数理解析研究所講究録
1496 巻 2006 年 19-22

二成分流体のベナール対流
Bénard Convection in Two-Component Fluids

京都大学情報学研究科　宮崎修次*,
九州大学応用力学研究所　森肇,
福岡県立大学人間社会学部　石崎龍二

Syuji Miyazaki*, Hajime Mori† and Ryuji Ishizaki‡,

Kyoto University*, Kyushu University† and Fukuoka Prefectural University‡

FAX*: +81-(75)-753-3391

概要

Stochastic evolution equations for turbulent two-component Bénard convection are derived from the Boussinesq equations by transforming the inertial forces into a sum of systematic linear transport terms and random nonlinear fluctuating forces by means of the projection operator method. Then the heat flux, the diffusion flux, and the velocity fluxes are formulated in terms of the gradients of temperature, density and velocity explicitly with turbulent transport coefficients.

1　基礎方程式

全流体の質量密度が ρ, 全流体のエネルギー密度が e であるような二成分流体を考えよう. 第一, 第二成分の質量比をそれぞれ $c_1 = c$, $c_2 = 1 - c$ とおく. 各成分の質量密度 ρ_1, ρ_2 はそれぞれ $\rho_1 = \rho c$, $\rho_2 = \rho(1-c)$ となる. 全エネルギー密度は $e \equiv \epsilon + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} c_j|\mathbf{u}_j|^2$ となる. ここで, ϵ は内部エネルギーで, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ はそれぞれ各成分の速度である. また, 中心速度と拡散速度をそれぞれ $\mathbf{u} \equiv \sum_{j=1}^{2} c_j\mathbf{u}_j$, $\mathbf{w}_j \equiv \mathbf{u}_j - \mathbf{u}$ で定義する. 第 1 成分の質量保存則, 全エネルギー保存則に関する運動方程式は次式で与えられる [1].

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho c\mathbf{u} + \mathbf{i}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\mathbf{u} + \mathbf{q}) = 0. \tag{2}$$

ここで, 拡散流束 $\mathbf{i} \equiv \rho c(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})$ と熱流束 $\mathbf{q}$ は密度勾配や温度勾配と線形関係にあると仮定する [1].

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla\theta, && (3)\\ \mathbf{q} &= -\delta\nabla\mu - \gamma\nabla\theta + \mu\mathbf{i}, && (4)\\ &= -(\delta+\mu\alpha)\nabla\mu - (\gamma+\mu\beta)\nabla\theta, && (5) \end{aligned}$$

ここで, μ と θ は, それぞれ, 化学ポテンシャルと絶対温度を表し, α, β, γ, δ は線形分子輸送係数を表す.

次に，流体の非圧縮性条件 ρ が一定，すなわち，$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を仮定し，Boussinesq 近似を用いると，運動量保存則, 第 1 成分の質量保存則, 全エネルギー保存則を与える運動方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_l &= \nu^0 \nabla^2 u_l + \alpha g \theta \delta_{l,z}, & (6) \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D &= -\nabla \cdot \mathbf{i}^0, \quad (\mathbf{i}^0 \equiv \frac{\mathbf{i}}{\rho}), & (7) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\theta &= -\nabla \cdot \mathbf{q}^0, \quad (\mathbf{q}^0 \equiv \frac{\mathbf{q}}{\rho c_v}). & (8) \end{aligned}$$

ここで，c_v は定積比熱，α は熱膨張率，ν^0 は分子粘性率を表わす．$\partial \epsilon / \partial t = c_v \partial \theta / \partial t$，マクロな運動エネルギー $c_j |\mathbf{u}_j|^2/2$ は，強い乱流では，時空的に一定とする．ここに現れる運動量流，拡散流，熱流を，それぞれ，次のように定義した．

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_l &\equiv \mathbf{u} u_l + \frac{p}{\rho} \mathbf{1}_l + \sum_{j=1}^{2} c_j \mathbf{w}_j w_{jl}, & (9) \\ \mathbf{J}_D &\equiv \mathbf{u} c, & (10) \\ \mathbf{J}_\theta &\equiv \mathbf{u} \theta. & (11) \end{aligned}$$

ここで，単位正方行列 $\mathbf{1}$, 圧力 p を用いた．添え字 l はデカルト座標 x, y, z のいずれかを表す．これらの流束（非線形項）が乱流を作ると共に，組織的な乱流輸送項をもたらすと考えられる．

2 熱平衡近傍での拡散

熱平衡近傍では，(7)，(8) において非線形項 $\mathbf{J}_D$，$\mathbf{J}_\theta$ を無視し，(3)，(5) と $c, \theta, \rho =$ （一定）を独立変数として，$\nabla \mu$ を ∇c と $\nabla \theta$ で表現すると，c と θ を独立変数とする運動方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \left(\nabla^2 c + \frac{k_\theta}{\theta} \nabla^2 \theta \right), & (12) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \kappa_c^0 \nabla^2 c + \kappa_\theta^0 \nabla^2 \theta. & (13) \end{aligned}$$

第一成分の濃度が希薄な場合，拡散係数 D はある有限な値 D^0 に近づき，熱拡散係数 $k_\theta D$ は 0 に近づく．これより，以下の拡散方程式が得られる．

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D^0 \nabla^2 c. \tag{14}$$

3 乱流輸送係数

着目する変数のフーリエ成分を考える．

$$\begin{aligned} u_l(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} u_{l\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathbf{J}_l(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{J}_l(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ c(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathbf{J}_D(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{J}_D(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \theta(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathbf{J}_\theta(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{j}_\theta(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathbf{i}^0(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{i}^0(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathbf{q}^0(\mathbf{r}, t) &= \textstyle\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{q}^0(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{15}$$

基礎方程式 (6),(7),(8) の波数ベクトル $\mathbf{k}$ のフーリエ成分をとれば，基礎方程式は次式で表される．

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{l\mathbf{k}} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{J}_l(\mathbf{k}) &= -k^2\nu^0 u_{l\mathbf{k}} + \alpha g\theta_{\mathbf{k}}\delta_{l,z}, &(16)\\
\dot{c}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{J}_D(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}^0(\mathbf{k}), &(17)\\
\dot{\theta}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{J}_\theta(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}^0(\mathbf{k}). &(18)
\end{aligned}$$

独立変数 $u_{l\mathbf{k}}$, $\dot{c}_{\mathbf{k}}$, $\dot{\theta}_{\mathbf{k}}$ のそれぞれの平均値からの差をひとまとめにして $A_{\alpha\mathbf{k}}$ と表し，添え字 α で独立変数を区別する．

$A_{\alpha\mathbf{k}}$ の関数の時間発展は，一般に，

$$\begin{aligned}
G(A(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}G(A(t))\right]_{t=0} = \mathrm{e}^{t\Lambda}G(A),\\
\Lambda &\equiv \sum_{\mathbf{k}}\left\{\sum_l \dot{u}_{l\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial u_{l\mathbf{k}}} + \dot{c}_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial c_{\mathbf{k}}} + \dot{\theta}_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial\theta_{l\mathbf{k}}}\right\}.
\end{aligned}$$

とかける．

A への射影演算子 [2, 3]

$$\mathcal{P}G \equiv \sum_{\mathbf{k}}\langle GA_{\mathbf{k}}^{\dagger}\rangle\cdot\langle A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}^{\dagger}\rangle\cdot A_{\mathbf{k}} \tag{19}$$

を導入する ($\mathcal{Q}=1-\mathcal{P}$, $\mathcal{PQ}=\mathcal{P}-\mathcal{P}^2=0$)．ここで，恒等式

$$\mathrm{e}^{t\Lambda} = \mathrm{e}^{t\mathcal{Q}\Lambda} + \int_0^t ds\,\mathrm{e}^{(t-s)\Lambda}\mathcal{P}\Lambda\mathrm{e}^{s\mathcal{Q}\Lambda} \tag{20}$$

を利用すると，運動量流束 $\mathbf{J}_l$ をランダムな非線形揺動項 $\mathbf{h}_l$ と系統的な線形輸送項 $\mathbf{j}_l$ に分割できる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_l(\mathbf{k},t) &= \mathrm{e}^{t\Lambda}\mathbf{J}_l(\mathbf{k}),\\
&= \mathrm{e}^{t\Lambda}\{\mathcal{P}+\mathcal{Q}\}\mathbf{J}_l(\mathbf{k}),\\
&= \mathrm{e}^{t\Lambda}\mathcal{Q}\mathbf{J}_l(\mathbf{k}),\\
&= \mathbf{h}_l(\mathbf{k},t) + \mathbf{j}_l(\mathbf{k},t).
\end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{P}\mathbf{J}_l(\mathbf{k})=0$ を使った．

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_l(\mathbf{k},t) &\equiv \mathrm{e}^{t\mathcal{Q}\Lambda}\mathcal{Q}\mathbf{J}_l(\mathbf{k}),\text{: 非線形揺動項}\\
\mathbf{j}_l(\mathbf{k},t) &\equiv -\int_0^t ds\,\mathbf{N}_l(\mathbf{k},s)A_{\mathbf{k}}(t-s),\text{: 線形輸送項}\\
N_{ml}(\mathbf{k},s) &= \langle h_{ml}(\mathbf{k},s)\{\mathcal{Q}\dot{A}_{\mathbf{k}}\}^{\dagger}\rangle\langle A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}^{\dagger}\rangle^{-1}.
\end{aligned}$$

他の流束 $\mathbf{J}_D$, $\mathbf{J}_\theta$ もランダムな非線形揺動項 $\mathbf{h}_D$, $\mathbf{h}_\theta$ と系統的な線形輸送項 $\mathbf{j}_D$, $\mathbf{q}$ に分割できる．非線形揺動項を無視すると，線形輸送項が最確値 $\mathcal{P}A_{\mathbf{k}}(t)$ を与える．ランダムな非線形揺動力を $r_\alpha(\mathbf{r},t)\equiv-\nabla\cdot\mathbf{h}_\alpha(\mathbf{r},t)$ で定義すると，時間発展を与える線形確率微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_l}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}_l &= r_l(\mathbf{r},t) + \nu^0\nabla^2 u_l + \alpha g\theta\delta_{l,z}, &(21)\\
\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}_D &= r_D(\mathbf{r},t) - \nabla\cdot\mathbf{i}^0, &(22)\\
\frac{\partial\theta}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{q} &= r_\theta(\mathbf{r},t) - \nabla\cdot\mathbf{q}^0. &(23)
\end{aligned}$$

浮力により鉛直方向の速度 u_z と温度 θ が結合し，それぞれに対応する非線形揺動力も結合している．

この基礎方程式から出発し，非線形揺動力の時間相関を評価することで流束 $\mathbf{j}_l$, $\mathbf{j}_D$, $\mathbf{q} \equiv \mathbf{j}_\theta$ と勾配 A_α との間の線形関係

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}) \simeq -\nu_{\alpha x}\nabla u_x - \nu_{\alpha y}\nabla u_y - \nu_{\alpha z}\nabla u_z - \nu_{\alpha D}\nabla c - \nu_{\alpha\theta}\nabla\theta \tag{24}$$

が導かれ，乱流輸送係数 $\nu_{\alpha\beta}$ の表式が得られる．非対角係数は乱流によってもたらされる異種の流束間の干渉効果を与える．このような線形関係は，熱伝導に対するフーリエの法則や熱電気現象の流束勾配関係などの乱流輸送への拡張であるといえる．また，乱流輸送係数 $\nu_{\alpha\beta}$ や拡散流束 j_{zD} のレイリー数 Ra やプラントル数 Pr に対する依存性に現れるスケーリング則を論じることができる．

参考文献

[1] ランダウ - リフシッツ：流体力学 1，東京図書，§49, §57- §59，1970.

[2] H. Mori: Prog. Theor. Phys. **33** 423, 1965.

[3] H. Mori, S. Kuroki and T. Horita: Prog. Theor. Phys. **113** 29, 2005.