

複素エノン写像の双曲型パラメータ領域内の ループについて

On Loops in the Hyperbolic Loci of the Complex Hénon Maps

京都大学大学院理学研究科 荒井迅 (Zin ARAI)

Department of Mathematics, Kyoto University

email: arai@math.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに — Hubbard の予想 —

本稿の目的は複素ヘノン写像族のパラメータ空間の構造に関する J. Hubbard の予想に対し部分的な解決を与えることである。以下パラメータ $a, c \in \mathbb{C}$ を持つヘノン写像を

$$H_{a,c} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (x^2 + c - ay, x).$$

で表わす。まず Hubbard 予想とはどのような予想であるか、Bedford と Smillie の最近の論文 [8] を参考に簡単に述べる。

まず有界な軌道の集合と、その実平面によるスライス

$$K_{a,c}^{\mathbb{C}} := \{p \in \mathbb{C}^2 : \{H_{a,c}^{on}(p)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ is bounded}\},$$

$$K_{a,c}^{\mathbb{R}} := K_{a,c}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$$

を定義する。ヘノン写像のパラメータ空間は、実で考える場合は \mathbb{R}^2 、複素で考える場合は \mathbb{C}^2 となるが、これらの部分空間を次のように定義する。

$$\mathcal{H}^{\mathbb{R}} := \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 : H_{a,c}|_{K_{a,c}^{\mathbb{R}}} \text{ is a hyperbolic full horseshoe}\},$$

$$\mathcal{H}^{\mathbb{C}} := \{(a, c) \in \mathbb{C}^2 : H_{a,c}|_{K_{a,c}^{\mathbb{C}}} \text{ is a hyperbolic full horseshoe}\}.$$

ここで “hyperbolic full horseshoe” とは一様双曲的な不変集合であって、2-シンボルの両側記号列空間 Σ_2 の full shift と位相共役となるようなものを意味する。

ヘノン写像がいつ hyperbolic full horseshoe となるかという問題に関しては 1970 年代からの長い研究の歴史があった。次のような 3 つの空間を定義しよう。

$$DN := \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 : c < -(5 + 2\sqrt{5})(|a| + 1)^2/4\},$$

$$EMP := \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 : c > (|a| + 1)^2/4\},$$

$$HOV := \{(a, c) \in \mathbb{C}^2 : |c| > 2(|a| + 1)^2\}.$$

ヘノン写像の双曲性に関する最初の数学的な結果は Devaney と Nitecki [13] によって得られた $DN \subset \mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ というものであった。彼らはまたパラメータ (a, c) を EMP から選ぶと $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$ は空集合となることも示した。Devaney と Nitecki の結果は実ヘノン写像に関するものであったが、後に Hubbard と Oberste-Vorth [21] は複素ヘノンに対してより改良された評価 $HOV \subset \mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ を示した。

Hubbard 予想の最初の部分は、 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ と $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ の関係に関するものである。Bedford-Lyubich-Smillie の結果 [4, Theorem 10.1] により $\mathcal{H}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ となることは既にわかっており、問題は $\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ に含まれるパラメータであって、 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ に含まれないものはどのようなパラメータであるかという点となる。より正確に記述するために、次のように $\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ を3つの集合に分割しよう [8]。

定義 1. パラメータ $(a, c) \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ は $(a, c) \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ のときタイプ 1, また $K_{a,c}^{\mathbb{R}} = \emptyset$ のときタイプ 2, それ以外のときはタイプ 3 であると定義する。

$DN \subset \mathcal{H}^{\mathbb{R}} \subset (\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2)$ が示されていることから、タイプ 1 のパラメータは存在する。またタイプ 2 のパラメータも $EMP \cap HOV$ を含むことから空ではない。よって残るのは、タイプ 3 のパラメータは存在するかという問題であるが、これが未解決であった。

予想 1 (Hubbard). タイプ 3 のパラメータは存在する。

もう一つの Hubbard 予想は、パラメータ空間のより深い構造に関わるもので、ヘノン写像が hyperbolic full horseshoe となるようなパラメータ空間の基本群のモノドロミー表現を用いて記述される。

$\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ の連結成分で HOV を含むものを $\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ と書くことにしよう。基点 $(a_0, c_0) \in DN$ を適当に定めると、Devaney と Nitecki の結果を用いて位相共役 $h_0 : K_{a_0, c_0}^{\mathbb{C}} \rightarrow \Sigma_2$ を canonical に選ぶことができる。いま基点を (a_0, c_0) に持つループ $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ を考えると、 $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ 内ではヘノン写像はずっと hyperbolic full horseshoe なので、 γ に沿って位相共役の連続な族 $h_t : K_{\gamma(t)}^{\mathbb{C}} \rightarrow \Sigma_2$ を全ての $t \in [0, 1]$ に対して構成することができる。これを用いて $\rho(\gamma) := h_1 \circ h_0^{-1}$ とおくことにより

$$\rho : \pi_1(\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}, (a_0, c_0)) \rightarrow \text{Aut}(\Sigma_2).$$

という準同形が得られる。

予想 2 (Hubbard). ρ は全射である。

以下では Conjecture 1 の肯定的な解決と Conjecture 2 への部分的な解答を与える。

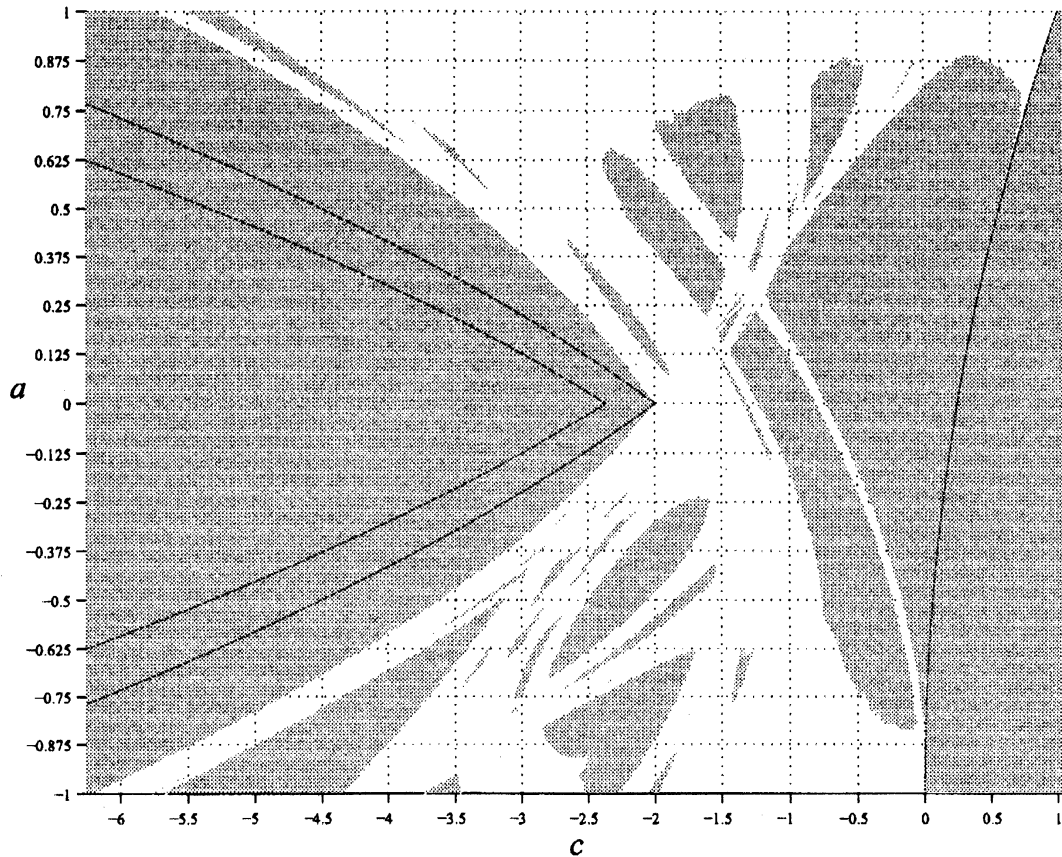


図1 Hyperbolic plateaus of the real Hénon map

2 主結果

定理 2. タイプ 3 のパラメータは存在する. とくに

$$(a, c) \in \{-1\} \times [-5.625, -4.5625] \cup \{1\} \times [-5.4785, -5.3215]$$

はタイプ 3 のパラメータから構成される.

$\gamma_0, \gamma_r, \gamma_p$ を $(1, -10) \in DN$ を基点とする \mathcal{H}_0^C 内のループであり, 基点を出て一周する間に実平面 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ とただ一度だけ, それぞれ $(1, 10), (-1, 5), (1, 5.4)$ において交わるものとする.

定理 3. 単位元および $\rho(\gamma_0), \rho(\gamma_r), \rho(\gamma_p)$ は $\text{Aut}(\Sigma_2)$ の互いに異なる元を与える.

これらの定理は次の補題から従う.

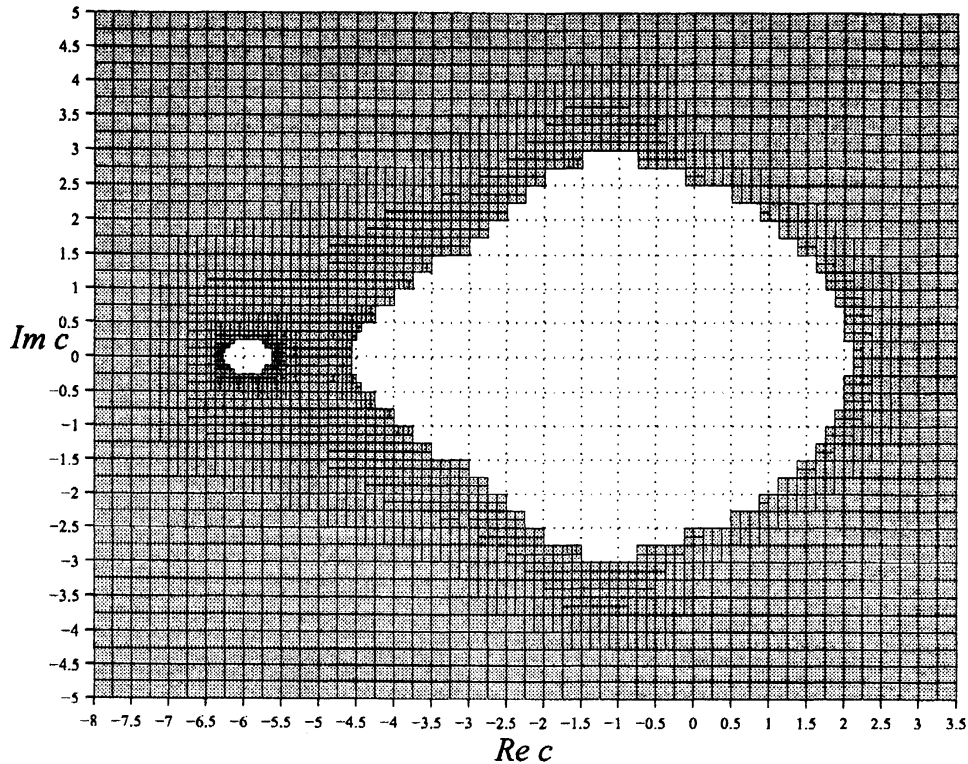


図 2 hyperbolic horseshoe locus of $H_{-1,c}$

補題 4. 図 2 および 3 で色づけされている領域からパラメータを c を選び, 図 2 の場合は $a = -1$, 図 3 では $a = 1$ とおくと $H_{a,c}$ はその鎖回帰集合 $\mathcal{R}(H_{a,c})$ 上で一様双曲的である.

補題 4 は $K_{a,c}^C$ が一様双曲的であるとまでは主張していないが, 実は $\mathcal{R}(H_{a,c})$ と $K_{a,c}^C$ は \mathcal{H}^C 上では一致する.

系 5. 図 2 および 3 の領域において $H_{a,c}|K_{a,c}^C$ は *hyperbolic full horseshoe* である.

系 5 の証明. (a, c) を図 2 の領域の点とする. $(1, -10)$ と (a, c) を結ぶ曲線 γ を図 2 の領域からとる. $(1, -10)$ においては $K_{a,c} = \mathcal{R}(H_{a,c})$ が成立するが, $K_{a,c}$ の半連続性 [5, Theorem 3.1] および \mathcal{R} -構造安定性定理よりこの等式は γ 上の全ての点で成立し, 従ってとくに (a, c) でも成立する. よって $(1, -10) \in DN$ と補題 4 より系は示された. 図 3 の場合も同様. □

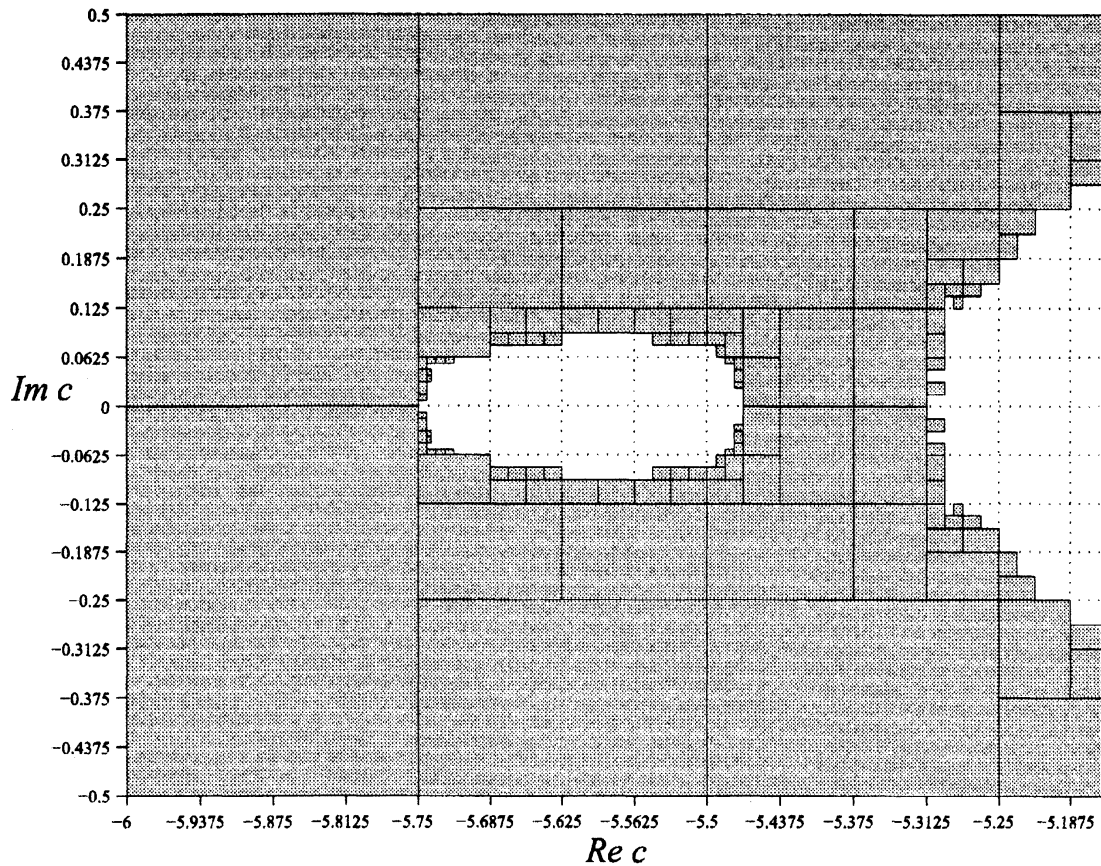


図3 hyperbolic horseshoe locus of $H_{1,c}$

補題 6. パラメータ $(a, c) = (1, -10), (1, -5.4), (1, +10), (-1, -5)$ において $H_{a,c}|K_{a,c}^R$ 上の力学系は互いに全て異なる(共役ではない).

$(a, c) = (1, -10)$ で系は hyperbolic full horseshoe なので $(1, -10)$ はタイプ 1 のパラメータであり, また $(a, c) = (1, +10)$ では $K_{a,c}^R = \emptyset$ なので $(1, 10)$ はタイプ 2 である.

これらの補題は計算機を援用して証明されるがそのアルゴリズムは後の節に残し, 補題から定理の証明を見よう.

定理 1 の証明. R_r と R_p をそれぞれ図 2 と 3 で色づけられた領域としよう. また直線 I_r と I_p を

$$I_r = \{-1\} \times [-5.625, -4.5625], \quad I_p = \{1\} \times [-5.4785, -5.3215]$$

で定義する. $I_r \subset R_r \cap \{\text{Im } c = 0\}$ と $I_p \subset R_p \cap \{\text{Im } c = 0\}$ が成立することに注意. 以

下 I_r と I_p がタイプ 3 のパラメータの集合に含まれることを示す.

(a_0, c_0) を $I_r \cup I_p$ の点とすると, DN から (a_0, c_0) への曲線を R_r もしくは R_p の中で取れるので, $(a_0, c_0) \in \mathcal{H}^C$ であることがわかる. 示さねばならないことは K_{a_0, c_0}^R が空ではなく, Σ_2 上の full shift と共役でもないことであるが, これは補題 6 より従う. よって定理 2 は証明された. \square

定理 3 の証明には Bedford と Smillie の定理を用いる. (a_1, c_1) と (a_2, c_2) を $\mathcal{H}^C \cap \mathbb{R}^2$ のパラメータとし, γ_1 と γ_2 を \mathcal{H}_0^C 内の基点を $(a_0, c_0) \in DN$ に持つループでそれぞれ (a_1, c_1) と (a_2, c_2) を通るものとする.

定理 7 ([8, Theorem 5.2]). もし $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_2)$ ならば, $H_{a_1, c_1} | K_{a_1, c_1}^R$ と $H_{a_2, c_2} | K_{a_2, c_2}^R$ は位相共役となる.

定理 3 は定理 7 と補題 6 よりすぐに従う.

3 双曲性を証明するためのアルゴリズム

この節では一様双曲性を証明するためのアルゴリズム [2] を簡単に解説する.

M を多様体, f を M の微分同相写像とする. Λ を f のコンパクト不変集合とし, $T\Lambda$ で接束 TM の Λ 上への制限を表わすことにする.

定義 8. f が Λ 上で一様双曲的である, もしくは Λ が一様双曲的不変集合であるとは, $T\Lambda$ が Tf -不変な部分束の直和 $T\Lambda = E^s \oplus E^u$ に分解し, さらに定数 $c > 0$ と $0 < \lambda < 1$ が存在して

$$\|Tf^n|_{E^s}\| < c\lambda^n \quad \text{and} \quad \|Tf^{-n}|_{E^u}\| < c\lambda^n$$

が全ての $n \geq 0$ で成立することをいう. ここで $\|\cdot\|$ は M の適当な計量である.

2つの定数 c と λ を同時に制御しなくてはならないことから, この定義に従って一様双曲性を証明するのは一般に簡単ではない. 広く用いられる “cone fields” を使用する議論も同様の困難を持つ. M 上に $T\Lambda$ の分解に沿って上手に計量を構成することにより $c = 1$ とすることもできるが, そのような計量の構成はそれ自体がまた難しい問題である.

この困難を回避するため, ここでは擬双曲性という概念を導入する.

まず f の微分 Tf はそれ自体で力学系 $Tf: TM \rightarrow TM$ を与えていると思う. Λ が f -不変であることから $T\Lambda$ は Tf -不変となり, よって $Tf: T\Lambda \rightarrow T\Lambda$ という力学系が考えられる. 以下では Tf の軌道はそれが TM の 0-切断の像に含まれる, すなわち 0 ベクト

ルのみから成るときに**自明である**と言うことにする.

定義 9. f が Λ 上で擬双曲的であるとは, $Tf: T\Lambda \rightarrow T\Lambda$ が非自明な有界軌道を持たないことをいう.

一様双曲性から擬双曲性が従うことを見るのは簡単である. しかし逆は一般に成立せず, 擬双曲性は一様双曲性より真に弱い概念である. ところが, もし $f|_{\Lambda}$ が鎖回帰的である, すなわち $\mathcal{R}(f|_{\Lambda}) = \Lambda$ が成立するならば, これらの概念は一致することがわかる.

定理 10 ([9, 23]). $f|_{\Lambda}$ が鎖回帰的ならば, f が Λ 上で一様双曲的になるための必要十分条件は f が Λ 上で擬双曲的であることである.

次に, この擬双曲性の定義を孤立化近傍の言葉を使ってより計算機で扱いやすい形に言い換えよう.

コンパクト集合 N が f の**孤立化近傍**であるとは [19], その最大不変集合

$$\text{Inv}_f N := \{x \in N \mid f^n(x) \in N \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

が N の内点集合 $\text{int } N$ に含まれることをいう. また f の不変集合 S はある孤立化近傍 N が存在して $\text{Inv}_f N = S$ となるとき**孤立不変集合**であるという.

もし $Tf: T\Lambda \rightarrow T\Lambda$ の非自明な有界軌道が 1 つでも存在したならば, Tf がファイバー方向に線型であることから, その軌道の線型倍も全て非自明な有界軌道となり, 従って $T\Lambda$ の 0-切断の任意の近傍は非自明な有界軌道を持つ. このことから, 擬双曲性の定義は $T\Lambda$ の 0-切断が $Tf: T\Lambda \rightarrow T\Lambda$ の孤立不変集合であることであると言ってもよいことがわかる.

さらに, 実は 0-切断を含む孤立化近傍 N を何でもよいから 1 つ見つけてしまえば, 自動的に $\text{Inv}_{Tf} N$ は 0-切断そのものになることが示され, よって次の補題が成り立つ.

命題 11. $Tf: T\Lambda \rightarrow T\Lambda$ の孤立化近傍 $N \subset T\Lambda$ であって $T\Lambda$ の 0-切断の像を含むものが存在するならば, Λ は擬双曲的である.

この命題を用いるためには, まず定理 10 の仮定が複素ヘノン写像の場合に満たされているか確認しなくてはならない. Devaney と Nitecki に従い次のように定義しよう.

$$R(a, c) := \frac{1}{2}(1 + |a| + \sqrt{(1 + |a|)^2 + 4c}),$$

$$S(a, c) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq R(a, c), |y| \leq R(a, c)\}.$$

すると次が示される.

補題 12. 鎖回帰集合 $\mathcal{R}(H_{a,b})$ は $S(a,b)$ に含まれる. さらに, $H_{a,b}$ を $\mathcal{R}(H_{a,b})$ に制限すると鎖回帰的である.

ここでパラメータ a を 1 もしくは -1 に固定し, $H_{1,c}$ および $H_{-1,c}$ を複素パラメータ c を 1 つもつ 1 パラメータ族だと思う. パラメータ c 平面において正方形 C

$$C = \{c \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} c| < 8, |\operatorname{Re} c| < 8\}.$$

で定義すると $(\mathbb{C}^2 \setminus HOV) \cap \{a = \pm 1\}$ は $\{\pm 1\} \times C$ に含まれる.

補題 4 を証明するためには, [2] の algorithm 15 を初期パラメータ集合を C とおいて $H_{\pm 1,c}$ に対して走らせればよい. 2GHz の PowerPC 970 CPU でこの計算にかかった時間は $a = -1$ (図 2) に対して 530.3 時間, $a = 1$ (図 3) に対して 654.0 時間である.

4 周期点を数えよう

この節では補題 6, すなわち $(1, -10)$, $(1, -5.4)$, $(1, 10)$, $(-1, -5)$ において $H_{a,c}$ が $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$ 上で異なる dynamics を持つことを証明する. 方針は全くもって簡単であり, $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$ 内の周期点の数がそれらのパラメータで異なっていることを示せばよい. 実際, $\operatorname{Fix}(H_{a,c}^{\circ n}) \cap \mathbb{R}^2$ の点の数は正確に次の表 1 となることが証明できる.

表 1 The number of points in $\operatorname{Fix}(H_{a,c}^{\circ n}) \cap \mathbb{R}^2$

	$(1, -10)$	$(1, -5.4)$	$(-1, -5)$	$(1, +10)$
$n = 3$	8	8	2	0
$n = 4$	16	16	16	0
$n = 5$	32	22	22	0
$n = 6$	64	52	52	0
$n = 7$	128	114	72	0

複素平面全体で考えると $\operatorname{Fix}(H_{a,c}^{\circ n})$ は常に 2^n の点を持つ [14, Theorem 3.1] ことに注意すると, この表からどのくらいの周期点が実平面 \mathbb{R}^2 から $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ に逃げているかを読みとることができる.

この表はコンレイ指数理論を用いて証明される. 証明の概略を以下で見よう. 詳しくは [1] など, またコンレイ指数については [17, 19]などを参照のこと.

自然数 n を固定し, $H_{a,c}$ の n -周期点の数を求めることを考える. まず実平面上で

$H_{a,c} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考え、計算機上での有向グラフ表現を用いて n -周期点が存在する可能性のある領域を絞り込み、次にそれらの領域それぞれについて index pair を構成する。その領域に本当に周期点が存在することを示すためには次のコンレイ指数版 Lefschetz 不動点定理を用いる。

定理 13 ([17, Theorem 10.102]). f を連続写像, (P_1, P_0) を f の index pair とし, f より誘導される homology index map を f_{P_*} と書く. このとき

$$\sum_k (-1)^k \operatorname{tr} f_{P_*k}^n \neq 0$$

ならば $\operatorname{Inv}(\operatorname{cl}(P_1 \setminus P_0), f)$ は f^n の不動点を含む。

この定理を各 index pair に適用することで、それぞれの index pair が少なくとも 1 つの不動点を持つことが示され、従って $\operatorname{Fix}(H_{a,c}^{\circ n}) \cap \mathbb{R}^2$ の要素数についての下からの評価が得られる。

上からの評価を得る方法としては、まずそれぞれの index pair 内に不動点がただ 1 つしか存在しないことを示す方法が考えられる。いま考えている場合では全ての周期点が双曲的であることから、Hartman-Grobman の定理の成立する領域の大きさを評価することでこれは可能になる [3, Proposition 4.1]。しかし、ヘノン写像の場合にはより簡明な方法がある。上で注意したように $H_{a,c}^{\circ n}$ の不動点の数は重複度込みで数えると常に 2^n であり、いまの場合には双曲性から正確に 2^n の異なる点が存在することがわかる。よって、もし $H_{a,c}^{\circ n}$ が $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ 内に k 個の異なる点を持つならば、 $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$ 内の不動点の数は $2^n - k$ 以下となることが従う。すなわち、定理 13 を今度は $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ に対して適用することにより、 $\operatorname{Fix}(H_{a,c}^{\circ n}) \cap \mathbb{R}^2$ の点の数の上からの評価が得られる。

実際にコンレイ指数の計算を実行すると、補題 6 の 4 つのパラメータ全てにおいて、この方法で得られる上からの評価と下からの評価は一致する。これにより表 1 は証明された。

参考文献

- [1] 荒井 迅, 計算機支援による離散力学系の解析, 応用数理, 15 (2005), 20–31.
- [2] Z. Arai, On Hyperbolic Plateaus of the Hénon Maps, preprint.
- [3] Z. Arai and K. Mischaikow, Rigorous computations of homoclinic tangencies, preprint.

- [4] E. Bedford, M. Lyubich and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of C^2 . IV: The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. math.*, **112** (1993), 77–125.
- [5] E. Bedford and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of C^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity, *Invent. math.*, **103** (1991), 69–99.
- [6] E. Bedford and J. Smillie, Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: Tangencies, *Ann. Math*, **160** (2004), 1–26.
- [7] E. Bedford and J. Smillie, Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: II. small Jacobian, preprint.
- [8] E. Bedford and J. Smillie, The Hénon family: The complex horseshoe locus and real parameter values, preprint.
- [9] R. C. Churchill, J. Franke and J. Selgrade, A geometric criterion for hyperbolicity of flows, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **62** (1977), 137–143.
- [10] M. J. Davis, R. S. MacKay and A. Sannami, Markov shifts in the Hénon family, *Physica D*, **52** (1991), 171–178.
- [11] M. Dellnitz and O. Junge, Set oriented numerical methods for dynamical systems, *Handbook of dynamical systems II*, North-Holland, 2002, 221–264.
- [12] M. Dellnitz and O. Junge, The web page of GAIO project, <http://math-www.uni-paderborn.de/~agdellnitz/gaio/>
- [13] R. Devaney and Z. Nitecki, Shift automorphisms in the Hénon mapping, *Commun. Math. Phys.*, **67** (1979), 137–146.
- [14] S. Friedland and J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), 67–99.
- [15] S. L. Hruska, A numerical method for proving hyperbolicity of complex Hénon mappings, preprint, [arXiv:math.DS/0406004](https://arxiv.org/abs/math/0406004).
- [16] S. L. Hruska, Rigorous numerical studies of the dynamics of polynomial skew products of C^2 , preprint, [arXiv:math.DS/0502038](https://arxiv.org/abs/math/0502038).
- [17] T. Kaczynski, K. Mischaikow and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, **157**, Springer-Verlag, 2004.
- [18] O. Knüppel, PROFIL/BIAS Interval Arithmetic Package.
<http://www.ti3.tu-harburg.de/knueppel/profil>
- [19] K. Mischaikow and M. Mrozek, The Conley index theory, *Handbook of Dynamical Systems II*, North-Holland, 2002, 393–460.

- [20] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, 2000.
- [21] R. W. Oberste-Vorth, *Complex Horseshoes and the Dynamics of Mappings of Two Complex Variables*, PhD thesis, Cornell University, 1987.
- [22] C. Robinson, *Dynamical systems; stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [23] R. J. Sacker and G. R. Sell, Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I, *J. Differential Equations*, **27** (1974) 429–458.
- [24] A. Sannami, A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family, *Japan J. Appl. Math.*, **6** (1989), 291–300.
- [25] A. Sannami, On the structure of the parameter space of the Hénon map, *Towards the harnessing of chaos*, 289–303, Elsevier, Amsterdam, 1994.