数理解析研究所講究録
1492巻 2006年 48-51

A RELATION BETWEEN ω-LIMIT SETS AND POSITIVE TOPOLOGICAL ENTROPY OF GRAPH MAPS

沖縄工業高等専門学校　　知念　直紹 (Naotsugu Chinen)
Okinawa National College of Technology

1. Introduction

$\mathbb{N}$ を自然数全体、f をグラフ X からそれ自身への連続写像とする (このような f をグラフ写像という)。グラフ写像が正の位相的エントロピーをもつための必要十分条件でよく知られている結果は、グラフ写像が *s-horseshoe* ($s \in \mathbb{N}$) であることである。この結果は1993年に J. Llibre and M. Misiurewicz ([LM, Theorem B]) によって示された。この結果はかなり有効ではあるがその他の結果はあまり知られていない。力学系の主要な研究対象は軌道の ω 極限集合，すなわち各点の反復した回数を無限大にした将来において集積する点の集合の閉包の特徴を記述することにある。今回はグラフ写像において ω 極限集合と正の位相的エントロピーを持つことの関係を述べる。

閉区間上の力学系においては、

(1) 正の位相的エントロピーを持つことと、
(2) 周期点を含む無限の ω 極限集合が存在すること

が同値になることが知られている ([S]、[BC, p.124, p.153 and p.218]、[SKSF, Theorem 4.19, p.112]) 。また同様な結果がサークル上の力学系においても知られている ([C])。当然、グラフ上の力学系においても同様な結果が予想される。ここで、上述の J. Llibre and M. Misiurewicz の結果を思い出そう。グラフ X の閉区間とは、分岐点を含まない $[0,1]$ と同相な部分空間ことを指す。グラフ写像が *s-horseshoe* ($s \in \mathbb{N}$) であるとは、グラフ X の閉区間 I とその部分閉区間 $J_1, J_2, \ldots, J_s$ が存在して、$f(J_j) = I$ ($j = 1, 2, \ldots, s$) を満たすことである。また、*s-horseshoe* ($s \in \mathbb{N}$) であるグラフ写像は周期点を含む無限の ω 極限集合が存在することが知られている。よって、J. Llibre and M. Misiurewicz の結果から、正の位相的エントロピーを持つグラフ写像は周期点を含む無限の ω 極限集合が存在することがわかる。よって、逆に (2) から (1)、すなわち周期点を含む無限の ω 極限集合が存在するとき、正の位相的エントロピーを持つことを示せばよいことになる。以上のことを証明でき、以下のような定理が得られた。

Theorem 1.1. *Let f be a continuous map from a graph X to itself. The following statements are equivalent:*

(1) *f has positive topological entropy.*
(2) *There exist closed intervals J, K in X with pairwise disjoint interiors and $n \in \mathbb{N}$ such that J and K f^n-cover J and K.*
(3) *f has an infinite ω-limit set which contains a periodic orbit.*

同時期に，R. Hric と M. Malek によって同様な結果が preprint MA 47/2004 at the Mathematical Institute of Silesian University in Opava に発表された。しかし、この論文と彼らとは証明がかなり異なっている。また、彼らは A. Blokh の結果を使って証明をしているが、一方、ここでは 1 次元写像基本的な性質を使って、シンプルに証明することができた。

2. Definitions

Notation 2.1. 距離空間 (X,d) の部分空間 Y に対して、$\mathrm{Int}(Y)$, $\mathrm{Cl}(Y)$, $\mathrm{Bd}(Y) = \mathrm{Cl}(Y) \setminus \mathrm{Int}(Y)$ を Y の X での内部、閉包、境界とする。集合 P の濃度を $\mathrm{Card}(P)$ で表す。

Definition 2.2. 連続体 *(continuum)* とは空ではないコンパクト連結距離空間とする。閉区間 $[0,1]$ に同相な連続体を弧 *(arc)* という。交わりが有限の有限の弧の和で書ける連続体をグラフ *(graph)* という。また、サークルを含まないグラフを木 *(tree)* という。

Definition 2.3. Z をグラフ、Y を Z の部分空間で木、X を Y の部分空間とする。Y における X を含む最小の連結部分空間を $[X]_Y$ によって表す。とくに、$X=\{x,y\}$ のとき、$[X]_Y = [x,y]_Y$ とかく。また、$(x,y)_Y = [x,y]_Y \setminus \{x,y\}$, $(x,y]_Y = [x,y]_Y \setminus \{x\}$ and $[x,y)_Y = [x,y]_Y \setminus \{y\}$ と表す。

Definition 2.4. X をグラフ、$x \in X$ とする。

X をグラフより、x の連結な閉近傍 U_x が存在して、かってな x の連結な閉近傍 $U \subset U_x$ に対して $\mathrm{Card}(\mathrm{Bd}(U_x)) = \mathrm{Card}(\mathrm{Bd}(U))$ を満たす。$\mathrm{Card}(\mathrm{Bd}(U_x))$ を x の分岐数 (*order*) といい、$\mathrm{Ord}(x,X) = \mathrm{Card}(\mathrm{Bd}(U_x))$ と表す。

x が X の分岐点 *(branch point)* であるとは、$\mathrm{Ord}(x,X) \geq 3$ のときにいう。$B(X)$ を X の分岐点全体とする。

X の中の弧 J が閉区間 *(closed interval)* であるとは、$X \setminus B(X)$ の連結成分 e が存在して、$\mathrm{Cl}(e)$ は J を含むときにいう。

Definition 2.5. コンパクトな距離空間 (X,d) からそれ自身への連続写像 f、真部分連続体 J,K に対して、J *f-covers* K とは、部分連続体 $L \subset J$ が存在して、$f(L) = K$ を満たすときにいう。

Definition 2.6. f をコンパクトな距離空間 (X,d) からそれ自身への連続写像とする。f の固定点全体を $\mathrm{F}(f)$、周期点全体を $\mathrm{P}(f)$ とする。

$$\omega(x,f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cl}\left(\{f^k(x) : k \geq n\}\right)$$

を x の ω 極限集合 (ω-*limit set*) という。$y \in \omega(x,f)$ の必要十分条件はある部分列 $n_k \to \infty$ が存在して $f^{n_k}(x) \to y$ を満たすことである。また、$\omega(x,f)$ は空集合でないコンパクト集合で、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f(\omega(x,f)) = \omega(x,f),\ \omega(x,f) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \omega(f^i(x), f^n),\ f(\omega(x,f^n)) = \omega(f(x), f^n)$$

を満たすことが知られている ([BC, p.72])。また、$\omega(x,f)$ が有限のとき，[BC, Lemma IV4, p.72] よって、$\omega(x,f)$ はある点の周期軌道になることが知られている。

3. Lemmas

まず最初に cover の基礎的な性質を述べる。

Lemma 3.1. *Let $f : X \to X$ be a graph map and J, K and L closed intervals in X.*

(1) *If J f^{ℓ}-covers J for some $\ell \in \mathbb{N}$, J $f^{k\ell}$-covers J for each $k \in \mathbb{N}$.*
(2) *If J f^m-covers K and K f^n-covers L for some $m, n \in \mathbb{N}$, then J f^{m+n}-covers L.*

つぎに、グラフ写像における cover の性質を述べる。

Lemma 3.2. *Let $f : X \to X$ be a graph map, $K = [a,b]_K$ a closed interval in X, e the component of $X \setminus B(X)$ with $f(a) \in e$. Let J, L and L' be closed intervals such that $f(a) \in J \subset e$, $L \cup L' \subset J \setminus \{f(a)\}$ and $f(a) \in [L \cup L']_J$. If $f(b) \notin [L \cup L']_J$, then K f-covers either L or L'.*

つぎは、像が木の場合には簡単になることを述べる。

Lemma 3.3. *Let $f : X \to X$ be a graph map, and J and K closed intervals in X with $K \subset f(J)$. If $f(J)$ is a tree, then J f-covers K.*

基本的な結果と Lemma 3.1 などを使って以下のことが示せる。

Lemma 3.4. *The statements* (1) *and* (2) *in Theorem* 1.1 *are equivalent.*

以下の lemma は、固定点を含む無限の ω 極限集合でその固定点に落ち込む ω 極限集合の点が存在したとき、正の位相的エントロピーを持つことを示している。

Lemma 3.5. *Let $f : X \to X$ be a graph map and $\omega(x,f)$ an infinite with a fixed point z_0. If there exists a point $z_1 \in \omega(x,f) \setminus \{z_0\}$ with $f(z_1) = z_0$, then f has positive topological entropy.*

メインの補題を示す。

Lemma 3.6. *Let $f : X \to X$ be a graph map and $x \in X$. If $\omega(x, f)$ is infinite with a fixed point z_0, then f has positive topological entropy.*

4. The proof of Theorem 1.1

Lemma 3.6を使うとメイン定理の重要な部分を証明できる。

Theorem 4.1. *The statements* (1) *and* (3) *in Theorem* 1.1 *are equivalent.*

References

[AC] T. Arai and N. Chinen, *Characterizations of tree maps having positive entropy,* to submitted.

[AKM] R.L. Adler, A.G. Konhein and M.H. McAndrew, *Topological entropy,* Trans. Amer. Math. Soc., **114** (1965), 309–319.

[B1] L. Block, *Homoclinic points of mappings of the interval,* Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 576–580.

[BC] L. Block and W. Coppel, *Dynamics in One Dimension,* Lecture Notes in Math. 1513, Springer-Verlag, 1992.

[C] N. Chinen, *Circle maps having an infinite ω-limit set which contains a periodic orbit have positive topological entropy,* Proc. Amer. Math. Soc.**131** (2003), 3547–3551.

[LM] J. Llibre and M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps,* Topology, **132** (1993), 649–664.

[MS] W. de Melo and S. van Strien, *One-dimensional dynamics,* Series of Modern Surveys in Math., Springer, Berlin, 1993.

[N] S.B. Nadler Jr, *Continuum Theory An Introduction,* Pure and Appl.Math.158(1992).

[S] A.N. Sharkovsky, *The behavior of a map in a neighborhood of an attracting set,* Ukrain. Mat. Ž. **41** (1966), 60–83. (in Russian) ; translation in Amer. Math. Soc. Transl. **97** (1970), 227–258.

[SKSF] A. Sharkovsky, S. Kolyada, A. Sivak, and V. Fedorenko, *Dynamics of one-dimensional maps,* Translated from the 1989 Russian original, Math. and its Appl., 407. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.