数理解析研究所講究録
1497 巻 2006 年 130-139

Crystal structure of the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrarylevel-zero shape

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)
筑波大学 数学系
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
sagaki@math.tsukuba.ac.jp

内藤 聡 (Satoshi NAITO)
筑波大学 数学系
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
naito@math.tsukuba.ac.jp

1 Introduction.

1.1 Notation. 本論説で使用する affine Lie algebra に関する記号は以下の通りである (詳しくは [Kac] を参照).

$\mathfrak{g}$: affine Lie algebra over $\mathbb{Q}$,

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: Cartan subalgebra, $d \in \mathfrak{h}$: degree operator,

I : index set of simple root,

$0 \in I$: the 0-vertex (see [Kac, §4.8, Table Aff1 $\sim$ Aff3]),

$\Pi^\vee = \{h_j\}_{j\in I} \subset \mathfrak{h}$: simple coroots, $\Pi = \{\alpha_j\}_{j\in I} \subset \mathfrak{h}^*$: simple roots,

$c = \sum_{j\in I} a_j^\vee h_j \in \mathfrak{h}$: canonical central element,

$\delta = \sum_{j\in I} a_j \alpha_j \in \mathfrak{h}^*$: null root,

$\{\Lambda_j\}_{j\in I}$: fundamental weights (i.e., $\Lambda_j(h_k) = \delta_{jk}$ for $k \in I$, and $\Lambda_j(d) = 0$),

$P = \bigoplus_{j\in I} \mathbb{Z}\Lambda_j \oplus \mathbb{Z}a_0^{-1}\delta \subset \mathfrak{h}^*$: integral weight lattice,

$r_j \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$: simple reflection with respect to α_j,

$W = \langle r_j \mid i \in I\rangle \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$: Weyl group of $\mathfrak{g}$,

$U_q(\mathfrak{g})$: quantum affine algebra$_{/\mathbb{Q}(q)}$ with the degree operator q^d,

$U_q'(\mathfrak{g})$: quantum affine algebra$_{/\mathbb{Q}(q)}$ without the degree operator q^d.

1.2 Littelmann's path crystal. Path とは, 区分的に線形で連続な写像 $\pi:[0,1]\to\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*:=\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathfrak{h}^*$ で, $\pi(0)=0$ かつ $\pi(1)\in P$ を満たすもののことである. 以下で主に扱うのは, Lakshmibai-Seshadri path (LS path と略す) と呼ばれる path 達である; shape $\lambda\in P$ の LS path とは, ある組合せ論的な条件を満たす, $W\lambda$ の元の列 $\underline{\nu}:\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma}:0=\sigma_0<\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_s=1$ の組 $(\underline{\nu};\underline{\sigma})$ で定まる path である (詳細は §2.1 を参照). $\mathbb{B}(\lambda)$ を shape λ の LS path 全体の集合とする. $\mathbb{B}(\lambda)$ には, root operators e_j, f_j, $j\in I$, を用いて, 自然に crystal の構造が入ることが知られている. (root operator の定義は §2.2 参照).

1.3 What is the crystal $\mathbb{B}(\lambda)$? Affine Lie algebra の integral weight は, canonical central element $c\in\mathfrak{h}$ との pairing の値によって, positive level のもの, negative level のもの, そして, level-zero のものの 3 種類に分類される:

$$P=\underbrace{\{\lambda\in P\mid\lambda(c)>0\}}_{\text{(1) positive level}}\sqcup\underbrace{\{\lambda\in P\mid\lambda(c)=0\}}_{\text{(2) level-zero}}\sqcup\underbrace{\{\lambda\in P\mid\lambda(c)<0\}}_{\text{(3) negative level}}.$$

λ が positive level (resp., level-zero, negative level) であるなら, $W\lambda$ には dominant integral weight (resp., level-zero dominant integral weight, antidominant integral weight) が唯一つ含まれていることに注意しよう. ここで, $\lambda\in P$ が **level-zero dominant** であるとは,

$$\lambda(c)=0,\qquad\lambda(h_j)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\quad\text{for every } j\in I_0:=I\setminus\{0\}$$

であるときにいう.

LS path の定義から, 任意の $w\in W$ に対して $\mathbb{B}(w\lambda)=\mathbb{B}(\lambda)$ となることが容易に分かる (Remark 2.1.6 参照). 上で述べたことと合わせると, $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal としての構造を決定するという問題は, $\lambda\in P$ が

(1) dominant integral weight,

(2) level-zero dominant integral weight, または,

(3) antidominant integral weight

の場合に考えれば良いことが分かる. このうち, (1) dominant (resp., (3) antidominant) の場合については, $\mathbb{B}(\lambda)$ は highest (resp. lowest) weight λ の integrable highest (resp. lowest) weight $U_q(\mathfrak{g})$-module の crystal base と, crystal として, 同

型になることが知られている ([J, Corollary 6.4.27], [Kas1, Theorem 4.1]). そこで問題になるのは,

Q. $\lambda \in P$ が level-zero dominant のとき, shape λ の LS path 全体のなす crystal $\mathbb{B}(\lambda)$ はどのような crystal であろうか?

さて, **level-zero fundamental weight** ϖ_i, $i \in I_0 = I \setminus \{0\}$, を

$$\varpi_i := \Lambda_i - a_i^{\vee}\Lambda_0$$

で定義する. 我々は, まず, 論文 [NS1], [NS2] において, $\lambda = m\varpi_i$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$, の場合に, $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal としての構造を調べ, それが extremal weight $U_q(\mathfrak{g})$-module の crystal base と同型であることを示した (量子アフィン代数の extremal weight module については [Kas2] を参照されたい). その後, 論文 [NS4] において, λ が一般の level-zero dominant の場合に $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal structure を決定することに成功した. 本論説は, 論文 [NS4] の解説である.

2 Littelmann's path crystal.

このセクションでは, Littelmann によって導入された path crystal について復習する. 詳細は, [L1] や [L2] を参照されたい. なお, このセクションでは $\lambda \in P$ とする.

2.1 Lakshmibai-Seshadri paths. Path とは, 区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}^*$ で, $\pi(0) = 0$ かつ $\pi(1) \in P$ を満たすもののことである. このサブセクションでは, 以下で扱うことになる Lakshmibai-Seshadri path について説明する.

Definition 2.1.1. $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ を integral weight の列 $\underline{\nu} : \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1$ の組とする. $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ に以下の区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を対応させる:

$$\pi(t) = \sum_{u'=1}^{u-1} (\sigma_{u'} - \sigma_{u'-1})\nu_{u'} + (t - \sigma_{u-1})\nu_u \qquad \text{for } \ \sigma_{u-1} \leq t \leq \sigma_u, \ 1 \leq u \leq s. \tag{2.1.1}$$

Definition 2.1.2. $\mu, \nu \in W\lambda$ に対して, 以下の条件をみたす $W\lambda$ の元の列 $\mu = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k = \nu$ と positive real root の列 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ が存在するとき, $\mu > \nu$ と定める: $l = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $\nu_l = r_{\xi_l}(\nu_{l-1})$ かつ $\nu_{l-1}(\xi_l^\vee) < 0$ が成立する. ここで, positive real root ξ に対して, r_ξ は ξ に関する reflection を表し, $\xi^\vee$ は ξ の dual root を表す. $\mu > \nu$ であるとき, $\mathrm{dist}(\mu, \nu)$ で上の条件をみたす列のうち最長のものの長さ k を表すことにする.

Definition 2.1.3. $0 < \sigma < 1$ を有理数とし, $\mu, \nu \in W\lambda$, $\mu \geq \nu$ とする. (μ, ν) に対する σ-chain とは, 以下の (1) または (2) を満たす $W\lambda$ の元の列 $\mu = \nu_0 > \nu_1 > \cdots > \nu_k = \nu$ のことである:

(1) $\mu = \nu_0 = \nu$ (すなわち, $k = 0$),

(2) $k \geq 1$ であり, $l = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $\mathrm{dist}(\nu_{l-1}, \nu_l) = 1$, かつ, $\nu_{l-1}(\xi_l^\vee) \in \sigma^{-1}\mathbb{Z}_{<0}$ が成立する. ここで, ξ_l は $\nu_l = r_{\xi_l}(\nu_{l-1})$ を満たす唯一つの positive real root である ($\nu_{l-1} > \nu_l$, および, $\mathrm{dist}(\nu_{l-1}, \nu_l) = 1$ に注意).

さて, $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ を, 以下の条件 (LS) を満たす, $W\lambda$ の元の列 $\underline{\nu} : \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1$ の組としよう:

> **(LS)** すべての $u = 1, 2, \ldots, s-1$ について (ν_u, ν_{u+1}) に対する σ_u-chain が存在する.

Lemma 2.1.4 ([L2, Lemma 4.5 a)]). 条件 (LS) を満たす $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ に対して (2.1.1) で定まる区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を考えると, $\pi(0) = 0$ かつ $\pi(1) \in P$ となる. すなわち, π は path となる.

Definition 2.1.5. 条件 (LS) を満たす組 $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ に対して (2.1.1) で定まる path $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を, shape λ の **Lakshmibai-Seshadri path** (LS path と略す) と呼ぶ. $\mathbb{B}(\lambda)$ で shape λ の LS path 全体の集合を表す.

Remark 2.1.6. LS path の定義から以下のことが容易に分かる: 「任意の $\lambda \in P$ と $w \in W$ に対して, $\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}(w\lambda)$ が成立する.」

2.2 Root operators. $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ に対して,

$$H_j^\pi(t) := (\pi(t))(h_j) \quad \text{for } t \in [0,1], \qquad m_j^\pi := \min\{H_j^\pi(t) \mid t \in [0,1]\},$$

とおく.

Remark 2.2.1 ([L2, Lemma 4.5 d)]). 関数 $H_j^\pi(t)$ の極小値はすべて整数である. したがって, m_j^π は 0 以下の整数であり, $H_j^\pi(1) - m_j^\pi$ は 0 以上の整数である.

さて, 上の注意を踏まえて, (raising) root operator e_j, $j \in I$, の定義を述べよう. まず, $m_j^\pi = 0$ のときは, $e_j\pi := \mathbf{0}$ と定める. ここで, $\mathbf{0}$ は $\mathbb{B}(\lambda)$ に含まれない symbol である. $m_j^\pi \leq -1$ の場合は,

$$(e_j\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t_0) + r_j(\pi(t) - \pi(t_0)) & \text{if } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) + \alpha_j & \text{if } t_1 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_1 := \min\{t \in [0,1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi\},$$
$$t_0 := \max\{t \in [0,t_1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi + 1\}$$

(Remark 2.2.1 より, $H_j^\pi(t)$ は $[t_0, t_1]$ で狭義単調減少していることが分かる).

次に, (lowering) root operator f_j, $j \in I$, だが, $H_j^\pi(1) - m_j^\pi = 1$ の場合は, $f_j\pi := \mathbf{0}$ と定め, $H_j^\pi(1) - m_j^\pi \geq 1$ の場合は,

$$(f_j\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t_0) + r_j(\pi(t) - \pi(t_0)) & \text{if } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) - \alpha_j & \text{if } t_1 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_0 := \max\{t \in [0,1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi\},$$
$$t_1 := \min\{t \in [t_0,1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi + 1\}$$

(Remark 2.2.1 より, $H_j^\pi(t)$ は $[t_0, t_1]$ で狭義単調増加していることが分かる).

Theorem 2.2.2 ([L2, §2, §4]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ に対して $e_j\pi$, $f_j\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\mathbf{0}\}$ となる. さらに,

$$\begin{cases} \mathrm{wt}(\pi) := \pi(1) & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda), \\ \varepsilon_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid e_j^n \pi \neq \mathbf{0}\} & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in I, \\ \varphi_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid f_j^n \pi \neq \mathbf{0}\} & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in I, \end{cases}$$

と定めると, $\mathbb{B}(\lambda)$ は (P を weight lattice とする) crystal となる.

3 [NS4] の主結果.

3.1 $\mathbb{B}(\lambda)$ **の connected component について.** まず, level-zero dominant な $\lambda \in P$ に対して, $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal graph に connected component がどのくらいあるか, また, その connected component 同士がどのような関係にあるかを述べる. まず, 以下のことに注意する.

Remark 3.1.1 ([NS4, §3.1]). Level-zero dominant integral weight λ は, $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i + n\delta$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for $i \in I_0$ and $n \in \mathbb{Z}$) と書くことが出来る. ここで, $\lambda' = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ とおく. このとき, LS path の定義と root operators の定義から, $\mathbb{B}(\lambda')$ と $\mathbb{B}(\lambda)$ は, crystal として, ほぼ同型であることが分かる. (crystal graph は完全に同型. 違いは weight が一斉に $n\delta$-shift されているだけ.) したがって, 我々の目標のためには, $n = 0$ の場合を考えれば十分である.

以下, level-zero dominant integral weight $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ を fix する.

$$\mathrm{Supp}_{\geq 2}(\lambda) := \{i \in I_0 \mid m_i \geq 2\}$$

$$\mathrm{Turn}(\lambda) := \bigcup_{i \in \mathrm{Supp}_{\geq 2}(\lambda)} \{q/m_i \mid 1 \leq q \leq m_i - 1\}$$

とおく. $s := \#\mathrm{Turn}(\lambda) + 1$ とし,

$$\mathrm{Turn}(\lambda) \cup \{0, 1\} = \{0 =: \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{s-1} < \tau_s := 1\}$$

と並べておく. さらに, $1 \leq u \leq s-1$ について, τ_u の既約分数表示を $\tau_u = q_u/p_u$ とし, $I_0(\lambda, p_u) := \{i \in I_0 \mid m_i \in p_u\mathbb{Z}\}$ とおく.

Theorem 3.1.2 ([NS4, Theorem 3.1.1]). (1) $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal graph の各 connected component は以下の形をした pair で定まる LS path を必ず唯一つ含む:

$$\begin{aligned}&(\lambda - N_1\delta, \ldots, \lambda - N_{s-1}\delta, \lambda\,;\, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}, \tau_s),\\ &\qquad \text{with} \quad N_u - N_{u+1} \in \sum_{j \in I_0(\lambda, p_u)} m_j d_j \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{for} \quad 1 \leq u \leq s-1.\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

ここで, $N_s := 0$ であり, d_j, $j \in I_0$ は, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \varpi_j + n\delta \in W\varpi_j\} = \mathbb{Z}d_j$ で定まる正の整数である.

(2) 逆に (3.1.1) の形の pair は shape λ の LS path を定める.

さて, LS path の定義から, straight line $\pi_\lambda(t) = t\lambda$, $t \in [0,1]$, が shape λ の LS path であることが分かる. $\mathbb{B}_0(\lambda)$ を straight line π_λ を含む $\mathbb{B}(\lambda)$ の connected component とする.

(a) まず, root operators の定義から, $\mathbb{B}_0(\lambda)$ と (3.1.1) の形の LS path を含む connected compoenent は, crystal として, ほぼ同型であることが分かる. (crystal graph は完全に同型. 違いは weight が一斉に δ の何倍か shift されているだけ.) したがって, Theorem 3.1.2 (1) より, $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal graph は, $\mathbb{B}_0(\lambda)$ の crystal graph のコピーから成っていることが分かる.

(b) さらに, Theorem 3.1.2 より, それらのコピーは以下の条件を満たす非負整数の列 $(N_1, N_2, \ldots, N_{s-1})$ 全体で parametrize されることが分かる:

$$N_u - N_{u+1} \in \sum_{j \in I_0(\lambda, p_u)} m_j d_j \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (1 \leq u \leq s-1\,;\, N_s := 0)$$

上の (a), (b) から, $\mathbb{B}_0(\lambda)$ の様子が分かれば, $\mathbb{B}(\lambda)$ 全体の様子も分かるということになる.

3.2 $\mathbb{B}_0(\lambda)$ の crystal strucure について. このサブセクションでは, connected component $\mathbb{B}_0(\lambda)$ の crystal としての構造について述べる. そのために, まず, 記号の準備と [NS3] の主結果について復習をする.

cl : $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ を canonical projection とする. path $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して, $\mathrm{cl}(\pi) : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ を $(\mathrm{cl}(\pi))(t) := \mathrm{cl}(\pi(t))$, $t \in [0,1]$, で定義し,

$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} := \{\mathrm{cl}(\pi) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda)\}$ とおく．論文 [NS3] における主結果は以下の定理である．

Theorem 3.2.1. (1) $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ に以下の (3.2.1) によって ($P_{\mathrm{cl}} := \mathrm{cl}(P)$ を weight lattice とする) crystal structure を定義することが出来る:

$$\begin{cases} e_j\,\mathrm{cl}(\pi) = \mathrm{cl}(e_j\pi), \quad f_j\,\mathrm{cl}(\pi) = \mathrm{cl}(f_j\pi), \\ \varepsilon_j(\mathrm{cl}(\pi)) = \varepsilon_j(\pi), \quad \varphi_j(\mathrm{cl}(\pi)) = \varphi_j(\pi), \\ \mathrm{wt}(\mathrm{cl}(\pi)) = \mathrm{cl}(\mathrm{wt}(\pi)), \end{cases} \qquad \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in I. \tag{3.2.1}$$

但し，$\mathrm{cl}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ と定める．

(2) $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ を level-zero dominant integral weight とする．このとき，$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ は，$U_q'(\mathfrak{g})$-module $\bigotimes_{i \in I_0} W(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ の crystal base と同型である．ここで，$W(\varpi_i)$ は [Kas2] において導入された level-zero fundamental $U_q'(\mathfrak{g})$-module である．

次に，$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ の affinization を以下のように定義する．まず，$\widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}} := \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} \times (a_0^{-1}\mathbb{Z})$ と置く (すなわち，$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ と $a_0^{-1}\mathbb{Z}$ の直積集合)．ここで，a_0 は

$$a_0 = (\delta \text{ における } \alpha_0 \text{ の係数}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{g} \text{ is not of type } A_{2\ell}^{(2)}, \\ 2 & \text{if } \mathfrak{g} \text{ is of type } A_{2\ell}^{(2)}. \end{cases}$$

以下，$\widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}}$ の元 (η, n) を $\eta \otimes z^n$ と書くことにする．$\widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}}$ に対する Kashiwara operators e_j, f_j, $j \in I$ を，

$$e_j(\eta \otimes z^n) := (e_j\eta) \otimes z^{n+\delta_{j,0}a_0^{-1}} \qquad f_j(\eta \otimes z^n) := (f_j\eta) \otimes z^{n-\delta_{j,0}a_0^{-1}}$$

で定義する．さらに，$\mathrm{wt} : \widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}} \to P$ を $\mathrm{wt}(\eta \otimes z^n) := \mathrm{aff}(\eta(1)) + n\delta$ で定義する．ここで，$\mathrm{aff} : \mathfrak{h}^*/\mathbb{Q}\delta \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$ は，$\mathrm{aff}(\mathrm{cl}(\alpha_j)) = \alpha_j$, $j \in I_0$, および，$\mathrm{aff}(P_{\mathrm{cl}}) \subset P$ を満たす $\mathrm{cl} : \mathfrak{h}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{h}^*/\mathbb{Q}\delta$ の section である．最後に ε_j, $\varphi_j : \widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$\varepsilon_j(\eta \otimes z^n) := \varepsilon_j(\eta) \qquad \varphi_j(\eta \otimes z^n) := \varphi_j(\eta)$$

で定める．このとき，[NS4, Proposition 4.1.2 and Theorem 4.2.2] より，

Theorem 3.2.2. $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ を level-zero dominant integral weight とする．このとき，$\widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}}$ は (P を weight lattice とする) crystal になる．さらに，以下の

crystal isomorphism が存在する:

$$\Theta : \widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\substack{M \in a_0^{-1}\mathbb{Z} \\ 0 \le M < d_\lambda}} \mathbb{B}_0(\lambda + M\delta)$$

ここで, $d_\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ は $\{m_i d_i\}_{i \in I_0}$ の最大公約数である.

したがって, connected component $\mathbb{B}_0(\lambda)$ は, affinization $\widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}}$ の subcrystal ということになる. それでは, $\Theta^{-1}(\mathbb{B}_0(\lambda))$ は何になるだろうか? 結果を述べる前に, 以下の注意をする.

Remark 3.2.3. (1) 任意の $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ に対して $\mathrm{cl}^{-1}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\lambda) \neq \emptyset$ である (see [NS4, Lemma 4.2.3]).

(2) $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ のとき, $\pi(1)$ は以下の形をしている (see [NS4, Lemma 2.6.4]):

$$\pi(1) = \lambda - \alpha + n'\delta, \quad \text{with } \alpha \in a_0^{-1}\mathring{Q}_+ \text{ and } n' \in a_0^{-1}\mathbb{Z}.$$

ここで, $\mathring{Q}_+ := \sum_{j \in I_0} \mathbb{Z}_{\ge 0}\, \alpha_j$.

Theorem 3.2.4 ([NS4, Corollary 4.2.7]).

$$\Theta^{-1}(\mathbb{B}_0(\lambda)) = \{\eta \otimes z^n \in \widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}} \mid \text{条件 (C)}\}$$

(C) $\pi \in \mathrm{cl}^{-1}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\lambda)$ とし, $\pi(1) = \lambda - \alpha + n'\delta$ とする ($\alpha \in a_0^{-1}\mathring{Q}_+$, $n' \in a_0^{-1}\mathbb{Z}$; Remark 3.2.3 参照). このとき, $n' - n \in d_\lambda\mathbb{Z}$.

3.3 まとめ. (1) $\mathbb{B}(\lambda)$ の crystal graph は, $\mathbb{B}_0(\lambda)$ の crystal graph のコピーから成っており, それらのコピーは以下の条件を満たす非負整数の列 $(N_1, N_2, \ldots, N_{s-1})$ 全体で parametrize される (Theorem 3.1.2):

$$N_u - N_{u+1} \in \sum_{j \in I_0(\lambda, p_u)} m_j \mathbb{Z}_{\ge 0} \quad (1 \le u \le s-1;\ N_s := 0).$$

(2) コピーの元である $\mathbb{B}_0(\lambda)$ は, 条件 (C) を満たす元全体のなす $\widehat{\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}} = \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} \times (a_0^{-1}\mathbb{Z})$ の subcrystal に同型である (Theorem 3.2.4). ここで, $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ は, level-zero fundamental $U_q'(\mathfrak{g})$-module のテンソル積の crystal base に同型である (Theorem 3.2.1).

3.4 残っている問題. $\lambda = m\varpi_i$ のとき, $\mathbb{B}(\lambda)$ は extremal weight module の crystal base と同型であることが, 論文 [NS1], [NS2] において, 示されている. ところが, λ が $m\varpi_i$ の形でないときは, $\mathbb{B}(\lambda)$ は extremal weight module の crystal base と 同型には決してならない ([NS4, Appendix]). λ が一般のときに, $\mathbb{B}(\lambda)$ に同型な crystal base を持つ $U_q(\mathfrak{g})$-module が存在するかどうかは今のところ分かっていない.

最後に. 今回, この研究集会で講演する機会を与えて下さった水川裕司先生に感謝いたします. ありがとうございました.

References

[J] A. Joseph, "Quantum Groups and Their Primitive Ideals", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 29, Springer–Verlag, Berlin, 1995.

[Kac] V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras", 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

[Kas1] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, *in* "Lie Algebras and Their Representations" (S.-J. Kang et al., Eds.), Contemp. Math. Vol. 194, pp. 177–186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Kas2] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.

[L1] P. Littelmann, A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kac–Moody algebras, *Invent. Math.* **116** (1994), 329–346.

[L2] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) **142** (1995), 499–525.

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2003**, no.32, 1731–1754.

[NS2] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra II, preprint, 2003, to appear in *Adv. Math.*

[NS3] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2005**, no.14, 815–840.

[NS4] S. Naito and D. Sagaki, Crystal structure of the set of Lakshmibai-Seshadri paths of a level-zero shape for an affine Lie algebra, math.QA/0510017.