数理解析研究所講究録
1496 巻 2006 年 130-136

弾塑性体における剪断変形の記憶

鳥取大・工 応用数理 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)
Dept. Applied Mathematics & Physics, Tottori Univ.
パリ第7大 & ESPCI 関本 謙 (Ken SEKIMOTO)
Univ. Paris 7 & ESPCI

1 はじめに

「物入れた記憶で立っている袋」[1] という川柳がある。ものを入れたことを人間が記憶している、ということでもあるのだが、紙袋のほうでも、自分に物が入っていたときの形を保っていて、その形のおかげで立っている、という即物的解釈も成立しないわけではなかろう。今回の講演で扱う話は、この紙袋のように変形の記憶をもつ物体の話である。ただし、変形の効果が形ではなく力学的性質として現れる点が違う。

本講演で考える物体は、一種の粘弾性体である。通常の粘性流体 (Newton 流体) の応力がその瞬間の変形速度にのみ依存していて過去の変形履歴とは無関係であるのとは対照的に、粘弾性をもつ流体における応力場は、ある時間尺度の範囲内で過去の変形履歴に依存する。ただし、普通の粘弾性体では一定の緩和時間があって、それよりも長い時間が経過すると変形履歴の効果は失われる。この緩和時間が無限大になるような場合には、これを一種の「記憶」と考えることができるだろう。

流体に記憶をもたせるには、塑性があればよい。構成関係式が、ある降伏応力を境に流体的な挙動と固体的な挙動の切り替えを示すような性質をもつとき、この物質は塑性をもつ、という。この切り替えを粘弾性体の緩和時間で言い換えると、緩和時間が有限から無限大に切り替わることになる。したがって、流体的な状態で変形を生じさせ、その応力を固体的な状態で記憶することができる。

本講演では、研究背景を説明したあと、ある単純な (2+1 次元の) モデルを用いて、弾塑性体における記憶現象の過程および帰結を論じる。まずは、解析の鍵となる「応力渦度」の概念を説明し、その時間発展の方程式を導く。モデル方程式系において、2 次元的な非一様性をもつ剪断変形を生じさせると、その結果として渦状の内部応力が系のなかに閉じこめられる。この内部応力の存在により、再流動化に必要な実効的降伏応力が低下する。これが、変形の効果が力学的性質として現れる、ということの意味である。なお、都合により本稿では図は省いているので、論文 [2] のほうを併せて参照していただきたい。

2 背景

2.1 Bingham 塑性

塑性という用語は固体と液体の中間的な力学的性質を指す用語だが、その具体的な内容は多様である。本稿では、Bingham モデル [3] という単純な塑性モデルを基礎としている。塑性の内容が多様であるというのは、たとえば金属で塑性といえば弾性限界を超えたときに示す性質 (針金を曲げると戻らないということ) を指し、そこでは応力と歪みの関係が問題になるのに対し、ペーストや

エマルジョンで塑性といえば流動開始に必要な剪断応力の閾値が存在することを指し、そこで問題となっているのは応力と歪み速度の関係である、というようなことを意味している。物質が違えば性質が違う (たとえば金属における加工硬化はエマルジョンにはない性質である) ので、塑性の定式化には、固体側からのアプローチが適切である場合もあれば、流体側からのアプローチが適切である場合もある、ということだ。

Bingham モデルは、上記の分類で言えば流体側からのアプローチであり、応力と変形速度のあいだの区分線形的な関係式として塑性を定式化する。単純剪断流の場合に式を具体的に書くと、剪断応力 σ と速度勾配 $\dot{\gamma}\ (=\partial_x \dot{w} > 0)$ の関係を、Bingham モデルでは

$$\eta\dot{\gamma} = \begin{cases} 0 & (|\sigma| < \sigma_Y) \\ \sigma - \sigma_Y \,\mathrm{sgn}(\sigma) & (|\sigma| > \sigma_Y) \end{cases} \tag{1}$$

とする。ここで σ_Y は 応力の閾値であって「降伏応力」と呼ばれる。応力が降伏応力よりも小さければ流動は生じない。他方、応力が降伏応力よりも大きい場合は、$\sigma - \sigma_Y = \eta\dot{\gamma}$ という、Newton 流体と似たような関係式に従う。

ところで、Bingham モデルでは非流動状態を変形ゼロすなわち剛体とみているが、これでは非定常な流動化の過程を見ることができないし、内部応力を記述するのにも都合が悪い。本稿では、後述するように、Bingham 塑性モデルに弾性を加えたモデルを扱うことにする。

2.2 実験的背景: 塑性体の記憶

Bingham モデルが記述するものは一種の非 Newton 流体である。このモデルで記述できそうな系で、なおかつ塑性体特有の現象を示す実験系として、中原&松尾 [4, 5] によるペーストの記憶実験を紹介する。

炭酸カルシウム粉末に水を加え、どろどろしたペーストを作る。このペーストを浅い容器に流し込み、そのまま放置すると、やがて表面から水が蒸発して炭酸カルシウムが収縮し、翌日あるいは数日後に多数の乾燥亀裂ができるのが観察される。この亀裂のパターンが何で決まるのか、というのが問題である。

中原氏らは、この亀裂パターンが、過去の流れの様子を反映していることを発見した。ペーストを容器に流し込んだあと、ある方向に容器をゆすって、そのまま乾燥するまで放置すると、典型的には、ゆすった方向と垂直に亀裂ができる。固まるまでは数日オーダーの時間がかかるのだから、ペーストは少なくとも数日前のことを覚えていることになる。それどころか、密閉した箱に入れて蒸発を止め、1ヶ月後にふたを開けて乾燥させたところ、やはり同じ方向に亀裂ができた。ペーストの記憶は1ヶ月くらいでは消えないことが分かる。

記憶が生じる条件を調べるため、中原氏らは、粉と水の比率および加振強度を系統的に変えて記憶効果の有無を調べた。その結果、この現象には塑性が本質的であることが分かった。水が少なすぎたり加振強度が弱かったりすると、ペーストは流動化せず、亀裂はランダムになる。記憶効果が生じるパラメータ領域と生じないパラメータ領域の境界は、レオメータで測定した降伏応力のラインと見事に一致する。なお、水が多すぎたり加振強度が強すぎたりすると、表面が波立つような大きな流れが生じて、記憶は消えてしまう、ということも分かった[1]。

[1]なお、炭酸カルシウムの代わりに別のある物質を用いると、降伏応力のラインの近くでは炭酸カルシウムと同じ結果が得られるが、流れが生じた場合は、流れの方向と平行に亀裂が走ることが分かっている。ただし、流れが強すぎると記憶が消去されるのは同じである。

この実験では、加振によって何かが塑性体のなかに生じ、それが亀裂の生成に影響すると考えられる。それはミクロな接触の変化だとか密度揺らぎであるかもしれないし何らかのマクロな場であるかもしれないが、とにかくそれは数日あるいは1ヶ月先まで残ると考えなければならない。確実に言えるのは、これが塑性と関連しているということだ。

2.3 理論的背景: 内部応力

ペーストの記憶効果に対するひとつの可能な解釈は、内部応力の形で剪断変形を記憶している、ということである [6]。内部応力 (internal stress) とは、外からの支えがなくても物体や物質の内部に存在できる応力のことである。内部応力は系が受けた力学的な扱いの一部を記憶している。特に材料を加工する過程を念頭に置く場合には、残留応力 (remanent stress) という用語もよく用いられる。

内部応力は、応力の「非ポテンシャル部分」という形で数学的に定式化される。通常の弾性体の応力場は、変位の勾配で定まるという意味でポテンシャルで書けていて、このことから直ちに、外からの荷重を取り除けば応力ゼロに戻ることが示される。しかし、内部応力は、少なくとも一価のポテンシャルでは書けない。

分かりやすい例は、金属などの結晶における線欠陥のまわりの応力場である [7, §29]。この例では、ひずみを積算して変位を求めようとすると、変位の値が経路によって異なった値になってしまう。ただし、変位の多価性は格子サイズの整数倍に限られる。これはちょうど、流体力学で、点渦のまわりの流れをポテンシャルで表示しようというのと同じような状況である。渦が量子化されていればたしかにそういうことは可能だろう。結晶においても多価ポテンシャルによる線欠陥の特徴づけは有効である。しかしペーストのような非結晶的な系では多価ポテンシャルが量子化される理由はないし、またポテンシャルにこだわる必要性があるとも思えない。

内部応力に比例する内部歪みというものがあるとしよう。Eshelby[8] は、3 次元の連続体で、不整合テンソルというものを定義できることを示した。これは歪みの 2 階微分から非ポテンシャル部分を抽出したもので、内部歪みの源泉項として扱うことができる。流体力学で言えば、流れの回転部分を Biot-Savart で記述することに相当する。

静的な記述は Eshelby の不整合テンソルでよいとして、我々が知りたいのは、動的な過程である。たとえば

- 内部応力はどうやって生じるのか?
- 内部応力はどのように保持されるのか?
- 内部応力の存在の影響はどういう形で現れるのか?

という問題に答えるためには、流体力学でいうところの渦度方程式に相当するものを考え、内部応力の時間発展を考察する必要がある。

Eshelby のように 3 次元の状況を考えるのは複雑すぎるので、ここでは 2 次元の点渦に相当する状況で「応力渦度」を定義し、その時間発展を考察することにしよう。

3 応力渦度

3.1 離散モデル

まずは多数の剛体棒を束にした系を考える。棒の位置は (x, y) 面で離散的に指定されており、結晶かもしれないしランダム配置かもしれないが、いずれにせよ軸の位置は固定されている。剛体棒に許されているのは、z 方向にすべる運動だけである。もしすべりの変位を離散化すると結晶と同じになるが、ここでは、すべりの変位は連続変数であるとする。

それぞれの棒 (i 番目) の変位をあらわす変数を w_i としよう。運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 w_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_j^{(i)} f_{ji} + F_i^{\mathrm{ext}}, \tag{2}$$

のように書ける。相互作用 f_{ij} についての構成関係式として、

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}f_{ij}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\zeta}\Phi(f_{ij}) = \frac{\mathrm{d}w_{ij}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

という Maxwell 型の粘弾性を仮定する。ここで $w_{ij} = w_i - w_j$ は 棒の相対変位であり、κ の項は弾性部分、$\Phi()$ は非弾性部分をあらわす。もし非弾性部分が Newton 粘性なら (つまり $\Phi()$ が線形関数なら)、このモデルは古典的 Maxwell モデルに帰着する。他方、もしも $\Phi()$ がゼロなら、流動は生じない (弾性変形のみが生じる) ことになる。我々は、両者の切り替えが可能となるように

$$\Phi(f_{ij}) = \begin{cases} 0 & (\text{for } |f_{ij}| < f_{\mathrm{Y}}) \\ f_{ij} - \dfrac{f_{ij}}{|f_{ij}|}f_{\mathrm{Y}} & (\text{for } |f_{ij}| > f_{\mathrm{Y}}) \end{cases} \tag{4}$$

と置く。すなわち Bingham 型の塑性を導入する。

3.2 離散モデルにおける応力渦度

上記の離散モデルにおける「応力渦度 (応力循環?)」を

$$f_{ijk}^{(\mathrm{I})} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \tag{5}$$

と定義しよう。もしも右辺の各項がすべて閾値未満ならば、Φ はゼロとなり、この場合は応力渦度は時間変化しないことが容易に示される。逆に言えば、$\Phi \neq 0$ となる場合に限って、それによる応力渦度の時間変化が生じ得る。もちろんこれは必要条件であって十分条件ではない。実際、$\Phi \neq$ でも応力渦度がゼロにとどまるような例は簡単に作ることができる。

しかし、ここでは具体的に示さないが、三角格子に対して一様な剪断応力をゆっくり加えた場合、ゼロでない応力渦度が生成される例を作ることができる。この場合は正負の応力渦度が単位格子ごとに対生成される。

上記の例では格子自体に異方性があるので、一様な応力からでも応力渦度が生成された。他方、応力場に非一様性があれば、格子のほうは等方的でもかまわないと考えられる。

3.3 連続モデル

等方的な離散モデルを構築するのは大変なので、ここでは代わりに連続体モデルを考える。離散モデルにおいて、棒の位置を (x, y) という連続変数でおきかえたものを考えればよい。棒の運動に対する制約はそのまま残す。これにより、(x, y) 面では Euler 変数と Lagrange 変数が一致することになり、解析が大幅に単純化される。また、速度および偏応力テンソルが、それぞれ

$$\dot{\mathbf{w}} = (0, 0, \dot{w}), \quad \overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_x \\ 0 & 0 & \sigma_y \\ \sigma_x & \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

と書けるので、これらはそれぞれ (x, y) 面上のスカラーおよびベクトルと見なすことができる。

運動方程式および構成関係式は、

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, (+F^{\text{ext}}), \tag{7}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = \nabla \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} 0 & (\text{for } |\boldsymbol{\sigma}| < \sigma_{\mathrm{Y}}) \\ \boldsymbol{\sigma} - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{\sigma}|} \sigma_{\mathrm{Y}} & (\text{for } |\boldsymbol{\sigma}| > \sigma_{\mathrm{Y}}) \end{cases} \tag{9}$$

のように書くことができる。上で述べたように、$\dot{w}$ が速度 (スカラー) で、$\boldsymbol{\sigma}$ が「応力ベクトル」である。

上記の支配方程式系で $\Phi = 0$ としたものを、2 次元の圧縮性流体の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \rho = \rho(p) \tag{10}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p \tag{11}$$

と比較してみると、興味深いことが分かる。これは圧縮性流体での縦波を弾性体の横波に対応させることを意味するが、速度と応力の役割が逆になっている。圧縮性流体での速度に対応するのが応力 $\boldsymbol{\sigma}$ で、圧力に対応するのが速度 $\dot{w}$ である。

さて、2 次元の圧縮性流体の方程式 (10)(11) には 3 つの時間発展モードがあり、そのなかのふたつは圧力波、残るひとつが渦度方程式である。弾塑性モデルのほうでもこれに対応するものがなければならない。このことから、応力渦度を

$$\omega = \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \tag{12}$$

で定義するのが自然である。この量は、また、結晶における螺旋転位の密度に対応している。さらに ω が $\boldsymbol{\sigma}$ の源泉項であることも明らかだ。

応力渦度の時間発展を支配する「渦度方程式」は、構成関係式に rot を作用させることで得ることができる。簡単な計算により

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\mathrm{div} \boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{J} \equiv \frac{\mu}{\eta} \begin{pmatrix} \Phi_y \\ -\Phi_x \end{pmatrix}. \tag{13}$$

という式が得られる。この式は、応力渦度が保存量であること、その流束が Φ に比例するベクトルで与えられることを示している。

4 応力渦度の時間発展

我々は、空間的に非一様な剪断変形を生じるような境界条件を与えて数値計算をおこない、応力渦度の生成とその結果を調べた [2]。以下では、その要点のみを述べる。

系の大きさを $0 \leq x \leq L_x = 120\xi$, $|y| \leq L_y/2 = 50\xi$ とし (ここで ξ は粘弾性で決まる特徴的な長さスケール)、$x = 0$ の境界に

$$\sigma_x|_{x=0} = \sigma_{\max} \tanh \frac{y}{L_0}, \qquad \sigma_{\max} = 10\,\sigma_{\mathrm{Y}}, \quad L_0 = 50\,\xi \tag{14}$$

という条件を一定時間だけ課したあと、境界条件をゼロに戻した。他の境界はすべて近似的無反射条件を課した。

系の時間発展の様子を見るために、$\boldsymbol{\sigma}$ を発散部分と回転部分に分解してそれぞれの時間発展を見てみた。発散部分 (非回転部分) は応力波をあらわし、時間が経過すると遠方に去っていく。他方、回転部分は応力渦度であり、ある程度の時間が経過すると系のなかで塑性流動が消失してしまうため、有限の応力渦度がいつまでも残ることになる。

応力渦度の流れである $\mathbf{J}$ を図示すると、境界で応力を課しているあいだ、そこでかなりの応力渦度の流入あるいは流出があることが分かる。その大半は側面の境界からの出入りとバランスしていて、わずかな収支の差が系の内部に残留すると考えられる。

最終的な内部応力の様子を図示するには、流体力学でいうホドグラフに相当するもの、すなわち (σ_x, σ_y) 面に (x, y) の値を示したものを用いるのが便利である。最後に残る内部応力の値は、ゼロでもなく、降伏応力ぎりぎりでもない。今回の計算例では、最後に残った応力の最大値は降伏応力の 0.515 倍であった。このことは、粉体でよく用いられている限界応力状態仮説 [9, p.69] の反例となっている。もちろん降伏流動が消えた直後は $\max|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_{\mathrm{Y}}$ であるはずなのだが、そのあとの弾性波の挙動と応力渦度の再配置の様子を見ることにより、$\max|\boldsymbol{\sigma}|$ が低下していく様子を知ることができる。

最後に、内部応力の結果として、系の実効的な降伏応力の値が低下することを見ておこう。これには例の「ホドグラフ」による図式解法が威力を発揮する。応力の値は、半径 $0.515\sigma_{\mathrm{Y}}$ の円のなかに分布しており、これは降伏応力のライン (半径 σ_{Y} の円) からはだいぶ離れている。ここで適当な方向 (仮に $(\cos\theta, \sin\theta)$ とする) の一様な剪断応力を系に加えていくと、σ 面上のグラフは θ 方向にシフトする。このグラフが半径 σ_{Y} の円にぶつかるまでの距離が、実効的な降伏応力となる。グラフから、どの θ についても実効的降伏応力は σ_{Y} よりも低下すること、またその値は σ_{Y} に依存することが分かる。つまり、最初は等方的だった系が、異方的なものを記憶したことになる。さらに実空間での降伏点は θ に関して必ずしも連続でなく、不連続関数になるということも分かる。

以上、内部応力の生成過程に着目し、応力渦度に対する「渦度方程式」を用いた数値計算結果の解析について説明した。非一様な荷重 (tanh 型) での数値計算をおこなうと、ω の局在構造が凍結したまま残留し、これによる渦状の内部応力が生じる。限界応力仮説は成立しない。内部応力の効果として、実効的降伏応力の低下が生じ、また系に異方性が持ち込まれる。すなわち、変形の記憶が系の力学的性質を変えたことが分かる。

今回の解析は、もちろん、運動に制約をつけることで話を単純化しているので、ペーストの実験とは直接対応しないが、より現実に近い理論を作ることは可能である [6]。また、Bingham 塑性だけでなく、たとえば低温による凍結を考えることにより、凍結ゴムの引っぱり実験における履歴効果 [10] との関連も射程内に入ってくるだろう。さらに、離散的だが等方的な場合として、ランダムな系での解析が考えられる。これは粉体とかスピングラスとかいった系と関連してくるだろうし、局所的な非等方性により、一様な変形からでも内部応力が生じる可能性があると考えられる。

参考文献

[1] 佐藤みさ子, 「現代川柳の精鋭たち (北宋社)」

[2] Ooshida Takeshi and Ken Sekimoto, Phys. Rev. Lett. **95**, 108301 (2005); cond-mat/0410306

[3] E. C. Bingham, *Fluidity and Plasticity*, (McGraw-Hill, New York (1922)).

[4] A. Nakahara and Y. Matsuo, *Bussei Kenkyuu* **81**-2 (2003)

[5] A. Nakahara and Y. Matsuo, J. Phys. Soc. Japan. **74** (2005); cond-mat/0501447

[6] Michio Otsuki, Phys. Rev. E **72**, 046115 (2005); cond-mat/0411214

[7] A. M. Kosevich, E. M. Lifshitz, L. D. Landau and L. P. Pitaevskii, *Theory of Elasticity*.

[8] J. D. Eshelby, *The continuum theory of lattice defects*, Solid State Physics, vol.3, p.79–144 (Academic Press Inc., New York, 1932).

[9] 早川尚男・那須野悟「粉体の物理」,「現代物理学最前線 1 (共立出版)」

[10] Y.Miyamoto, K.Fukao, H.Yamao and K.Sekimoto Phys. Rev. Lett. **88** 225504 (2002).