. しかし第4節で説明したアイデアを用いることにより, 実は  $n = 1$  の場合から  $n \geq 2$  の場合が自動的に導かれることがわかる. 別の言い方をすれば, 平滑化作用が成り立つ原理の本質的な部分は, 単純に証明される  $n = 1$  の場合にすべて内在しているということである. このことに関しては, 第7節において詳しく述べられる.

## 6. 分散型方程式の平滑化作用

これまで説明してきたフーリエ積分作用素の考え方を応用することにより、より一般の分散型方程式に対する平滑化作用の諸結果も導くことができる。それと同時に、シュレディンガー方程式に対するこれまでの結果に対する（より簡単な）別証明も与えられる。

ここでは、初期値問題

$$(*) \quad \begin{cases} (i\partial_t - a(D_x)) u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

を考える。ここで、 $a(\xi)$  は実数値関数であるものとする。 $a(\xi)$  の「主部」 $a_m(\xi)$  は、 $a_m(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$  かつ  $m$  次斉次関数とし、

$$\nabla a_m(\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0)$$

を満たしているものとする。このような方程式を、分散型方程式という。ただし「主部」の意味するところとして、ここでは以下のいずれかを仮定する：

$$(H): a(\xi) = a_m(\xi).$$

$$(L): a(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \nabla a(\xi) \neq 0, \text{ かつ遠方で } |\partial^\alpha(a(\xi) - a_m(\xi))| \leq C|\xi|^{m-1-|\alpha|}.$$

例 2.  $a(\xi) = a_m(\xi) = |\xi|^m$  は (H) を満たす。特に、 $m = 2$  のときがシュレディンガー方程式である。また、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  として  $a_3(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \dots + \xi_n^3$  とおくと、 $a(\xi) = a_3(\xi) + \xi_1$  は  $m = 3$  に対して (L) を満たす。

以下の諸結果は、筆者と Michael Ruzhansky (Imperial College) との共同研究 ([RS1], [RS4]) による：

定理 1. (H) または (L) を仮定し、 $m > 0, s > 1/2$  とする。このとき、初期値問題 (\*) の解  $u$  は

$$\|\langle x \rangle^{-s} |D_x|^{(m-1)/2} u(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}$$

をみます。

注. この結果は、前節の評価式 (S) における [1] のタイプに相当する。仮定 (H) で  $m > 1$  の場合は、Chihara (2002) の結果である。

定理 2. (H) を仮定し、 $m > 1, n > m + 1$  とする ( $a(\xi) \neq 0$  ( $\xi \neq 0$ ) の場合は  $n > m > 1$  でもよい)。このとき、初期値問題 (\*) の解  $u$  は、

$$\|\langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} u(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}$$

をみます。また、(L) を仮定し、 $m > 0, s > 1/2$  とする。このとき、初期値問題 (\*) の解  $u$  は

$$\|\langle x \rangle^{-s} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} u(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}$$

をみます。

注. この結果は, 前節の評価式 (S) における [2] のタイプに相当する.  $a(\xi) = |\xi|^m$  で  $n > m > 1$  の場合は, (次数  $-m/2, (m-1)/2$  が最良であることも含めて) Walther [Wa2] の結果である.

第10節で後述するが, 前節の評価式 (S) における [3] のタイプに相当する結果も得られている.

### 7. 正準変換を用いた平滑化作用の証明

定理1および2の証明の概略を説明しよう. 仮定 (H) の場合を中心に述べるが, 仮定 (L) の場合の証明も同様の発想にもとづいている. (詳しくは, [RS4] において公表予定である.)

1次斉次な座標変換  $\psi: \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  に対し

$$Iu(x) = F^{-1}[Fu(\psi(\xi))](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} u(y) dy d\xi,$$

$$I^{-1}u(x) = F^{-1}[Fu(\psi^{-1}(\xi))](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi^{-1}(\xi))} u(y) dy d\xi.$$

とおく. これらは

$$\phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi), \quad \phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - y \cdot \psi^{-1}(\xi)$$

を phase とし  $a(x, y, \xi) = 1$  を amplitude としたフーリエ積分作用素である. このとき, 第4節でも述べたように, 関係式

$$a(D) = I \cdot \sigma(D) \cdot I^{-1}, \quad a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$$

が成立することに注意する. また, 重みつき空間  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$  をノルム

$$\|f\|_{L_k^2(\mathbb{R}^n)} = \left( \int |\langle x \rangle^k f(x)|^2 dx \right)^{1/2}; \quad \langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$$

により定義するとき, (証明は次節で与えるが) 次の有界性が成立する.

**命題 1.**  $I$  および  $I^{-1}$  は  $|k| < n/2$  に対して  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$ -有界である.

以上のことより, うまい  $\psi(\xi)$  と  $\sigma(\eta)$  を見つけ出して,  $a(D_x)$  を  $\sigma(D_x)$  に置き換えて証明してもよいことがわかる. 実際, 方程式 (\*) の両辺に  $I^{-1}$  を施せば

$$(**) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \sigma(D_x))v(t, x) = 0 \\ v(0, x) = g(x) \end{cases}$$

に変換される. ただし

$$v = I^{-1}u, \quad g = I^{-1}\varphi$$

である. (\*\*) の解  $v(t, x) = e^{it\sigma(D_x)}g(x)$  に対して, 以下が示されたとする:

$$\|\langle x \rangle^{-s} |D_x|^{(m-1)/2} v(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)}.$$

これに  $v = I^{-1}u$ ,  $g = I^{-1}\varphi$  を代入して  $\psi(D_x) = I \cdot |D_x| \cdot I^{-1}$  に注意すれば,

$$\|\langle x \rangle^{-s} I^{-1} \cdot |\psi(D_x)|^{(m-1)/2} u(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2)} \leq C \|I^{-1}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)},$$

さらに  $I, I^{-1}$  は命題 1 より  $L_k^2$ -有界 ( $|k| < n/2$ ) であり,  $|\psi(D_x)|^{-(m-1)/2} |D_x|^{(m-1)/2}$  は Plancherel の定理から  $L^2$ -有界であることがわかるので,

$$\| \langle x \rangle^{-s} |D_x|^{(m-1)/2} u(t, x) \|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が示される. つまり, (\*) の解  $u(t, x) = e^{ita(D_x)} \varphi(x)$  に対しても同じ評価が得られることになる. これが, 定理 1 の証明の基本方針である. 定理 2 に関しても同様に,

$$\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} v(t, x) \|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

から

$$\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} u(t, x) \|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が自動的に得られる.

ここまでの議論は, 1 次斉次な座標変換  $\psi: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$  ( $\Gamma, \tilde{\Gamma} \subset \mathbf{R}^n \setminus 0$  は cone) に対しても正当化されることに注意しておく. 従って Microlocalization + Rotation により,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  の充分小なる conic neighborhood  $\Gamma$  に対して,  $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \Gamma$  と仮定してよい. その上で, 座標変換  $\psi: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$  と  $\sigma(\eta)$  を  $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  ( $\xi \in \Gamma$ ) が成立するように選べばよい.

ここで, ( $m$  次の) 斉次関数に対して成立する, Euler の恒等式

$$a_m(\xi) = \frac{1}{m} \xi \cdot \nabla a_m(\xi)$$

に注意しておこう.  $a_m(\xi)$  に対しては, さらに  $\nabla a_m(\xi) \neq 0$  ( $\xi \neq 0$ ) を仮定していたが, これより特に  $\nabla a_m(e_n) \neq 0$  である. このとき, 次の 2 通りの場合が考えられる.

(I):  $\partial_n a_m(e_n) \neq 0$ . この時 Euler の恒等式から  $a_m(e_n) \neq 0$ . 従って, 例えば

$$a_m(e_n) > 0, \quad \partial_n a_m(e_n) \neq 0.$$

(II):  $\partial_n a_m(e_n) = 0$ . この時仮定から, ある  $j \neq n$  に関して  $\partial_j a_m(e_n) \neq 0$ . また, Euler の恒等式から  $a_m(e_n) = 0$ . 従って, 例えば

$$a_m(e_n) = 0, \quad \partial_1 a_m(e_n) \neq 0.$$

以上をふまえて, 仮定 (H) のもとで定理 1 を証明する. すなわち,  $a(\xi) = a_m(\xi)$  として上の 2 通りの場合についてそれぞれ考察しよう.

(I) の場合. この場合は,

$$\sigma(\eta) = \eta_n^m, \quad \psi(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a(\xi)^{1/m})$$

とおけば  $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  が成立. また,

$$\det \partial \psi(e_n) = \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ * & \frac{1}{m} a(e_n)^{1/m-1} \partial_n a(e_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (E_{n-1} \text{ は } n-1 \text{ 次単位行列})$$

であるから,  $\psi$  は  $e_n$  の conic な近傍における座標変換になっていることがわかる. 一方,  $\sigma(D_x) = D_n^m$  の場合の評価は次から得られる ( $m=2$  の時は Kenig, Ponce & Vega [KPV] による結果):

命題 2.  $n = 1$  の場合に次が成立 :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| |D_x|^{(m-1)/2} e^{itD_x^m} g(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}.$$

*Proof.*  $\xi < 0$  のとき  $\hat{g}(\xi) = 0$  として証明すればよい.

$$\begin{aligned} |D_x|^{(m-1)/2} e^{itD_x^m} g(x) &= (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{ix \cdot \xi} e^{it\xi^m} \xi^{(m-1)/2} \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{it\xi^m} \xi^{(m-1)/2} \hat{g}_x(\xi) d\xi \\ &= (2m\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{it\rho} \rho^{-(m-1)/(2m)} \hat{g}_x(\rho^{1/m}) d\rho. \end{aligned}$$

ここで  $g_x(s) = g(s+x)$  であり, また変数変換  $\rho = \xi^m$  を行った. Plancherel の定理により,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \left\| |D_x|^{(m-1)/2} e^{itD_x^m} g(x) \right\|^2 dt \\ &= (2m^2\pi)^{-1} \int_0^\infty \left| \rho^{-(m-1)/(2m)} \hat{g}_x(\rho^{1/m}) \right|^2 d\rho \\ &= (2m\pi)^{-1} \int_0^\infty |\hat{g}_x(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq m^{-1} \int_{-\infty}^\infty |g_x(s)|^2 ds \\ &= m^{-1} \int_{-\infty}^\infty |g(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

となるが, ここでも変数変換  $\xi = \rho^{1/m}$  を行った.  $\square$

命題 2 より,  $s > 1/2$  かつ  $\text{supp } \hat{g}$  が  $e_n$  の十分小さな近傍に含まれていれば,  $\sigma(D_x) = D_x^m$  に対して

$$\left\| \langle x \rangle^{-s} |D_x|^{(m-1)/2} e^{it\sigma(D_x)} g(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)}$$

を得るので, 既に見たように  $a(D_x)$  に対する同じ式が成立する.

(II) の場合. この場合は,

$$\sigma(\eta) = \eta_1 \eta_n^{m-1}, \quad \psi(\xi) = \left( \frac{a(\xi)}{\xi_n^{m-1}}, \xi_2, \dots, \xi_n \right)$$

とおけば  $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  かつ

$$\det \partial \psi(e_n) = \begin{vmatrix} \partial_1 a(e_n) & * \\ 0 & E_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

であり, やはり  $\psi$  は  $e_n$  の conic な近傍における座標変換になっていることがわかる. 一方  $\sigma(D_x) = D_1 D_n^{m-1}$  の場合の評価は次から得られる ( $m = 2$  の時は Linares & Ponce [LP] による結果).

命題 3.  $n = 2$  の場合に次が成立 :

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left\| |D_x|^{(m-1)/2} e^{itD_x^{m-1}D_y} g(x, y) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)}.$$

*Proof.*  $\xi < 0$  に対しては  $\hat{g}(\xi, \eta) = 0$  として証明すればよい.

$$\begin{aligned} & |D_x|^{(m-1)/2} e^{itD_x^{m-1}D_y} g(x, y) \\ &= (2\pi)^{-2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i(x\xi+y\eta)} e^{it\xi^{m-1}\eta} \xi^{(m-1)/2} \hat{g}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i(xb+ta)} e^{iyab^{-(m-1)}} b^{-(m-1)/2} \hat{g}(b, ab^{-(m-1)}) dadb. \end{aligned}$$

ここで変数変換  $a = \xi^{m-1}\eta$ ,  $b = \xi$  を行った ( $\partial(a, b)/\partial(\xi, \eta) = b^{m-1}$  も用いた). Plancherel の定理により

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| |D_x|^{(m-1)/2} e^{itD_x^{m-1}D_y} g(x, y) \right|^2 dt dx \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty |b^{-(m-1)/2} \hat{g}(b, ab^{-(m-1)})|^2 dadb \\ &= (2\pi)^{-2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\hat{g}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |g(x, y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

ここでも変数変換  $\eta = ab^{-(m-1)}$ ,  $\xi = b$  を行った. □

命題 3 より,  $s > 1/2$  かつ  $\text{supp } \hat{g}$  が  $e_n$  の十分小さな近傍に含まれていれば,  $\sigma(D) = D_1 D_n^{m-1}$  に対して

$$\left\| \langle x \rangle^{-s} |D_n|^{(m-1)/2} e^{itD_1 D_n^{m-1}} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)}$$

を得るので, やはり  $a(D_x)$  に対する同じ式が成立する.

仮定 (H) の下での定理 2 の証明も同様である. (I) の場合は,  $a(\xi) \neq 0$  ( $\xi \neq 0$ ) の場合の主張に相当する. この時は,

$$\sigma(\eta) = |\eta|^m, \quad \psi(\xi) = \left( \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \sqrt{a(\xi)^{2/m} - (\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)} \right)$$

と取れば,  $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  かつ

$$\begin{aligned} \det \partial \psi(\xi) &= \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ * & (1/m)a(e_n)^{1/m-1} \partial_n a(e_n) \end{vmatrix} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

が成立している.  $\sigma(D_x) = |D_x|^m$  の場合の評価についても, Walther [Wa2] により, 以下が知られている:

命題 4.  $n > m > 1$  とする. このとき, 次が成立:

$$\left\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} e^{it|D_x|^m} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}.$$

(II) の場合には,

$$\sigma(\eta) = \eta_1^m - (\eta_2^2 + \cdots + \eta_n^2)^{m/2}, \quad \psi(\xi) = \left( (a(\xi) + (\xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)^{m/2})^{1/m}, \xi_2, \dots, \xi_n \right)$$

ととれば, やはり  $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  かつ

$$\det \partial \psi(\xi) = \begin{vmatrix} (1/m) \partial_1 a(e_n) & * \\ 0 & E_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立する.  $\sigma(D_x) = D_1^m - (D_2^2 + \cdots + D_n^2)^{m/2}$  の場合の評価についても, 次から得られる:

命題 5.  $n-1 > m > 1$  とする. このとき,  $D_x = (D_1, D')$ ,  $D' = (D_2, \dots, D_n)$  として次が成立:

$$\left\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} e^{it(|D_1|^m - |D'|^m)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}.$$

*Proof.*  $x = (x_1, x')$ ,  $x' = (x_2, \dots, x_n)$  と書くことにする. 命題 2 と  $x_1$  に関する Schwartz の不等式, および  $x'$  に関する Plancherel の定理から

$$\left\| \langle x_1 \rangle^{-m/2} |D_1|^{(m-1)/2} e^{it(|D_1|^m - |D'|^m)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が得られる事に注意する. ここで, 仮定  $m > 1$  は,  $\langle x_1 \rangle^{-m/2}$  の 2 乗可積分性を保障している. 一方,  $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$  に関する命題 4 と  $x_1$  に関する Plancherel の定理とから

$$\left\| \langle x' \rangle^{-m/2} \langle D' \rangle^{(m-1)/2} e^{it(|D_1|^m - |D'|^m)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

を得る. ここで, 仮定  $n-1 > m > 1$  は, 命題 4 の仮定を保障している. これら, 二つの評価式を結合して,

$$\begin{aligned} & \left\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} e^{it(|D_1|^m - |D'|^m)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \\ & \leq \left\| \langle x_1 \rangle^{-m/2} |D_1|^{(m-1)/2} e^{it(|D_1|^m - |D'|^m)} \eta(D_x) \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \\ & \quad + \left\| \langle x' \rangle^{-m/2} \langle D' \rangle^{(m-1)/2} e^{it(|D_1|^m - |D'|^m)} \eta(D_x) \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \\ & \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 自明な不等式  $\langle x \rangle^{-m/2} \leq \langle x_1 \rangle^{-m/2}$ ,  $\langle x \rangle^{-m/2} \leq \langle x' \rangle^{-m/2}$ , および

$$\eta(D_x) = \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} \left( |D_1|^{(m-1)/2} + \langle D' \rangle^{(m-1)/2} \right)^{-1}$$

の  $L^2$ -有界性 (Plancherel の定理による) を用いた. □

最後に、仮定 (L) の下での定理の証明に関してコメントしておこう。初期値を  $\varphi$  を、高周波部分  $\varphi_h; \text{supp } \varphi_h \subset \{\xi; |\xi| \geq R\}$  と低周波部分  $\varphi_l; \text{supp } \varphi_l \subset \{\xi; |\xi| \leq R\}$  とに分割する ( $R > 0$  は十分大)。高周波の部分に関しては、仮定 (H) の場合と本質的に同じである。

低周波の部分に関してはそのコンパクト性に着目して、

$$\|\langle x \rangle^{-s} e^{it a(D_x)} \varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

を示せば十分である。その際、ある定数  $c$  が存在して常に  $a(\xi) + c > 0$  であり、ある  $j$  (例えば  $j = n$ ) に対して常に  $\partial_j a(\xi) \neq 0$  であるものとしてよい。また、

$$\|\langle x \rangle^{-s} e^{it a(D_x)} \varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} = \|\langle x \rangle^{-s} e^{it(a(D_x) + c)} \varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)}$$

が成り立つことにも注意しておく。この状況で、

$$\sigma(\eta) = \eta_n^m, \quad \psi(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, (a(\xi) + c)^{1/m})$$

と取れば、 $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$  かつ

$$\det \partial \psi(\xi) = \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ * & (1/m)(a(\xi) + c)^{1/m-1} \partial_n a(\xi) \end{vmatrix} \neq 0$$

であるから、やはり  $\sigma(D_x) = D_n^m$  での評価 (命題 2) に帰着される。

## 8. フーリエ積分作用素の大域的 $L^2$ -有界性

命題 1 を一般化して、より広いクラスのフーリエ積分作用素に対しても、大域的な (重みつき)  $L^2$ -有界性を調べておくことは有用である。これにより、より複雑な問題に関してもここまでの議論を適用する事が可能となる。(実際に、後で用いられる。)

フーリエ積分作用素の大域的な  $L^2$ -有界性に関しては、これまで以下の結果が知られているのみであった：

Asada & Fujiwara [AF].  $a(x, y, \xi), \phi(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$  をそれぞれ amplitude と phase にもつフーリエ積分作用素を  $T$  する。また、 $a(x, y, \xi)$  および

$$D(\phi) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_y \phi & \partial_x \partial_\xi \phi \\ \partial_\xi \partial_y \phi & \partial_\xi \partial_\xi \phi \end{pmatrix}$$

の各成分のすべての導関数は有界であるものとする。さらに、 $|\det D(\phi)| \geq C > 0$  を仮定する。この時、 $T$  は、 $L^2(\mathbf{R}^n)$ -有界である。

ここで  $|\det D(\phi)| \geq C > 0$  は local graph condition を強めた仮定であることに注意しておく。(local graph condition からは局所的  $L^2$ -有界性が示される。)

Asada & Fujiwara の結果は、ファインマンの経路積分の方法でシュレディンガー方程式の解を構成する際に基本的な役割を果たす ([Fu])。しかし、第 7 節で定理 1 の証明のために用いた phase

$$\phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi), \quad \phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - y \cdot \psi^{-1}(\xi)$$

の場合には、この結果を用いる事ができない。なぜなら  $\partial_\xi \partial_\xi \phi$  の有界性は一般には成立しないからである。(他の仮定を強めてでも良いから) この仮定を落としておく必要がある。



このことに関する、筆者と Ruzhansky による結果 [RS2] を紹介しよう。以下、 $a(x, y, \xi), \phi(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$  をそれぞれ amplitude と phase にもつフーリエ積分作用素を  $T$  とする。

**定理 3.**  $\phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi + \varphi(y, \xi)$  とし、

$$|\det D(\phi)| = |\det \partial_y \partial_\xi \varphi(y, \xi)| \geq C > 0$$

かつ、 $\partial_y \partial_\xi \varphi(y, \xi)$  の各成分のすべての導関数は有界であるものとする。さらに

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\beta \varphi(y, \xi)| &\leq C_\beta \langle y \rangle \quad (|\beta| \neq 0), \\ |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| &\leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle x \rangle^{m_1 - |\alpha|} \langle y \rangle^{m_2} \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} |\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi(y, \xi)| &\leq C_\alpha \langle y \rangle^{1 - |\alpha|} \quad (|\beta| \neq 0), \\ |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| &\leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle x \rangle^{m_1} \langle y \rangle^{m_2 - |\beta|} \end{aligned}$$

が成立しているものとする。このとき、 $T : L^2_{k+m_1+m_2}(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2_k(\mathbf{R}^n)$  が、すべての  $k \in \mathbf{R}$  に対して成立する。

この定理が主張するのは、Asada & Fujiwara の結果において  $\partial_\xi \partial_\xi \phi$  の有界性を仮定しなくても、amplitude に強い decaying property を仮定すれば、やはり大域的な（さらに詳しく重みつき） $L^2$ -有界性が得られるということである。

定理 3 の証明は [RS2] において与えられているので、ここでは省略する。そのかわり、前節において重要な役割を果たした命題 1 に証明を与えておこう。まず、以下の Kurtz & Wheeden [KW] の結果を引用しておく：

**補題 1.**  $m(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus 0)$  は 0 次斉次であるものとする。このとき  $m(D_x)$  は、 $|k| < n/2$  に対して  $L^2_k(\mathbf{R}^n)$ -有界である。

この結果を認めれば、命題 1 の証明は容易である。まず、 $k \geq 0$  の場合に示せば十分であることに注意しておこう。これより、 $k \leq 0$  の場合も duality argument により示される。実際、

$$\begin{aligned} I^* u(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(y \cdot \xi - x \cdot \psi(\xi))} u(y) dy d\xi, \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi^{-1}(\xi))} |\det \partial \psi^{-1}(\xi)| u(y) dy d\xi, \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi^{-1}(\xi))} |\det \partial \psi(\psi^{-1}(\xi))|^{-1} u(y) dy d\xi, \\ &= I^{-1} \cdot |\det \partial \psi(D)|^{-1} u(x), \end{aligned}$$

が成り立つことと、補題 1 により  $|\det \partial \psi(D)|^{-1}$  が  $L^2_k$ -有界 ( $|k| < n/2$ ) であることによる。また、 $I^{-1}$  の有界性も同様であるので、 $I$  の有界性のみ示そう。さて

$$e^{ix \cdot \xi} = \frac{1 - ix \cdot \partial_\xi}{\langle x \rangle^2} e^{ix \cdot \xi}$$

に注目して、部分積分により

$$\begin{aligned} Iu(x) &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} u(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} \left( \frac{1 + x^t \partial \psi(\xi)^t y}{\langle x \rangle^2} \right) u(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{\langle x \rangle^2} Iu + \frac{x}{\langle x \rangle^2} {}^t \partial \psi(D) I({}^t x u) \end{aligned}$$

となるから、公式

$$I = \frac{1}{\langle x \rangle^2} I + \frac{x}{\langle x \rangle^2} {}^t \partial \psi(D) I {}^t x$$

を得る。これより、 $k$  に関する induction と interpolation から  $0 \leq k < n/2$  に対して  $I$  の  $L^2_{k-1}$ -有界性が示される。実際、Plancherel の定理により  $I$  は  $L^2$ -有界である。また、補題 1 により  $\partial \psi(D)$  が  $L^2_{k-1}$ -有界 ( $k < n/2 + 1$ ) であることから、 $I$  が  $L^2_{k-1}$ -有界と仮定すると上の公式より  $I$  は  $L^2_k$ -有界となる。

### 9. フーリエ積分作用素の CALCULUS

第 4 節で説明した Egorov の定理を、大域的な関数空間の枠組みにおいても成立するように整備しておくことと便利である。そこで、さまざまな Calculus と重みつき有界性などが整合する、フーリエ積分作用素の新しいクラスを導入したい。以下、筆者と Ruzhansky の仕事 [RS3] に従って解説しよう：

実関数  $\varphi(y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$  で

$$\begin{aligned} |\det \partial_y \partial_\xi \varphi(y, \xi)| &\geq C > 0, \\ \left| \partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi(y, \xi) \right| &\leq C_{\alpha\beta} \langle y \rangle^{1-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{1-|\beta|} \quad (|\beta| \neq 0) \end{aligned}$$

を満たすものとして固定する。必要ならば、さらに

$$C_1 \langle y \rangle \leq \langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle \leq C_2 \langle y \rangle, \quad (C_1, C_2 > 0)$$

も仮定する（実は、大域的陰関数定理により、この式は上の 2 式から導かれる）。

Amplitude

$$a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$$

に対し、フーリエ積分作用素  $T_a$  を

$$T_a u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi + \varphi(y, \xi))} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$

で与える。特に  $\varphi(y, \xi) = -y \cdot \xi$  の場合には、 $T_a$  は擬微分作用素であり、

$$a(X, Y, D) = (2\pi)^{-n} T_a$$

と表す事にする。

**定義 1.**  $m, m', k \in \mathbb{R}$  とする。Amplitude  $a(x, y, \xi)$  がそれぞれ  $\mathcal{A}_k^{m, m'}$ ,  $\mathcal{R}_k^{m, m'}$  に属するとは、それぞれ

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi) \right| &\leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle x \rangle^{m-|\alpha|} \langle y \rangle^{m'-|\beta|} \langle \xi \rangle^{k-|\gamma|}, \\ \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi) \right| &\leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle x \rangle^m \langle y \rangle^{m'-|\beta|} \langle \xi \rangle^k \end{aligned}$$

が成立する事をいう。

$$A_k^m = \cup_{m' \in \mathbb{R}} A_k^{m-m', m'}, \quad \mathcal{R}_k^m = \cup_{m' \in \mathbb{R}} \mathcal{R}_k^{m-m', m'}$$

とおく。

注. 定義より明らかに  $A_k^{m, m'} \subset \mathcal{R}_k^{m, m'}$ , 従って  $A_k^m \subset \mathcal{R}_k^m$  である. また, amplitude が  $x$  や  $y$  に依存しない時は定義は単純化される. 例えば,  $a(x, \xi) \in A_k^m$  とは, すべての  $\alpha$  および  $\gamma$  に対して

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\gamma a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\gamma} \langle x \rangle^{m-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{k-|\gamma|},$$

が成立する事をいう. さらに,  $A_k^{m, m'}$ ,  $\mathcal{R}_k^m$  は Cordes [Crd], Coriasco [Cri] らにより導入された「SG-クラス」と同じものであることに注意しておこう. これを用いることにより, 例えば係数が多項式増大するような方程式の取り扱いが可能になる. ここでは, それらよりも広いクラス  $\mathcal{R}_k^{m, m'}$ ,  $\mathcal{R}_k^m$  も必要となる.

前節の定理3から, 直ちに次が得られる.

定理 4.  $m, \mu \in \mathbb{R}$  とする.  $a(x, y, \xi) \in \mathcal{R}_0^m$  ならば

$$T_a : L_{m+\mu}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\mu^2(\mathbb{R}^n).$$

さらに, この枠組みのもとで, 次の Calculus が成立する.

定理 5.  $m, k \in \mathbb{R}$  とし,  $a(x, y, \xi) \in A_k^m$  とする. このとき, 以下の分解が成立する:

$$T_a = T_{a_0} + T_r;$$

$$a_0(y, \xi) = a(-\partial_\xi \varphi(y, \xi), y, \xi) \in A_k^m, \quad r(x, y, \xi) \in \mathcal{R}_{k-1}^{m-1}.$$

Proof. 最初の主張  $a_0(y, \xi) \in A_k^m$  は, この節の冒頭の  $\varphi(y, \xi)$  に対する仮定から容易に確認することができる.

次に,  $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  を, 原点の近傍では 1 に等しく,  $\text{supp } \chi \subset \{x; |x| < 1/2\}$  となるものとして,

$$a^I(x, y, \xi) = a(x, y, \xi) \chi((x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)) / \langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle),$$

$$a^{II}(x, y, \xi) = a(x, y, \xi) (1 - \chi)((x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)) / \langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle)$$

とおき, これを使って  $a = a^I + a^{II}$  と分解する.

このとき, 任意の  $N, l \in \mathbb{R}$  に対して, ある  $r(x, y, \xi) \in A_l^N$  が存在して  $T_{a^{II}} = T_r$  とできる. 実際,  $M$  を

$${}^t M = \frac{x + \partial_\xi \varphi}{i|x + \partial_\xi \varphi|^2} \cdot \partial_\xi$$

の transpose とすれば, 部分積分により任意の  $l \in \mathbb{N}$  に対し

$$T_{a^{II}} u(x) = \int \int e^{i(x \cdot \xi + \varphi(y, \xi))} M^l a^{II}(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$

となるが,  $a^{II}(x, y, \xi)$  の台の上では  $\langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle \leq C|x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)|$  となるので,

$$\langle x \rangle \leq |x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)| + \sqrt{2} \langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle \leq C|x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)|,$$

$$\langle y \rangle \leq C \langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle \leq C|x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)|$$

を得る.  $\chi'((x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)) / \langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle)$  の台の上では  $|x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)|$  と  $\langle \partial_\xi \varphi(y, \xi) \rangle$  は同値であるので, これらのことを総合すればよい.

一方, Taylor の定理より

$$a^I(x, y, \xi) = a(-\partial_\xi \varphi(y, \xi), y, \xi) + \sum_{|\alpha|=1} (x + \partial_\xi \varphi(y, \xi))^\alpha \int_0^1 (\partial_x^\alpha a^I)(-\partial_\xi \varphi(y, \xi) + \theta(x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)), y, \xi) d\theta$$

となるが,

$$(x + \partial_\xi \varphi(y, \xi))^\alpha e^{i(x \cdot \xi + \varphi(y, \xi))} = (-i\partial_\xi)^\alpha e^{i(x \cdot \xi + \varphi(y, \xi))}$$

に注意して部分積分することにより,

$$r(x, y, \xi) = \sum_{|\alpha|=1} \int_0^1 (i\partial_\xi)^\alpha \{ (\partial_x^\alpha a^I)(-\partial_\xi \varphi(y, \xi) + \theta(x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)), y, \xi) \} d\theta$$

としてもよい事がわかる. これが  $\mathcal{R}_{k-1}^{m-1}$  に属する事は,  $\langle -\partial_\xi \varphi(y, \xi) + \theta(x + \partial_\xi \varphi(y, \xi)) \rangle$  と  $\langle y \rangle$  の同値性から確かめられる. この同値性は,  $\text{supp } a^I$  の台の上では

$$C_1 \langle x \rangle \leq \langle y \rangle \leq C_2 \langle x \rangle, \quad (C_1, C_2 > 0)$$

が成立している事からわかる. 実際, そこでは  $|x + \partial_\xi \varphi| \leq (1/2)\langle \partial_\xi \varphi \rangle$  であるので,

$$\langle x \rangle \leq |x + \partial_\xi \varphi| + \sqrt{2}\langle \partial_\xi \varphi \rangle \leq (1/2 + \sqrt{2})\langle \partial_\xi \varphi \rangle,$$

および

$$\begin{aligned} \langle \partial_\xi \varphi \rangle &\leq |x + \partial_\xi \varphi| + \sqrt{2}\langle x \rangle \\ &\leq (1/2)\langle \partial_\xi \varphi \rangle + \sqrt{2}\langle x \rangle \end{aligned}$$

すなわち

$$\langle \partial_\xi \varphi \rangle \leq 2\sqrt{2}\langle x \rangle$$

が成り立っている. これらと, やはりこの節の冒頭の  $\varphi(y, \xi)$  に対する仮定とを用いればよい.  $\square$

ここまでの要点は,  $a(x, y, \xi) \in \mathcal{A}_k^m$  であったとしても, 定理 5 による分解の誤差が同じカテゴリーでの低階のクラス  $\mathcal{A}_{k-1}^{m-1}$  には入るとは限らず, 一般にはそれよりも広いクラス  $\mathcal{R}_{k-1}^{m-1}$  を考えなければならないことにある. それ故, 既存の SG-クラスの理論だけでは不十分であり, 有界性に関しても, 定理 4 のように,  $\mathcal{R}_k^m$  のカテゴリーで述べておく必要がある. 第 8 節での定理 3 は, この目的にかなった定理なのである.

以下は, すべて定理 5 より導かれる.

**擬微分作用素の単純化.** 定理 5 を,  $\varphi(y, \xi) = -y \cdot \xi$  の場合に適用すれば, 次の結果を得る:

**系 6.**  $m, k \in \mathbb{R}$  とし,  $a(x, y, \xi) \in \mathcal{A}_k^m$  とする. このとき, ある  $r_1(x, y, \xi), r_2(x, y, \xi) \in \mathcal{R}_{k-1}^{m-1}$  が存在して

$$\begin{aligned} a(X, Y, D) &= a(Y, Y, D) + r_1(X, Y, D) \\ &= a(X, X, D) + r_2(X, Y, D) \end{aligned}$$

が成立する.

正準変換に関する Calculus. 1次斉次な座標変換  $\psi: \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  に対し

$$\begin{aligned} Iu(x) &= F^{-1}[Fu(\psi(\xi))](x) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} u(y) dy d\xi \end{aligned}$$

とおく (正確には,  $\psi(\xi)$  が滑らかになるように,  $\xi = 0$  のまわりで適当に補正しておく). ここで,  $I^{-1}$  における phase は

$$\phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - y \cdot \psi^{-1}(\xi)$$

であり, 対応する Lagrange 多様体 (第3節を参照せよ) は

$$C_\phi = \{(x, \xi, x\psi'(\psi^{-1}(\xi)), \psi^{-1}(\xi))\}$$

で与えられることに注意しておく. このとき, 以下の「Egorov の定理」が成立する (第4節を参照せよ):

系 7.  $m \in \mathbb{R}$  とする.  $a(x, \xi) \in \mathcal{A}_1^m$  に対し

$$\tilde{a}(x, \xi) = a(x\psi'(\psi^{-1}(\xi)), \psi^{-1}(\xi))$$

とおく. このとき  $\tilde{a}(x, \xi) \in \mathcal{A}_1^m$  であり, かつ

$$a(X, D) \cdot I = I \cdot \tilde{a}(X, D) + R$$

が成立する. ただし,  $R$  はすべての  $\mu \in \mathbb{R}$  に対して

$$R: L_{m-1+\mu}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\mu^2(\mathbb{R}^n)$$

となる作用素.

*Proof.*  $\tilde{a}(x, \xi) \in \mathcal{A}_1^m$  は容易に確かめられる. また

$$b(Y, D)u = F_\xi^{-1} \left[ \int e^{-iy \cdot \xi} b(y, \xi) u(y) dy \right]$$

より, 公式

$$I \cdot b(Y, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} b(y, \psi(\xi)) u(y) dy d\xi$$

が成立する事に注意しておく. これより, 定理5と系6から

$$\begin{aligned} a(X, D) \cdot Iu(x) &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} a(x, \xi) u(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \psi(\xi))} a(y\psi'(\xi), \xi) u(y) dy d\xi + R_1 u(x) \\ &= I \cdot \tilde{a}(Y, D)u(x) + R_1 u(x) \\ &= I \cdot \tilde{a}(X, D)u(x) + (I \cdot R_2 + R_1)u(x) \end{aligned}$$

となるので,  $R = I \cdot R_2 + R_1$  として定理4を用いれば, 系7が得られる.  $\square$

座標変換に関する Calculus. 1次斉次な座標変換  $\kappa: \mathbf{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbf{R}^n \setminus 0$  に対し,

$$\begin{aligned} Ju(x) &= (u \circ \kappa)(x) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - y \cdot \xi)} u(\kappa(y)) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - \kappa^{-1}(y) \cdot \xi)} \left| \det (\kappa^{-1})'(y) \right| u(y) dy d\xi \end{aligned}$$

とおく (正確には,  $\kappa(y)$  が滑らかになるように  $y = 0$  のまわりで適当に補正しておく). 従って座標変換も

$$\phi(x, y, \xi) = x \cdot \xi - \kappa^{-1}(y) \cdot \xi$$

を phase とするフーリエ積分作用素とみなすことができ, 対応する Lagrange 多様体は

$$C_\phi = \{(x, \xi, \kappa(x), \xi \kappa'(x)^{-1})\}$$

で与えられる. このとき, やはり次の「Egorov の定理」が成立する:

系 8.  $m \in \mathbf{R}$  とする.  $a(x, \xi) \in \mathcal{A}_1^m$  とし,

$$\tilde{a}(x, \xi) = a(\kappa(x), \xi \kappa'(x)^{-1})$$

とおく. このとき,  $\tilde{a}(x, \xi) \in \mathcal{A}_1^m$  であり, かつ

$$J \cdot a(X, D) = \tilde{a}(X, D) \cdot J + R$$

が成立する. ただし,  $R$  はすべての  $\mu \in \mathbf{R}$  に対して

$$R: L_{m-1+\mu}^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L_\mu^2(\mathbf{R}^n)$$

となる作用素.

## 10. 古典軌道と平滑化作用

ここで, 再びシュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_x) u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

を考えよう. 第5節でも述べたように, Kato & Yajima [KY] および筆者 [Su4] により,  $1 - n/2 < \alpha < 1/2$  に対して

$$\| |x|^{\alpha-1} |D_x|^\alpha u(t, x) \|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が成立する事が知られている (評価式 (S) の [3] のタイプである). また, Watanabe [Wat] により, 臨界値  $\alpha = 1/2$  では成立しないことも知られている.

一方, 筆者 [Su5] によれば, 同じ  $\alpha$  に対して

$$(†) \quad \| |x|^{\alpha-1} \Lambda^{1/2-\alpha} |D_x|^\alpha u(t, x) \|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が成立する (Hoshiro [Hos] も参照せよ). ここで  $\Lambda^\sigma$  は, 球面上のラプラシアン  $\Delta$  の  $\sigma/2$  次分数べきを  $\mathbf{R}^n$  上の作用素へと斉次に拡張したものである. ちなみに

$$\begin{aligned}\Lambda^2 &= |x \wedge \partial|^2 \\ &= \sum_{i < j} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2\end{aligned}$$

であり,  $x \wedge \partial$  は回転のベクトル場の基底をなす. また, 重みの位数と微分の階数の意味において

$$\Lambda^\sigma \sim |x|^\sigma |D_x|^\sigma$$

であることより

$$|x|^{\alpha-1} \Lambda^{1/2-\alpha} |D_x|^\alpha \sim |x|^{-1/2} |D_x|^{1/2}$$

とみなす事にすれば, 評価式 (†) は, 評価式 (S) の [3] のタイプにおける臨界値  $\alpha = 1/2$  を (微分方向を回転方向に制限して) 実現しているといえる. あるいは, 回転方向にのみ余分の滑らかさの増大が観測されたのだとも解釈できる.

この事実が何を意味しているのかについては, 実のところ良く解明されているわけではないが, ここまで述べてきたフーリエ積分作用素の方法により古典軌道との関係を与える事が可能である. 一般に量子力学では, プランク定数を 0 に収束させると古典力学が得られると考えられており (これを「準古典近似」という), 解の性質にも古典軌道が何らかの影響を与えていしかるべきである.

このことは, 第3節での問題提起とも関連させることができる. 実際, 同一の古典軌道上の2点間には正準関係があり, それがある Lagrange 多様体を定めていることが知られている. この Lagrange 多様体が, 平滑化作用に関する何らかの情報を内在しているものと考えられる.

以上の立場から評価式 (†) を理解することを試みよう. このことを一般的に説明するために, 再び分散型方程式の初期値問題

$$(*) \quad \begin{cases} (i\partial_t - a(D_x)) u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

を考える. これに対応する古典軌道, すなわち常微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (\nabla a)(\xi(t)), & \dot{\xi}(t) = 0 \\ x(0) = 0, & \xi(0) = k, \end{cases}$$

の解を考える. さらに, 古典軌道全体の集合

$$\begin{aligned}\Gamma_a &= \{(x(t), \xi(t)); t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{R}^n \setminus 0\} \\ &= \{(\lambda \nabla a(\xi), \xi); \xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0, \lambda \in \mathbf{R}\}\end{aligned}$$

を考える. 例えば, シュレディンガー方程式の場合には  $a(\xi) = |\xi|^2$  であるから, 簡単な計算により

$$\Gamma_a = \{(x, \xi) \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0; |x \wedge \xi| = 0\}$$

となることがわかる. これは回転のベクトル場の基底  $x \wedge \partial$  の特性集合と一致している. このことより, 余分に滑らかさが増大する方向 (シュレディンガー方程式の場合は回転方向) は, 一般に古典軌道が定めているものと想像される. この想像は正しく, 実際に次の定理が成立する ([RS3]):

定理 9.  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  とする.  $a(\xi) = a_m(\xi) > 0$  とし, 超曲面  $\Sigma_a = \{\xi; a(\xi) = 1\}$  のガウス曲率はいたるところ消えないと仮定する. また,

$$\tau(x, \xi) \sim |x|^{-1/2} |\xi|^{(m-1)/2}$$

かつ  $x \neq 0$  のとき

$$(x, \xi) \in \Gamma_a \Rightarrow \tau(x, \xi) = 0$$

とする. このとき, 初期値問題 (\*) の解  $u$  は,

$$\|\tau(X, D_x)u(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}$$

をみたす. ここで, 以下の記号を用いた:

$$\sigma(x, \xi) \sim |x|^a |\xi|^b \iff \begin{cases} \sigma(x, \xi) \in C^\infty((\mathbb{R}_x^n \setminus 0) \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus 0)), \\ \sigma(\lambda x, \xi) = \lambda^a \sigma(x, \xi); (\lambda > 0), \\ \sigma(x, \lambda \xi) = \lambda^b \sigma(x, \xi); (\lambda > 0). \end{cases}$$

例 3.  $a(\xi) = |\xi|^2$  の時は,  $\tau(x, \xi) = |x|^{-3/2} (x \wedge \xi) |\xi|^{-1/2}$  が定理の仮定を満たす (評価式 (+) との類似性にも注意してほしい). 実は, この場合の結果も評価式 (+) の証明 ([Su5]) と同様にして得られる.

第 4 節の Egorov の定理のところでも述べたが,  $m = 2$  の場合に

$$\psi(\xi) = \sqrt{a(\xi)} \frac{\nabla a(\xi)}{|\nabla a(\xi)|}$$

として

$$Iu(x) = F^{-1}[(Fu)(\psi(\xi))](x)$$

とおけば,

$$a(D) = I \cdot (-\Delta) \cdot I^{-1}$$

が成立する.  $-\Delta$  の場合には, 例 3 より

$$\tau(x, \xi) = |x|^{-3/2} (x \wedge \xi) |\xi|^{-1/2}$$

と出来る事がわかる. 一般の  $a(D)$  の場合には

$$\Omega(X, D) = I \cdot (X \wedge D) \cdot I^{-1}$$

として,

$$\tau(x, \xi) = |x|^{-3/2} \Omega(X, D) |\xi|^{-1/2}$$

とおけば, 実際これも定理の仮定をみたしている事が確かめられる. ちなみに,

$$\Omega(x, \xi) = x\psi'(\xi)^{-1} \wedge \psi(\xi)$$

である事が計算によりわかる.

このようにして得られる結果は, 本質的には例 3 と同値なものである. しかしながら定理 9 は, 例 3 とは同値ではない, より深い結果も与えている. 実際, 定理の仮定をみたす  $\tau(x, \xi)$  で, 以下のようにもっと自然な例が存在する:



例 4.  $m = 2$  とする.  $a(\xi)$  が定める定曲面

$$\Sigma_a = \{\xi; a(\xi) = 1\}$$

に対する *dual* な曲面を

$$\Sigma_a^* = \left\{ \frac{1}{2} \nabla a(\xi); \xi \in \Sigma_a \right\}$$

で定義し, さらに *dual* な関数  $a^*(x)$  を

$$\Sigma_a^* = \Sigma_{a^*} (= \{x; a^*(x) = 1\})$$

をみたすものとして定義する. このとき,

$$\tau(x, \xi) = |x|^{-3/2} (\nabla a^*(x) \wedge \xi) |\xi|^{-1/2}$$

は定理 9 の仮定をみたし, これより得られる結果は, シュレディンガー方程式に対する評価式 (†) の, 一般の分散型方程式の場合への自然な拡張となっている. 実際,

$$\frac{1}{2} \nabla a : \Sigma_a \rightarrow \Sigma_a^* \quad \text{と} \quad \frac{1}{2} \nabla a^* : \Sigma_{a^*} \rightarrow \Sigma_a^*$$

は互いに逆写像であり

$$\Sigma_{a^*}^* = \Sigma_a$$

がなりたつ. したがって

$$\begin{aligned} (x, \xi) \in \Gamma_a &\Rightarrow x \wedge \nabla a(\xi) = 0 \\ &\Rightarrow \nabla a^*(x) \wedge \xi = 0 \\ &\Rightarrow \tau(x, \xi) = 0 \end{aligned}$$

となるからである. 特に  $S$  を正定値対称行列としたとき

$$a(\xi) = |S\xi|^2 \Rightarrow a^*(x) = |S^{-1}x|^2$$

である. このとき,  $|\nabla a^*(x) \wedge D|^2$  は  $\Sigma_a^*$  上のラプラシアンを  $\mathbf{R}^n$  上の作用素へと斉次に拡張したものになっている.

**定理 9 の証明の概略.** 第 4 節で述べたように, 「Egorov の定理」から

$$a(\xi) = |\xi|^2$$

の場合の証明に帰着される (正準変換に関する Calculus (系 7) により, これは正当化される). このときは,

$$\Gamma_a = \{(x, \xi) \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0; |x \wedge \xi| = 0\}$$

であった. また, 例 3 でも述べたように

$$\tau(x, \xi) = |x|^{-3/2} (x \wedge \xi) |\xi|^{-1/2}$$

の場合には [Su5] の方法により示されるので, あとは次のような評価があればよい:

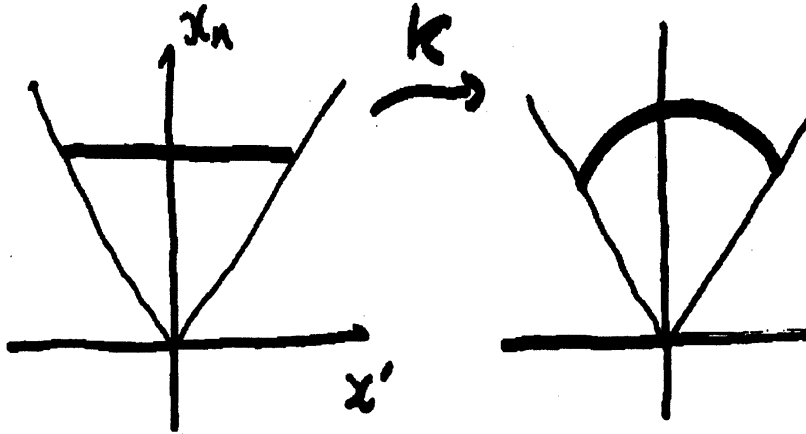
- $\sigma(x, \xi) \in A_1^m$  が,  $x \wedge \xi = 0$  のときに  $\sigma(x, \xi) = 0$  を満たすならば

$$\|\sigma(X, D)u\|_{L^2} \leq C \left( \|(x \wedge D)u\|_{L_{m-1}^2} + \|u\|_{L_{m-1}^2} \right).$$

この評価式を示すために、球面を平面とみなす座標変換

$$\kappa(x) = (x', \sqrt{x_n^2 - |x'|^2})$$

を施して扱いやすくする。ただし  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . これによ



り、座標変換に関する Calculus (系 8) から

$$b(x, \xi) = \sigma(\kappa(x), \xi \kappa'(x)^{-1}) \in \mathcal{A}_1^m,$$

$$\Theta(x, \xi) = \kappa(x) \wedge \xi \kappa'(x)^{-1}$$

として,

$$\|b(X, D)u\|_{L^2} \leq C \left( \|\Theta(X, D)u\|_{L_{m-1}^2} + \|u\|_{L_{m-1}^2} \right)$$

を示せばよい事がわかる。簡単な計算により

$$\Theta_{ij}(x, \xi) = x_i \xi_j - x_j \xi_i \quad (i < j < n),$$

$$\Theta_{in}(x, \xi) = -\sqrt{x_n^2 - |x'|^2} \xi_i \quad (i < n)$$

がわかるので、これは

$$\|b(X, D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{i=1}^{n-1} \|D_i u\|_{L_m^2(\mathbb{R}^n)}$$

を示す事に帰着される。また、集合  $\{(x, \xi); \xi' = 0\}$  上で  $b(x, \xi) = 0$  となる事がわかるので、テーラー展開により

$$\begin{aligned} b(x, \xi', \xi_n) &= b(x, 0, \xi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r_i(x, \xi) \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} r_i(x, \xi) \xi_i, \end{aligned}$$

ただし

$$r_i(x, \xi) = \int_0^1 (\partial_{\xi_i} b)(x, \theta \xi', \xi_n) \in \mathcal{A}_0^m$$

となる事がわかる. あとは  $r_i(X, D)$  の  $L_m^2$ - $L^2$ -有界性 (定理 4) を用いれば, 証明が完成する.

#### REFERENCES

- [AF] K. Asada and D. Fujiwara, *On some oscillatory integral transformations in  $L^2(\mathbf{R}^n)$* , Japan. J. Math. (N.S.) **4** (1978), 299–361.
- [BK] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, J. Analyse Math. **58** (1992), 25–37.
- [Ch] H. Chihara, *Smoothing effects of dispersive pseudodifferential equations*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1953–2005.
- [Crd] H. O. Cordes, *The technique of pseudodifferential operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [Cri] S. Coriasco, *Fourier integral operators in SG classes I: composition theorems and action on SG Sobolev spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **57** (1999), 249–302.
- [Du] J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Progress in Mathematics, **130**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.
- [DH] J. J. Duistermaat and L. Hörmander, *Fourier integral operators. II*, Acta Math. **128** (1972), 183–269.
- [Fu] D. Fujiwara, *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation*, J. Analyse Math. **35** (1979), 41–96.
- [Hör] L. Hörmander, *Fourier integral operators. I*, Acta Math. **127** (1971), 79–183.
- [Hos] T. Hoshiro, *On weighted  $L^2$  estimates of solutions to wave equations*, J. Anal. Math. **72** (1997), 127–140.
- [KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. II.*, Interscience, New York-London-Sydney, 1969.
- [KY] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.
- [KPV] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 33–69.
- [KW] D. S. Kurtz and R. L. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979), 343–362.
- [LP] F. Linares and G. Ponce, *On the Davey-Stewartson systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), 523–548.
- [Ru] M. Ruzhansky, *On the sharpness of Seeger-Sogge-Stein orders*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 357–362.
- [RS1] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A new proof of global smoothing estimates for dispersive equations*, Advances in pseudo-differential operators, 65–75, Oper. Theory Adv. Appl., **155**, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [RS2] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Global  $L^2$ -boundedness theorems for a class of Fourier integral operators*, to appear in Comm. Partial Differential Equations.
- [RS3] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A smoothing property of Schrödinger equations in the critical case*, to appear in Math. Ann.
- [RS4] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Smoothing effects for dispersive equations via canonical transformations*, preprint.
- [SSS] A. Seeger, C. D. Sogge and E. M. Stein, *Regularity properties of Fourier integral operators*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), 231–251.
- [Su1] M. Sugimoto, *A priori estimates for higher order hyperbolic equations*, Math. Z. **215** (1994), 519–531.

- [Su2] M. Sugimoto, *Estimates for hyperbolic equations with non-convex characteristics*, Math. Z. **222** (1996), 521–531.
- [Su3] M. Sugimoto, *Estimates for hyperbolic equations of space dimension 3*, J. Funct. Anal. **160** (1998), 382–407.
- [Su4] M. Sugimoto, *Global smoothing properties of generalized Schrödinger equations*, J. Anal. Math. **76** (1998), 191–204.
- [Su5] M. Sugimoto, *A Smoothing property of Schrödinger equations along the sphere*, J. Anal. Math. **89** (2003), 15–30.
- [Wa1] B. G. Walther, *A sharp weighted  $L^2$ -estimate for the solution to the time-dependent Schrödinger equation*, Ark. Mat. **37** (1999), 381–393.
- [Wa2] B. G. Walther, *Regularity, decay, and best constants for dispersive equations*, J. Funct. Anal. **189** (2002), 325–335.
- [Wat] K. Watanabe, *Smooth perturbations of the selfadjoint operator  $|\Delta|^{\alpha/2}$* , Tokyo J. Math. **14** (1991), 239–250.