

付着液滴の表面張力振動にともなう混合現象について —線形・弱非線形解析—

電気通信大学 知能機械工学専攻

小暮 雅之, 高橋直也, 宮崎武

Masayuki Kogure, Naoya Takahashi and Takeshi Miyazaki

Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems,
University of Electro-Communications

1 緒言

付着液滴の振動による混合は非加熱かつ重力に左右されない現象のため、電場のもとでの溶媒の抽出、セラミック粉末の合成、微弱重力下での準結晶の成長、DNA の解読等に応用できると期待されている。完全な球形の液滴の振動は 100 年以上にわたり研究されてきた。球面の内側に部分的に接触した液滴の軸対称固有振動については Strani and Sabetta[1] によって解析されている。Wilkes and Basaran[2] は有限振幅の強制軸対称振動を数値的に調べた。また、松沢ら [3] はマイクロリアクタシステムを作成し、平板上の液滴に液滴の固有振動数と一致した振動を与えることにより、液滴表面に表面張力波を発生させ、液滴内部の混合を促す実験を行った。鈴木ら [4] は実験を流体的観点から解析するために、平面に付着した液滴の非粘性線形モデルを作成し、固有振動数解析、加振した半球状液滴内部の流動に関して定性及び、定量的な観点から解析を行った。

本研究では、液滴モデルを簡略化した二次元半円筒液柱モデルを作成し、固有振動数解析及び液柱内部の流動について線形・非線形解析を行い、非線形効果の影響を調査する。

また、鈴木ら [4] の作成した三次元液滴モデルを拡張し、二次の微小項まで考慮した非線形モデルを作成し、内部の流動、混合現象に関して、非線形項が流動にどのような影響を及ぼすのか調査する。

2 二次元半円筒型非線形液柱モデル

2.1 支配方程式

平面に付着した液柱を、極座標系 (r, θ) を用いる。物理量は液柱半径 $a[L]$ 、密度 $\rho[ML^{-3}]$ 、表面張力係数 $\sigma[MT^{-2}]$ で無次元化する。これらより時間 t の次元は $[\sqrt{\rho a^3/\sigma}]$ 、振動数 ω の次元は $[\sqrt{\sigma/\rho a^3}]$ となる。重力の影響は重力と表面張力の比であるボンド数で表され、粘性の影響はストークス層の厚さと半径との比で評価されるが、実験では、両者とも小さいため重力と粘性の効果は無視した。固有値解析で導出した固有振動数 ω を表 1 に示す。ここで展開項数は $N = 100$ を利用している。これは、展開項数 $N = 400$ を用いた場合と比較して、数値が有効数字 6 桁まで一致したためである。

液柱表面での運動学的な条件と、表面張力と圧力差とのつり合い条件を二次の微小項まで考慮に入れると速度ポテンシャル φ_2 と表面の変形 ζ_2 の時間変化は次のようになる。ここで、 φ_1 、 ζ_1 は線形項の速度ポテンシャルと微小変形である。

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \zeta_2 - \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial \theta^2} = -\zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right)^2 - \zeta_1^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} \right)^2 - 2\zeta_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \theta^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} \quad (2)$$

n	ω	n	ω
1	1.91020	6	17.1303
2	4.33351	7	21.0630
3	6.80617	8	25.4258
4	10.0142	9	29.9052
5	13.3035	10	34.7480

表 1: 固有振動数

ここで φ_1, ζ_1 と φ_2, ζ_2 をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= A \cos(\omega_M t - \phi) \hat{\varphi}_M(r, \theta) \\
\zeta_1 &= A \sin(\omega_M t - \phi) \hat{\zeta}_M(\theta) \\
\varphi_2 &= A^2 \left[\sin 2(\omega_M t - \phi) \hat{\varphi}_{22}(r, \theta) + \hat{\varphi}_{20}(r, \theta, t) \right] \\
\zeta_2 &= A^2 \left[\cos 2(\omega_M t - \phi) \hat{\zeta}_{22}(\theta) + \hat{\zeta}_{20}(\theta, t) \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

とし、 $\varphi_1, \varphi_2, \zeta_1, \zeta_2$ をそれぞれ θ に関して Fourier 級数展開し、条件式 (1)(2) に代入して Galerkin 法で Fourier 係数を決定する。ここでは、液柱の付着面に対して垂直方向の軸を基準に、振動による液柱の変形が非軸対称の場合である奇数モードと軸対称変形である偶数モードそれぞれの場合に分けて解析を行う。ここで、奇数モードの φ_m を

$$\varphi_m = \sum_{m=1}^N A_m r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta \tag{4}$$

次に、偶数モードの φ_m を

$$\varphi_m = \sum_{m=1}^N A_m r^{2m} \cos 2m\theta \tag{5}$$

また、両モードの φ_{22} を

$$\varphi_{22} = \sum_{m=1}^N [A_{2m}^e r^{2m} \cos(2m\theta) + A_{2m}^o r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta] \tag{6}$$

とする。

2.2 流体粒子の軌跡

液柱を振動させた時の液柱内の流れを知るために、幾つかの仮想的な流体粒子をマーカーとして液柱内部 ($R = 0.8$) に配置し、その軌跡を描画する。流体粒子の位置は速度ポテンシャル φ を用いて式 (7) のような連立微分方程式で表される。

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ r \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \tag{7}$$

それぞれを $\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2$ に代入し、この φ を用いて式 (7) の連立微分方程式を数値的に解き粒子の軌跡を求めた。単一の振動を励起した場合の流体粒子の軌跡について、線形モデルと、非線形モデルの比較を行った。その結果、非線形項の効果で微小ではあるが、流動の変化を観察することができた。しかし、混合を効率的に促進することはなかった。

3 3波共鳴効果を用いた二つの非線形振動の重ね合わせ

より効率的な混合の可能性を求めするために、非線形振動を重ね合わせる際に擬似的に発生する3波共鳴効果の解析を行った。3波共鳴は重ね合わせる2つの振動の振動数の和及び差がその他の振動数に近いときに生じる。表(2)は3波共鳴が発生させる可能性があるいくつかの振動数の組み合わせの例をあげた。3波共鳴が発生するような振動数の組み合わせが奇数モード+偶数モードの重ね合わせに最も多いため、ここでは奇数モードと偶数モードの混合振動について解析を行った。この解析において、速度ポテンシャルは以下の式を用いた。

$\omega_A \pm \omega_B$	ω_C	$ \omega_C - (\omega_A \pm \omega_B) $
$\omega_1 + \omega_2$	ω_3	0.562
$\omega_3 + \omega_4$	ω_6	0.310
$\omega_5 + \omega_2$	ω_6	0.508
$\omega_7 + \omega_2$	ω_8	0.029

表 2: 3波共鳴が発生する可能性がある $\omega_A \pm \omega_B \simeq \omega_C$ となる振動数の組合せ

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta) = & \sum_{m=1}^N A_{m1} r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta \{A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\} \\ & + \sum_{m=1}^N A_{m2} r^{2m} \cos(2m\theta) \{A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \theta) = & \sum_{m=1}^N \{A_{2m1}^e r^{2m} \cos(2m\theta) + A_{2m1}^o r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta\} \{A_1^2 \sin 2(\omega_1 t - \phi_1)\} \\ & + \sum_{m=1}^N \{A_{2m2}^e r^{2m} \cos(2m\theta) + A_{2m2}^o r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta\} \{A_2^2 \sin 2(\omega_2 t - \phi_2)\} \\ & + \sum_{m=1}^N \{A_{2m+}^e r^{2m} \cos(2m\theta) + A_{2m+}^o r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta\} \\ & \times \{(A_1)(A_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)t - \phi_1 - \phi_2]\} \\ & + \sum_{m=1}^N \{A_{2m-}^e r^{2m} \cos(2m\theta) + A_{2m-}^o r^{2m-1} \cos(2m-1)\theta\} \\ & \times \{(A_1)(A_2) \sin[(\omega_1 - \omega_2)t - \phi_1 + \phi_2]\} \end{aligned} \quad (9)$$

$A_{2m1,2}^{e,o}$ の係数 $\{A_{2m\pm}^{e,o}\}$ の各項は Galerkin 法によって求める。近似的に共鳴条件が満足されると $A_1 A_2 \sin[(\omega_1 + \omega_2)t - \phi_1 - \phi_2]$ に比例する項が大きくなる。

3.1 3波共鳴を用いた流体粒子の軌跡の解析

共鳴条件が精度よく満足されない場合 ($\omega_1 + \omega_2$, 図1) では、線形モデルと非線形モデルにおいてさほど大きな変化は観られないのに対して、図2では大きな流動の変化を確認できる。これは $\omega_2 + \omega_7$ と ω_8 の差が0.029で、他の組合せよりも一桁小さいことにより、他の組合せよりも三波共鳴に近い為ではないかと思われる。その他にも、 $\omega_3 + \omega_4$ の組合せにも共鳴による大きな流動の

変化が確認できた。これらのことから、擬似的三波共鳴現象が内部流動に対して、大きな影響をあたえることがわかった。

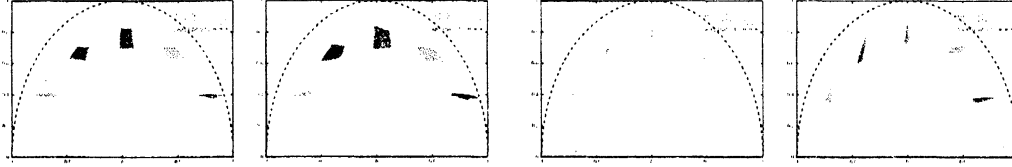


図 1: ω_1 と ω_2 の混合振動 (左:線形モデル 右:非線形モデル) 図 2: ω_7 と ω_2 の混合振動 (左:線形モデル 右:非線形モデル)

4 3次元液滴非線形非軸対称振動モデル

4.1 支配方程式

平面に付着した液滴を、球座標系 (r, θ, ϕ) で考える。物理量は液滴半径 $a[L]$ 、密度 $\rho[ML^{-3}]$ 、表面張力係数 $\sigma[MT^{-2}]$ で無次元化する。これらより時間 t の次元は $[\sqrt{\rho a^3/\sigma}]$ 、振動数 ω の次元は $[\sqrt{\sigma/\rho a^3}]$ となる。重力の影響は重力と表面張力の比であるボンダ数であらわれ、実験では $O(10^{-1})$ であった。粘性の影響はストークス層の厚さと半径との比を取る事により考えられ、実験では $O(10^{-2})$ であった。線形モデルと同様に重力と粘性の効果は無視し、液滴表面の微小変形を ζ とし、速度ポテンシャルを φ とする。ここでの添字は、オーダーを示している。表面での運動学的な条件と、表面張力と圧力差とのつり合い条件について、2次の微小項まで考慮すると、 φ と ζ の時間変化は次式のように示すことができる。線形項 (1次のオーダー) の式 (10)、(11) と非線形項 (2次のオーダー) 式 (12)、(13) に分けてまとめる。

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 2\zeta_1 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \phi^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - 2\zeta_2 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \zeta_2}{\partial \theta}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial \phi^2} \\ = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r} \zeta_1 \\ - 2 \left[\zeta_1^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} + \zeta_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \zeta_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \phi^2} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \zeta_1 \quad (13)$$

4.2 計算方法

実験から液滴の縁は動かない事が確認されているため、半球 $\theta_0 = 90^\circ$ で縁固定の条件のもとで計算を行った。平板上で z 方向の微分が 0 となるように P を偶関数で展開する。 $(N = 40)$ 線形モデルの固有ベクトル A_n, B_n は $\int |\zeta|^2 d\cos \theta = 1$ を満足する条件で規格化している。式 (10)、式

	厳密解の ω	固有値解析 (縁固定の条件) から求められる ω				
		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 1$			2.22			
$n = 2$	2.828	4.415		4.854		
$n = 3$	5.477		7.449		7.864	
$n = 4$	8.485	10.564		10.819		11.215
$n = 5$	11.832		14.206		14.497	
$n = 6$	15.491	17.990		18.164		18.461
$n = 7$	19.422		22.180		22.399	
$n = 8$	23.664	26.524		26.654		26.875
$n = 9$	28.142		31.198		31.373	

表 3: 厳密解による ω と線形固有値解析 (縁固定の条件) による ω

(11) の φ_1, ζ_1 を Legendre 陪関数で展開すると線形項の速度ポテンシャル及び、微小変形は以下のように表され、

$$\varphi_1 = A\varphi_m(r, \theta) \cos(m\phi - \omega t + \phi_A) + B\varphi_m(r, \theta) \cos(m\phi + \omega t + \phi_B) \quad (14)$$

$$\zeta_1 = A\varphi_m(r, \theta) \sin(m\phi - \omega t + \phi_A) + B\varphi_m(r, \theta) \sin(m\phi + \omega t + \phi_B) \quad (15)$$

ただし、ここで

$$\begin{cases} \varphi_m = \sum_{n=1}^N A_n r^{m+2n-2} P_{m+2n-2}(\cos \theta) \\ \zeta_m = \sum_{n=1}^N B_n \cos \theta P_{m+2n-2}(\cos \theta) \end{cases} \quad (16)$$

とする。式 (15), (15) を条件 (10), (11) で解くと固有値問題に帰着でき、固有値 ω 及び固有ベクトル A_n, B_n を求めることができる。

同様に非線形項の速度ポテンシャル及び、微小変形は以下のように表され、

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & A^2 \varphi_{22A}(r, \theta) \sin 2(m\phi - \omega t + \phi_A) + A^2 \varphi_{20A}(\theta) \\ & + B^2 \varphi_{22B}(r, \theta) \sin 2(m\phi + \omega t + \phi_B) + B^2 \varphi_{20B}(\theta) \\ & + AB \varphi_{2AB}(r, \theta) \sin(2\omega t + \phi_B - \phi_A) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & A^2 \zeta_{22A}(\theta) \cos 2(m\phi - \omega t + \phi_A) + A^2 \zeta_{20A}(\theta) \\ & + B^2 \zeta_{22B}(r, \theta) \cos 2(m\phi + \omega t + \phi_B) + B^2 \zeta_{20B}(\theta) \\ & + AB \zeta_{2AB}(r, \theta) \cos(2\omega t + \phi_B - \phi_A) + AB \zeta_{2AB}(\theta) \cos(2m\phi + \phi_A + \phi_B) \end{aligned} \quad (18)$$

式 (17), (18) を条件 (12), (13) で解くと、非線形振動の各成分に分けて表すことができる。軸対称振動成分は

$$\begin{cases} \varphi_{2AB} = \sum_{n=1}^N A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \\ \zeta_{2AB} = \sum_{n=1}^N B_{2n} \cos \theta P_{2n}(\cos \theta) + B_{20} \sin \theta \end{cases} \quad (19)$$

また、非軸対称振動成分は、

$$\begin{cases} \varphi_{22A} = \varphi_{22B} = \sum_{n=1}^N A A_{22n} r^{2m+2n-2} P_{2m+2n-2}^{2m}(\cos \theta) \\ \zeta_{22A} = \zeta_{22B} = \sum_{n=1}^N B B_{22n} \cos \theta P_{2m+2n-2}^{2m}(\cos \theta) \end{cases} \quad (20)$$

と表される。各係数は Galerkin 法によって定める。

5 流体粒子の軌跡

液滴内の流れの様子を知るために、液滴内の幾つかの流体粒子をマーカーとして配置しその軌跡を描画する。Legendre 陪関数によって展開し、線形項及び非線形項を重ね合わせた速度ポテンシャル $\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2$ を用いて、座標 (R, Θ, Φ) の連立微分方程式を解き、流体粒子の時間変化を解析した。

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \\ R \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \\ R \sin \Theta \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} \end{cases} \quad (21)$$

図3と図4は、線形モデルと2次の微小項まで考慮した非線形モデルそれぞれに非軸対称振動 ($m=1, n=1$) を加えた時の粒子の軌跡であり、同様に図5と図6は、非軸対称振動 ($m=1, n=3$) を加えた場合である。線形モデルと非線形モデルを比較すると、非線形効果による流動の変化を確認することができる。 $(m=1, n=1)$ の振動を与えた場合に特に大きな変化がみられる。これは、2次の擬似共鳴現象が発生しているためではないかと考えられる(表3で $\omega_{02} \simeq 2\omega_{11}$)。また、液滴上部において非線形効果が顕著に表われていることがわかる。線形モデルの時と異なり上下方向にも流動が起っていることが分かる。これは振動時、液滴上部の変形が大きいためだと考えられる。

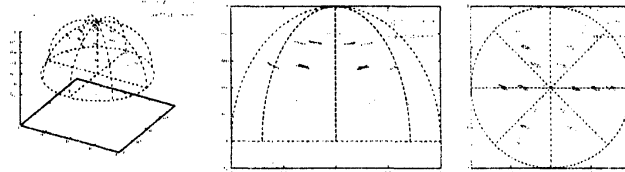


図3: 流体粒子の軌跡 (線形モデル: $m=1, n=1$)

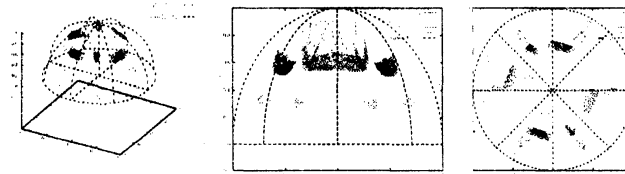


図4: 流体粒子の軌跡 (非線形モデル: $m=1, n=1$)

6 結言

本研究では、二次元、三次元の非線形モデルを作成し、非線形項の流動への影響について解析した。

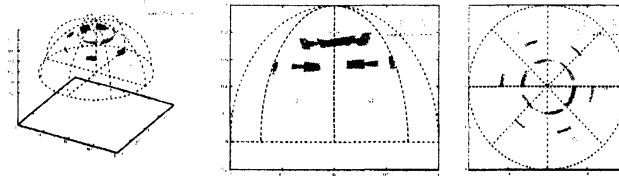


図 5: 流体粒子の軌跡 (線形モデル : $m = 1, n = 3$)

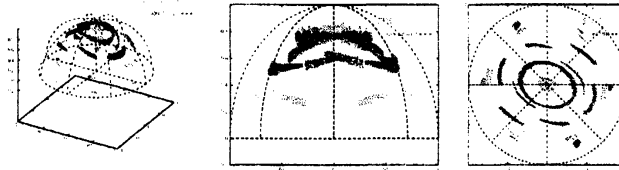


図 6: 流体粒子の軌跡 (非線形モデル : $m = 1, n = 3$)

- 二次元、三次元の非線形モデルを線形モデルに解析結果と比較し、非線形項が流動を変化させることを確認した。
- 二次元モデルでは、3波共鳴効果を用いた2つの非線形振動の重ね合わせの解析により、 $n=2$ と $n=7$ の振動を組み合わせた場合に、共鳴によって線形モデルでは起らない大きな流動の変化が発生することを確認した。共鳴現象は流動に大きな変化をあたえることがわかった。
- 三次元非線形液滴モデルを用いて単独非軸対称振動を与えた場合、液滴上部付近において非線形効果が顕著に観察された。また、 $m = 1, n = 1$ のモードの振動を与えた場合、2次の微小項による共鳴現象によって、非線形項が大きくなる現象がみられた。今後は、この振動モードについてより詳しく調査するため、振幅方程式を導出して定量的な解析を進めていく。

参考文献

- [1] M. Strani *et al.* *J. Fluid Mech.*, (1984) 141:233–247
- [2] E. D. Wilkes *et al.* *Phys. Fluids*, 9(1997):1512–1528
- [3] 松沢ほか, 小型自走機械群による超精密生産機械システム (第 87 報), 2004 年度精密工学会春期大会学術講演会 講演論文集, 2004, 113–114
- [4] 鈴木ほか, 付着液滴の表面張力振動に伴う混合現象: 日本流体力学会誌, 流れマルチメディア 2005