

## 壁乱流における流体線の伸長

東京理科大学大学院・理工機械 塚原隆裕 (Takahiro Tsukahara)  
東京理科大学・理工機械 河村 洋 (Hiroshi Kawamura)  
東京理科大学・理工機械 岩本 薫 (Kaoru Iwamoto)

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Technology  
Tokyo University of Science

### 1 緒言

乱流の主な特徴の一つである強い混合・拡散作用の程度の定量化として、流体粒子の集合から成る曲線や曲面（流体線及び流体面 [1]）の変形を定量化する方法がある。乱流によって移流される流体線（面）の運動やその統計は、乱流中での渦管の伸長の問題や、乱流燃焼等における熱・物質の乱流混合の問題などと深い関連があり、古くから理論的、実験的あるいは数値的な研究が盛んに行われてきた。

無限小長さの線や面（線素や面素）の乱流における変形の研究は、Batchelor [1] の先駆的論文に始まり、線素  $e$  は指数関数的に伸ばされることが示された。その時間的な伸長 ( $de/dt$ ) は次式の様

$$\frac{de_i}{dt} = u_{i,j} e_j \quad (1)$$

と表せる。これより、速度勾配が定常な領域内（単純な一様せん断乱流等）では、線素がある程度発達すると初期状態によらず伸長率は一定になると述べている。また彼は、一様かつ定常な乱流中であれば、流体線（面）は統計的に一様な伸長を受け、十分時間が経ったのちでは流体線（面）は統計的に等価な流体線素（面素）の集合と見なせるとした。この仮定に基づき、無限小線素の指数関数的な伸長は、直接数値シミュレーション（以下、DNS）によって数値的にも確かめられている [2, 3]。一方、近年の大型計算機の発達に伴い、Kida & Goto [4, 5] は、無限小線素ではなく有限長さの曲線の追跡を行い、流体線の真の伸長率を求めている。彼らによれば、流体線に沿った統計を考える際には、その曲線に沿った非一様な伸長の効果が無視できず、Batchelor の一様伸長の仮定は、実際の乱流中では成立しないと述べている。したがって、流体線の非一様な伸長を正確に評価するために、有限長さの曲線の追跡が必要である。ちなみに、一様乱流中における流体線の伸長率は、Batchelor の仮定が成り立つとすると、 $0.13\tau_\eta^{-1}$ （ここで、 $\tau_\eta$  は Kolmogorov 時間）程度 [2] と評価されるが、実際の伸長率は  $0.17\tau_\eta^{-1}$  程度であると、Kida & Goto [4, 5] は報告している。最近、後藤 & 木田 [6] は、初期に積分長と比して十分にひろがった流体線の伸長率の時間発展は、乱流中の最小スケールの渦の旋回時間 ( $\tau_\eta$ ) だけではスケーリングできず、レイノルズ数依存性 ( $\tau_\eta$  によるスケーリングを行っても、レイノルズ数の大きい乱流場ほど混合の効率が良くなる) を呈することを示している。これは、線の伸長には最小スケールの渦が常に寄与する一方で、大きな渦の折り畳みによってより伸長が強い領域により多くの線が堆積し、結果、伸長率が大きくなるためと考えられている。つまり、レイノルズ数増加に伴って渦が広範囲な多重スケールにわたり、その連続的な階層構造が流体線のより効率的な伸長を促していると言える。

これら流体線や流体面の乱流混合における数値的な研究の多くは、一様等方性乱流中の追跡であり、本研究では、チャンネル乱流中の流体線の変形・伸長を追跡することで、壁乱流における混合作用の定量化を目的としている [7]。壁乱流においては、壁近傍の微細渦構造から外層の大規模構造に至る広範囲なスケールの階層構造の存在が知られている。そのため、壁面からの高さに応じて Kolmogorov 時間  $\tau_\eta$  が変化することにより、チャンネル乱流における流体線の伸長率の決定は複雑になる。壁乱流の流体線を議論する上で、そのパラメータは“レイノルズ数”，“壁面からの距離”，“線の向き”の3つであり、これらへの依存性を検討していく。

表 1: DNS 及び流体線の計算条件:  $N_i$ , 格子数;  $\Delta i$ , 格子幅;  $\Delta t$ , 時間刻み;  $\Delta_L$ , 流体線補間における粒子間距離の閾値;  $\eta$ , Kolmogorov スケール;  $\tau_\eta$ , Kolmogorov 時間;  $L_0$ , 流体線初期長さ.

$Re_\tau$	$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x^+$	$\Delta y_{\min}^+ - \Delta y_{\max}^+$	$\Delta z^+$	$\Delta t^+$	$\Delta_L^+$	$\eta_{\min}^+$	$\tau_{\eta_{\min}}^+$	$L_0^*$
80	$256 \times 96 \times 256$	4.00	0.111 - 3.59	2.00	0.0128	1.00	1.75	3.08	6.4
180	$256 \times 128 \times 256$	9.00	0.200 - 5.93	4.50	0.0360	2.25	1.57	2.47	3.2

## 2 数値解析手法

解析対象となる流れ場は、十分に発達した無限に広い平行平板間乱流であり、主流 ( $x$  軸) 方向に一様な圧力勾配を付加することで流れが駆動されているものとし、非圧縮のポアズイユ乱流を想定している。計算領域は主流方向、壁垂直 ( $y$ ) 方向、スパン ( $z$ ) 方向のそれぞれに  $12.8\delta \times 2\delta \times 6.4\delta$ 。また、水平方向には周期境界条件、壁面においては滑りなし条件を付加している。摩擦速度  $u_\tau$ 、チャンネル半幅  $\delta$  および動粘性係数  $\nu$  に基づくレイノルズ数で  $Re_\tau = 80$  及び  $180$  としている。計算手法について、空間的離散化に有限差分法、時間積分に Adams-Bashforth 法と Crank-Nicolson 法 ( $y$  方向の粘性項のみ) を用いた。計算条件を表 1 に示す。ここで、上添え字  $+$  は壁面量による無次元化を、 $*$  は  $\delta$  による無次元化を表す。

流体線は、常に同じ流体粒子の集合より構成された仮想の曲線である。すなわち、流体線上の任意の点  $\mathbf{x}_p(t)$  は、その点における流速  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t)$  によって、

$$\frac{d\mathbf{x}_p(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) \quad (2)$$

と移流される。粒子の速度ベクトルは、各計算セル内で一次補間によって求めた。ただし、壁面においては、粒子の仮想半径 ( $\ll \Delta y_{\min}$ ) を導入し、完全弾性反射されるものとした。流体粒子間の相互干渉は考慮せず、また流体中を運動することによって生じる抵抗力も無視するものとし、流体線は流れ場の時間発展に影響を与えないものとする。一方、流体線は、十分短い間隔で置かれた点の集合で表現され、隣り合う流体粒子 2 点間の距離がある閾値  $\Delta_L$  を超える度に、二点間中央に新たな点を追加し、流体線を十分滑らかに補完していく。閾値を Kolmogorov スケール  $\eta$  程度に設定することで、微小渦による流体線の変形も十分捉えられるようにした。また、流れ場および流体線の時間ステップ  $\Delta t$  は Kolmogorov 時間  $\tau_\eta$  に対し十分小さく設定した ( $\Delta t \ll \tau_\eta$ )。

## 3 解析結果および考察

### 3.1 流体線の可視化

$Re_\tau = 80$  及び  $180$  のチャンネル乱流中に、主流方向またはスパン方向に伸びた流体線を放し、ある時刻におけるそれら流体線の発展した様子を図 1 に示す。流体線の初期の向きについて、以降、主流方向は Case X、スパン方向は Case Z として表す。また、流体線の初期位置において、下壁面からの高さを  $y_s$  で表記する。壁面からの距離の依存性を評価するため、初期高さを乱流エネルギーのピーク位置 ( $y_s^+ = 15$ )、及びチャンネル中心 ( $y_s = \delta$ ) として移流させた。

図 1 の流体線は、いずれもおおよそ 1 wash-out time 経過時の様子であるが、線の初期条件 (高さや方向) によって、変形の速さに違いが生じていることが分かる。壁近くの流体線 ( $y_s^+ = 15$ ) に注目すると、Case X よりも Case Z の方が線の拡がり (水平方向) が顕著で、3 次元的で複雑な変形が観察される。Case X の線にも 3 次元的に複雑な伸長が間欠的に観察される (図 1 (a')) が、線の半分近くは変形が極めて小さく、 $Re_\tau = 80$  においてはほぼ直線を保っており (a), 線の伸長は弱い。壁近傍に比して乱れが等方的になるチャンネル中央においては、流体線が初期の向きに依らず 3 次元的・等方的に変形していることが分かる (図 1 (c', d'))。また、レイノルズ数依存

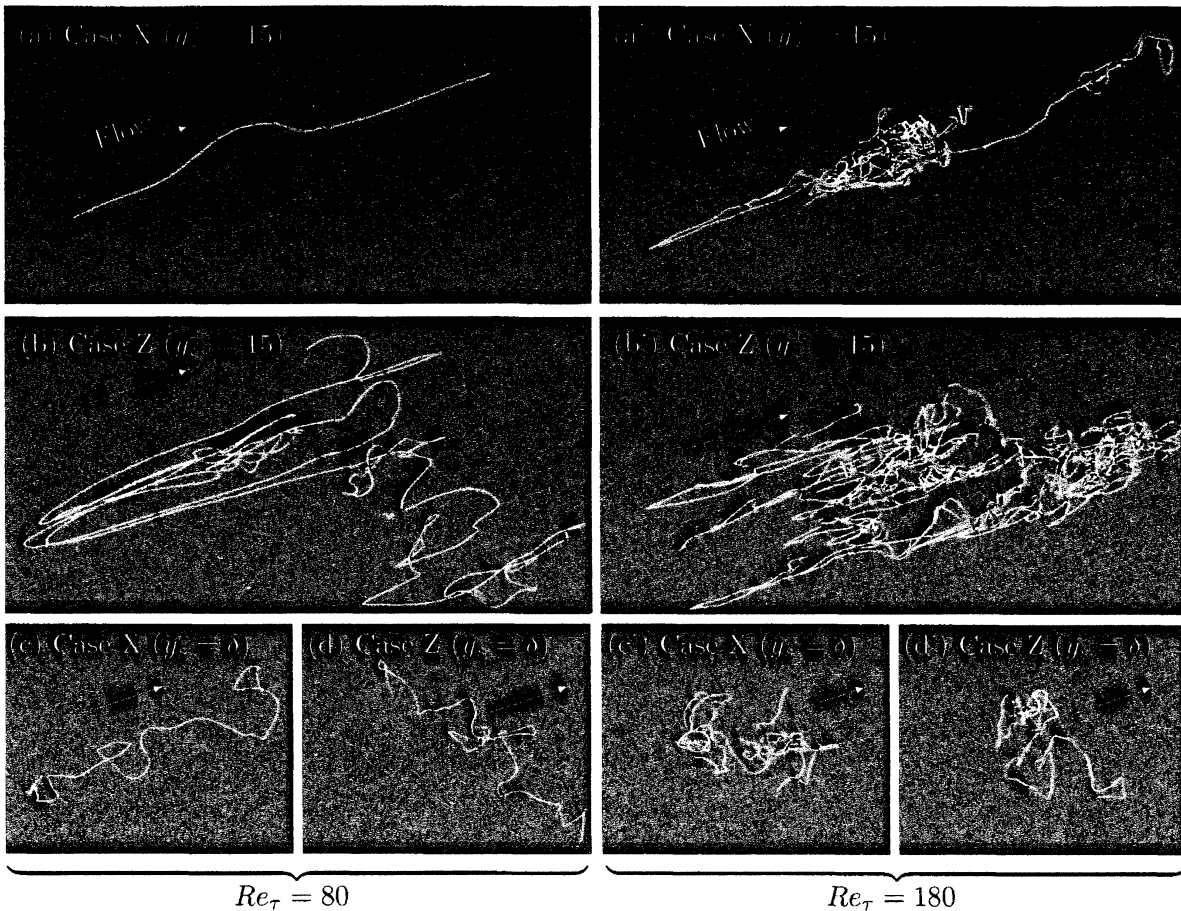


図 1: 各初期条件における流体線の伸長・変形の様子. 主流方向は右上向き (図中の矢印). 壁面 ( $x$ - $z$  平面) を示す格子の間隔は  $20\eta(y_s)$ . 流体線の初期方向: Case X, 主流方向; Case Z, スパン方向. 下壁面からの距離  $y_s$  は流体線の初期高さ. 流体線放出からの経過時間は  $\Delta T^* = 0.8$ .

性についても, 高いレイノルズ数における流体線 (図 1 (a'-d')) の方が, 低い場合の同初期条件 (a-d) に比べて明らかに線の変形が細かく, 線の伸長が速いことが分かる. ここで, 図中に示した格子の幅は, 流体線初期高さにおける Kolmogorov スケール  $\eta(y_s)$  の 20 倍に相当しており, 流体線の細かい変形の長さスケールが  $\eta(y_s)$  に応じて変化していることが分かる. 流体線が初期高さから殆ど広がっていない発達初期段階においては,  $\eta(y_s)$  の長さスケール程度の渦により線の伸長が行われていると考えられ, その伸長率は  $\tau_\eta(y_s)$  で規格化されると期待できる.

### 3.2 流体線の指数伸長率

流体線は指数関数的に伸長しており (図は省略), 次式の通り, 指数伸長率  $\gamma$  が定義できる.

$$\gamma = \frac{d}{dt} \log L(t) \quad (\because L(t) = L_0 \exp[\gamma t]) \quad (3)$$

初期長さ  $L_0$  の流体線を各初期高さ ( $y_s^+ = 5, 15, y_s = \delta$ ) から移流させ, それぞれの条件における伸長率  $\gamma$  を図 2 に示す. ここで, 得られた  $\gamma$  は, 各初期条件で 16 回の試行 (水平方向に異なる位置から 16 本の流体線を放ったとき) についての統計値である.

図 2 (a, b) から, 初期条件に依らず, 時間経過に伴い各レイノルズ数で伸長率がある一定値に漸近していることが分かる. これは流体線がチャンネル全体に十分に発達し, レイノルズ数のみで決ま

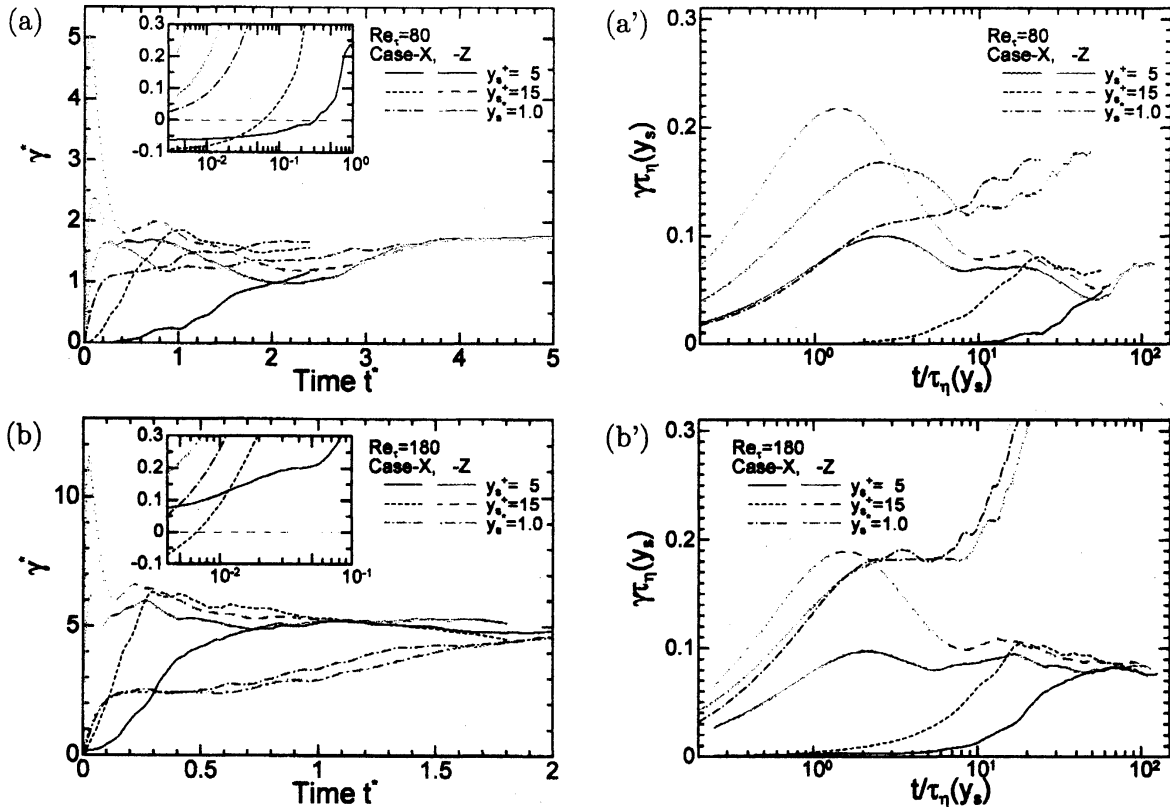


図 2: 流体線長さの時間発展における指数伸長率  $\gamma$  の統計値. 時間の無次元化に外層パラメータ (a, b), または各流体線初期高さ  $y_s$  における平均 Kolmogorov 時間  $\tau_\eta(y_s)$  (a', b').

るチャンネル内平均伸長率 ( $\gamma$ ) に収束するためである ( $Re_\tau = 80, 180$  のとき, それぞれ  $\langle \gamma^* \rangle \approx 1.75, 5.0$ ). 線の伸長において Kolmogorov スケール程度の渦が支配的であることから, 最小 Kolmogorov 時間によってスケーリングを行うと, 初期位置に依らず ( $\gamma \approx 0.067\tau_{\eta,\min}^{-1}$  程度) である. また, 伸長率の時間変化の初期段階に注目すると, 初期高さ  $y_s$  (内層とチャンネル中央) や向き (Case X, Z) の依存性が確認できる. 内層の流体線 ( $y_s^+ = 5, 15$ ) について, Case Z は初期に急激な伸長率の変化を見せ, 極大値をとった後に Case X と同程度の値を取りチャンネル内平均伸長率 ( $\gamma$ ) に漸近する. 主流方向の線 (Case X) は伸長されにくく (伸長率の増加が遅く), 特に低レイノルズ数では平均の伸長率が負となり (図 2 (a, b)), 線の収縮が生じている. 一方, チャンネル中央の流体線 ( $y_s = \delta$ ) は, 初期の線の向きに依らず, 放出直後の早い時期からほぼ同じ伸長率の変化を示し, チャンネル中央の等方性を示唆している. しかし,  $Re_\tau = 80$  では, レイノルズ数が低いためチャンネル中央部まで壁面による粘性の影響が強く, 壁近傍の乱れの非等方性がチャンネル中央部でも顕著であることから, 内層における伸長率と同様に, Case Z の伸長率が Case X に比べて (放出初期段階で) 大きくなっている (図 1 (a)).

初期高さにおける Kolmogorov 時間  $\tau_\eta(y_s)$  で伸長率のスケーリングを行うと, 放出初期段階において, レイノルズ数への依存性が小さくなるのが図 2 (a', b') から分かる. また, Case Z の初期高さ  $y_s^+ = 15$  と  $y_s = \delta$  において, 初期段階 ( $1 < t/\tau_\eta(y_s) < 4$ ) に見られる極大値の値が  $\gamma\tau_\eta(y_s) \approx 0.18-0.22$  程度にスケーリングされ, 一様等方性乱流で得られる結果 [6] に近い値である. それに比べ, 壁近傍 ( $y_s^+ = 5$ ) の極大値は  $\gamma\tau_\eta(y_s) \approx 0.1$  程度であり, これは粘性底層における線の伸長が乱流による作用 (指数関数的伸長) より, むしろ一次元的なせん断  $du/dy$  による伸長 (線形的伸長) の方が支配的になるためと考えられる. 一方, Case X においては初期高さにおける依存性が強く表れ, 伸長率のスケーリングは困難である.

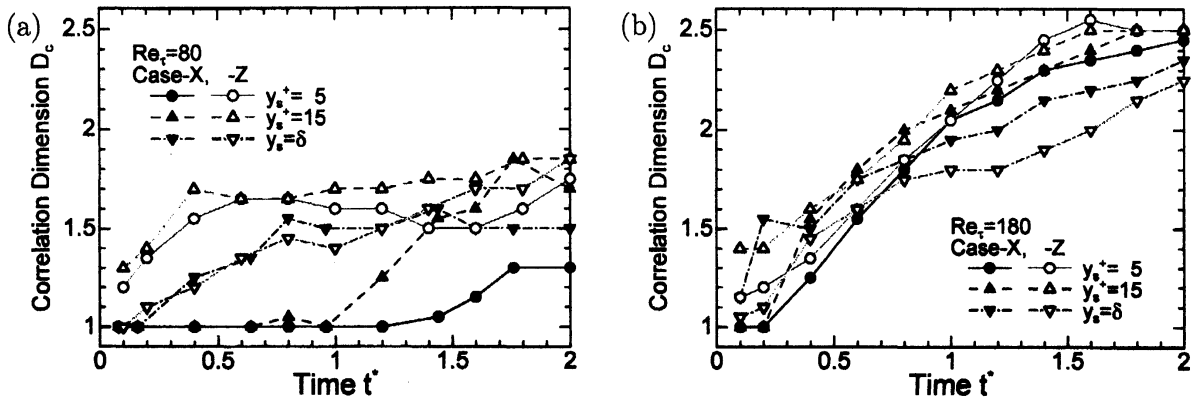


図 3: 流体線の相関積分法によるフラクタル次元の時間変化. (a)  $Re_\tau = 80$ , (b)  $Re_\tau = 180$ .

### 3.3 流体線のフラクタル次元

図 1 にみるように、初期条件やレイノルズ数によって流体線の変形の様子が異なりながらも、線が視覚的に複雑になっていくことが分かる。しかし、流体線の可視化のみで混合の様子を判断することは曖昧であるため、本研究では変形中の流体線の相関次元を解析した。相関次元は、Grassberger & Procaccia [8] により提案され、幾何学的特徴を定量化するフラクタル次元の一種である。流体線上の流体粒子  $\mathbf{x}_p(i)$ ,  $i = 1 \dots N$  について、二点間距離  $r$  の関数として次式の相関積分  $C(r)$  が定義される。

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N H(r - |\mathbf{x}_p(i) - \mathbf{x}_p(j)|) \quad (4)$$

ここで、 $H$  はヘビサイド関数。距離  $r$  の一定領域において、 $C(r) \propto r^\nu$  なる関係をもち、この  $r$  の範囲をスケールリング領域と呼んでいる。相関指数  $\nu$  は、 $\log r$  と  $\log C(r)$  の関係 (図は省略) における局所傾きに相当する。この局所傾きのプロットにおいて傾きが一定の平坦部として現れるときの相関指数  $\nu$  が、相関次元  $D_c$  とほぼ等しい値になると考えられている。しかし、相関をとる際の (粒子) 点数不足等の理由から、スケールリング領域が明確に現れず、相関次元を判定することが困難になる問題が生じ易い。ここでは、より客観的な推定を行うため、局所的に平坦になる領域の最大値 (極大値) を相関次元とした。この方法により、各初期条件における流体線の相関次元 (フラクタル次元) を求め、その時間変化を図 3 に示す。ここでの相関次元の値は、各条件の流体線 1 本ずつにおけるもので、統計値ではない。

図 3 に示されるように、流体線は直線 ( $D_c = 1$ ) から複雑に変形していき、平面的あるいは立体的に広がるため線のフラクタル次元は  $D_c = 2-3$  に徐々に増加している。両条件 (Case X, Z) とも、各初期高さにおいて求めたフラクタル次元はレイノルズ数が高いほど早く増加している。 $Re_\tau = 180$  において、チャンネル全体に流体線が十分に広がると ( $t^* = 2$  — 図 2(b) より、伸長率  $\gamma$  がチャンネル内平均伸長率  $\langle \gamma \rangle$  に収束するほどに発展している) フラクタル次元が約  $D_c = 2.5$  に近づいている (図 3 (b) 参照)。  $Re_\tau = 80$  の場合はフラクタル次元の増加がゆっくりであるが、十分発達した時刻におけるフラクタル次元はレイノルズ数・初期条件に依らず Mandelbrot [9] が得た次元 ( $D = 2.5$ ) に近い値を示すと期待される。流体線の発達段階に注目すると、Case Z の線の方が各初期高さ ( $y_s^+ = 5, 15$ ) においてフラクタル次元が大きい値となっている。いずれのレイノルズ数でも初期段階において ( $t^* < 0.5$ )、最もフラクタル次元の増加の早いケースが  $y_s^+ = 15$  (Case Z)、増加の緩やかなケースが  $y_s^+ = 5$  (Case X) となることから、流体線の変形においては線の方向と粘性高さ  $y^+$  が強く依存することが分かる。一方、 $y_s = \delta$  のチャンネル中央においては、図 2 で示されるように線の伸長が初期の向きに殆ど依らないため、フラクタル次元の挙動も Case X と Case Z で顕著な差は現れていない。

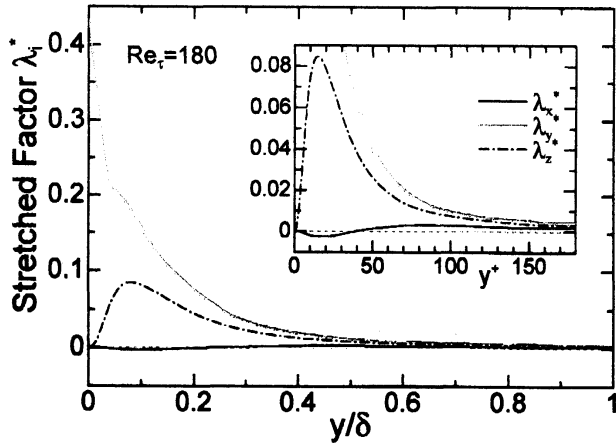


図 4: 無限小線素  $\delta x_i$  における平均伸長係数  $\lambda_i$ .

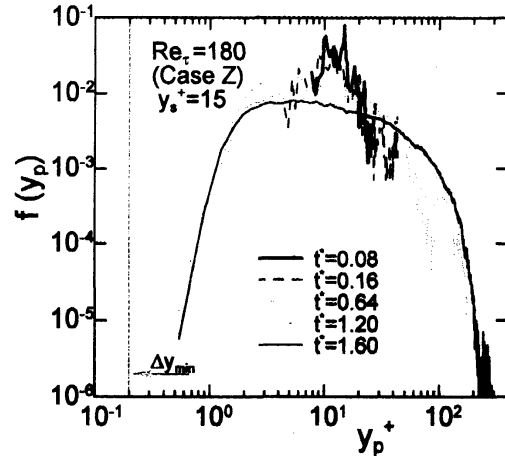


図 5: 流体線 (粒子) の壁垂直方向位置  $y_p$  に関する確率密度関数  $f(y_p)$  [7].

### 3.4 無限小線素における伸長率

上述した伸長率における議論は有限長の流体線についてであり、時間発展にともない流体線はチャンネル全体に広がるため、例えば壁面からの高さ別に伸長率を定めることは難しい。そこで、任意の位置・向きにおける無限小長さの線素の伸長を評価することで、流れ場と流体線の伸縮を関係付けることが容易になる。無限小長さの線素  $\delta x_i$  ( $i$  方向の線素) が短い時間  $\Delta t$  の間に指数関数的に変化すると考え、線素の伸長係数  $\lambda_i$  を次式の通り定義する。

$$\lambda_i(\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \log \left| \frac{\delta x_i(\Delta t)}{\delta x_i(0)} \right| = \frac{1}{\Delta t} \log \left| \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_i} \Delta t + \mathbf{e}_i \right| \quad (5)$$

平均速度勾配の影響を除いた乱流成分による線素の伸縮を評価するため、伸長係数の定義においては速度変動ベクトル  $\mathbf{u}'$  を用い、また、 $\mathbf{e}_i$  は  $i$  方向の単位ベクトルである。  $Re_\tau = 180$  における伸長係数のアンサンブル平均値を図 4 に示す。スパン方向線素の伸長係数  $\lambda_z^*$  は、壁面でゼロ、  $y^+ = 15$  付近で最大値となり、チャンネル中央部でまた小さくなる。これは、流体線の伸長率 (図 2 Case Z) で得られる傾向と矛盾しない。一方、 $\lambda_x^*$  は内層 ( $0 < y^+ < 40$ ) で負になり、線素が統計的に収縮されていることを示している。チャンネル中央部では、伸長係数の 3 成分とも同値に近づき ( $\lambda_x^* \approx \lambda_y^* \approx \lambda_z^*$ )、伸長の等方向性が示されている。特に壁面近傍で  $\lambda_y^*$  が顕著に大きい値をとるが、乱流強度における壁垂直方向の勾配 ( $du'_{rms}/dy \neq 0$ ) に起因する。

有限長の流体線を構成する流体粒子の壁面からの高さ  $y_p$  における確率密度関数を図 5 に示す。時間発展に伴い、初期高さ  $y_s^+ = 15$  (Case Z) から流体粒子が壁側とチャンネル中央側の両方向に拡がっている。分布のピークが  $y_p^+ \approx 3-5$  にあることから、粘性底層に流体線が多く集まっていることが示唆されるが、これは図 4 で示したスパン方向線素の伸長が強い領域 ( $y^+ = 15$ ) と一致しない。つまり、  $y^+ = 15$  付近で強く伸長された線の多くが壁近傍に運ばれ、粘性底層に線が堆積することにより、粒子の存在確率が  $y_p^+ \approx 3-5$  でピークになったと考えられる。ここで、  $Re_\tau = 180$  のチャンネル乱流で任意の流路断面を可視化し、壁近傍の組織構造と線素の伸長係数の分布との相関に注目する (図 6)。図 6 (a) では、低速領域の ejection (Q2 イベント) や高速領域の sweep (Q4) と、それらに伴う縦渦 (図中の +) やバースト現象 (図中の x) が確認できる。縦渦周りとはバーストの生じている所で  $\lambda_z$  の強い正値が表れ (図 6 (b))、線の伸長が活発になっていることが分かる。ちなみに、縦渦や Q2/Q4 イベントによるバーストでは、主流方向線素は伸長されない (あるいは収縮される) ため、図 4 のように  $\lambda_x$  はゼロに近い統計値となる。また、sweep の領域で  $\lambda_z$  の正値が現れていることから、  $y^+ = 10-40$  程度で線が強く伸長しながら壁近傍に吹き下げられ、粘性底層に多くの流体線が堆積すると考えられる。内層における線素 (および流体線) の伸長が、ejection/sweep、縦渦やバースト現象の準秩序的な乱流構造に強く依存している。

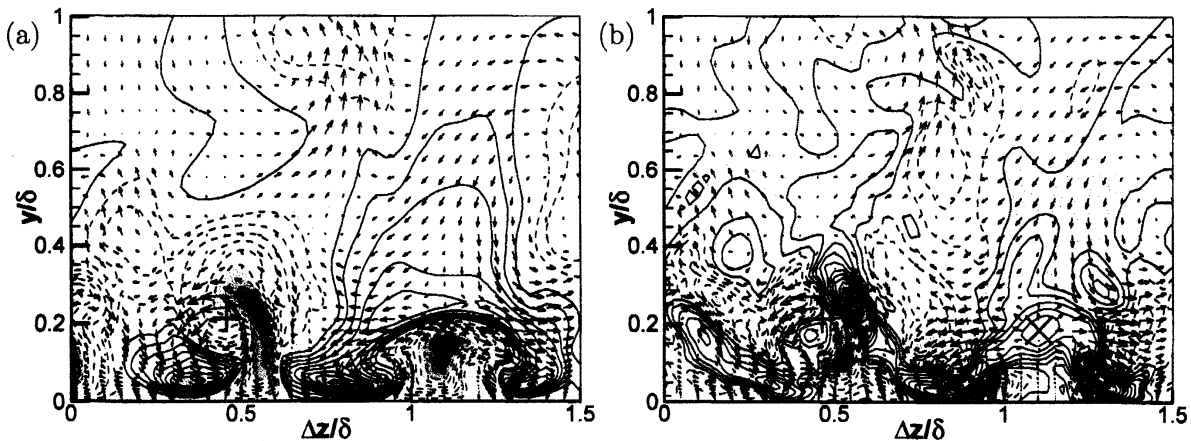


図 6: 任意の流路断面における瞬時速度分布, および  $z$  方向線素の伸長係数  $\lambda_z$  分布:  $Re_\tau = 180$ . 両図とも同断面内の同時刻における場を示し, ベクトルは  $z$  及び  $y$  方向速度変動成分を示す. 等値線は  $x$  方向速度変動成分 (a) と伸長係数  $\lambda_z$  (b): 実線, 正值; 破線, 負値. +印は縦渦の中心, ×印は Q2/Q4 イベントによるバースト位置を示す.

#### 4 結言

$Re_\tau = 80-180$  におけるチャネル乱流の DNS を実行し, 流体線の変形・伸長率の解析を行った. 特に, 初期条件 (高さと向き) およびレイノルズ数への依存性に注目した. チャネル中央部における流体線の変形は等方的で, 初期の向きへの依存性は小さく, その伸長率は一様等方性乱流に近い値となった. 内層においては初期の向きの依存性が強く表れ,  $y^+ = 15$  付近のспан方向の線が強く伸長され, 主流方向の線素は統計的に収縮する傾向があり, また, 準秩序構造との関連性を指摘した. 相関次元によって各条件での線の変形を定量化し, 十分発達した時刻における流体線のフラクタル次元は Mandelbrot [9] と近い値 ( $D_c = 2.5$ ) を示す.

謝辞: 本研究の一部は私学・学術フロンティア推進事業「ホリスティックアプローチによる計算科学の新展開」による支援を, 第一著者は日本学術振興会特別研究員 (18-81) としての援助を受けている. 本計算は東北大学情報シナジーセンター大規模科学計算システムを利用して行った.

#### 参考文献

- [1] Batchelor, G. K., *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **213** (1952) 349–366.
- [2] Girimaji, S. S. & Pope, S. B., *J. Fluid Mech.* **220** (1990) 427–458.
- [3] Huang, M.-J., *Phys. Fluids* **8** (1996) 2203–2214.
- [4] Kida, S. & Goto, S., *Phys. Fluids* **14** (2002) 352–361.
- [5] Goto, S. & Kida, S., *J. Turbulence* **3** (2002) N17.
- [6] 後藤晋, 木田重雄, 日本流体力学会年会 2005 講演論文集 (2005) AM05-12-006.
- [7] 塚原隆裕, 河村洋, 日本流体力学会誌「ながれ」 **24** (2005) 609–618.
- [8] Grassberger, P. & Procaccia, I., *Physica D* **9** (1983) 189–208.
- [9] Mandelbrot, B.B., *J. Fluid Mech.* **72** (1975) 401–416.