数理解析研究所講究録
1497巻 2006年 140-153

On the computation of irreducible characters of finite reductive groups

名大多元数理　庄司俊明 (Toshiaki Shoji)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1. 序

2002年の11月に数理解析研究所で研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」が開催され, そこで "Generalized Green functions, unipotent classes and graded Hecke algebras" と題した話をさせて頂いた. その報告が [S3] に掲載されているが, 本稿の話はその続きである. 問題の背景等については [S3] にも述べたので、そちらも参照されたい。本稿は [S3] と重なる部分も多いのだが, 参照の便を考えてあえて重複は気にしないで書くことにする. 最初に有限簡約群の既約指標決定の概略とその現状について解説し, 次いで主要結果 (定理 4.7) について述べる.

1.1. G を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結な簡約代数群, $F: G \to G$ を $\mathbf{F}_q$ 構造に付随する G の Frobenius 写像とする. G の $\mathbf{F}_q$ 有理点のなす有限群 $G(\mathbf{F}_q)$ は G の F による固定点からなる群 G^F と一致し有限簡約群と呼ばれる. G^F の表現論の基本的な問題は $\mathbf{C}$ 上の既約表現を全て決定し, その既約指標を計算することである. この問題が歴史に登場したのは Frobenius が有限群の群指標の理論を構築する中で, 1900年頃 $SL_2(\mathbf{F}_q)$ の指標表を計算したのが最初であろう。ついで $GL_3(\mathbf{F}_q), GL_4(\mathbf{F}_q)$ の指標表が Steinberg により計算されたが, 1955年 Green が一般の $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標表を完全に決定した。ここで指標表を決定するとは既約指標を分類し, それを計算する (全ての n に適用できる) アルゴリズムを与えることである。$GL_n(\mathbf{F}_q)$ の結果を他の有限簡約群, 例えば $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ や $SO_n(\mathbf{F}_q)$ などの古典群, に拡張することは困難な問題であり, Srinivasan による $Sp_4(\mathbf{F}_q)$ の指標表の決定など個別の計算はあるものの, 一般的な結果にはつながらなかった.

1976年, Deligne と Lusztig が表現論に l 進 cohomology の理論を持ち込むことによりブレーク・スルーが実現する. 彼らは l 進 cohomology 群の上に有限簡約群 G^F の表現を構成し, その交代和として Deligne-Luszitg の一般指標 $R_T^G(\theta)$ を定義した. $R_T^G(\theta)$ から G^F のほとんど全ての既約指標が得られる. ここに, 個別の扱いを越えた有限簡約群の表

現の一般理論が姿を現わしたのだった．さらに Lusztig は当時導入されたばかりの交叉 cohomology の理論, perverse sheaf の理論などの強力な道具を駆使して 1980 年代に G^F の既約指標の分類を完成し, その次数をすべて決定した．

1.2. 既約指標の分類が完成したことにより次の目標は G^F の既約指標の決定, すなわち G^F の指標表の完成ということになる．それははるかに困難な問題であり, 現在でも完全には解決していない．しかし Lusztig は既約指標の決定に向けて 1980 年代後半に指標層の理論を構築し, 既約指標決定への道筋を Lusztig 予想として定式化した．Lusztig 予想は, 全ての有限簡約群 G^F の既約指標を計算するための統一的なアプローチを与えるのである．

Lusztig 予想を説明するために指標層について少し述べる．l 進 cohomology の上に表現を構成することから複素数体 $\mathbf{C}$ 上の表現を考える代わりに, l 進数体 $\mathbf{Q}_l$ の代数的閉包 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の表現を考えることにする．ここに l は p と素な素数．抽象的な体としては $\mathbf{C} \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l$ なので表現論は変わらない．G を簡約代数群とし, G 上の pervere sheaf を考える．G の指標層とは, G の共役の作用に関するある種の G 同変な simple perverse sheaf のことをいう．$\widehat{G}$ で G の指標層全体の集合を表す．指標層は $\mathbf{C}$ 上の簡約代数群に対しても全く同様に定義できるが、標数 p の状況では, さらに Frobenius 写像との関係が重要になる．指標層 $A \in \widehat{G}$ は有界な複体でその i 番目の cohomolgy sheaf $\mathcal{H}^iA$ は constructible な $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 局所系をなし, 点 $x \in G$ での茎 $\mathcal{H}^i_xA$ は有限次元 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ ベクトル空間になる．F^*A を A の F による引き戻しとする．$F^*A \simeq A$ となるとき A を F 不変な指標層といい, $\widehat{G}^F$ で F 不変な指標層の全体を表す．$A \in \widehat{G}^F$ に対して同型 $\varphi : F^*A \to A$ をひとつ定める．φ は $x \in G^F$ での茎 $\mathcal{H}^i_xA$ 上の線形変換 φ^i を誘導する．関数 $\chi_{A,\varphi} : G^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を

$$\chi_{A,\varphi}(x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\varphi^i, \mathcal{H}^i_xA)$$

により定義する．$\chi_{A,\varphi}$ を A の特性関数という．A が G 同変であることから, $\chi_{A,\varphi}$ は G^F 上の類関数になる．同様の定義は G 同変な F 不変 perverse sheaf K と同型 $\varphi : F^*K \simeq K$ についても適用でき, 特性関数として G^F 上の類関数 $\chi_{K,\varphi}$ が得られる．特性関数が G の指標層の幾何的理論と G^F の指標理論とを結びつけていることに注意する．

G^F の $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の類関数全体のなすベクトル空間を $C(G^F)$ と表す．よく知られているように, $C(G^F)$ には G^F の既約指標の全体 $\operatorname{Irr} G^F$ を正規直交基底とするような内積が定義できる．指標層に関して Lusztig は次の基本的な結果を得た．

定理 1.3 (Lusztig [L1]).

G^F は有限簡約群, $\mathbf{F}_q$ の標数 p はあまり小さくないとする (例えば $p > 5$). このとき

(i) $\{\chi_{A,\varphi} \mid A \in \widehat{G^F}\}$ は $C(G^F)$ の正規直交基底をなす.

(ii) 関数 $\chi_{A,\varphi}$ は "計算可能" である.

注意 1.4. 上の結果に対して, いくつか但し書きが必要である.

(i) について. $\chi_{A,\varphi}$ は同型写像 φ の取りかたに依存する. しかし A が単純であることから, φ はスカラー倍の差を除いて一意的に定まる.

(ii) について. $\chi_{A,\varphi}$ が計算可能とは, $\chi_{A,\varphi}$ をいくつかの知られた関数を使って具体的に書き下すことができるという意味である. しかも全ての G^F に対して通用する統一的なアルゴリズムが存在する. しかし実際には Lusztig のアルゴリズムにはスカラー倍の不定性が含まれていて, 完全に計算可能ではない. " " はその意味である.

1.5. G^F の既約指標を統一的に計算するための基本戦略として Lusztig は **Lusztig 予想**を提案した. Lusztig 予想は類関数 $\chi_{A,\varphi}$ の既約指標への分解を記述するものである. この分解が分かると $C(G^F)$ の 2 つの基底, G^F の既約指標の全体と指標層の特性関数の全体, の間の変換行列が求まり, 既約指標の計算は $\chi_{A,\varphi}$ の計算に帰着する. そこで定理 1.3 (ii) により既約指標が計算できることになる. G の中心が連結な場合にはより具体的に, " 指標層の特性関数がスカラー倍を除いて, G^F の概指標に一致する" という予想になる. ここに概指標とは, Lusztig が G^F の既約指標の分類をする過程で導入したもので, 既約指標の明示的な線形結合として定義されるものである. G の中心が連結でない場合にも概指標をしかるべく定義することにより同様の予想が得られる.

以上の議論から, G^F の既約指標の決定には次のプロセスが必要になる.

(A) Lusztig 予想の証明

(B) Luszitg 予想に現われるスカラーの決定

(C) 指標層の特性関数を計算するアルゴリズムに含まれるスカラーの決定

(A) の Lusztig 予想については現在次の場合に確かめられている.

(i) G の中心が連結, $p \neq 2$ (Shoji)

(ii) G は一般. ただし Luszitig induction R_L^G の既約指標への分解が既知と仮定する (Lusztig)

(iii) $p \neq 2$. $G = Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n}$ (Waldspurger)

(iv) $G = SL_n$ ($p >> 0$, Shoji), $G = SL_n, SU_n$ ($p >> 0, q >> 0$, Bonnafé)

(iii), (iv) については (B) のスカラーも決定されている．本稿のテーマは (C) のスカラーを決定し，特性関数の "計算可能" を " " 抜きの，文字どおりの計算可能にさせることである．

2. $R_T^G(\theta)$ と Green 関数

2.1. この節では，Deligne-Lusztig の一般指標と概指標について述べる．まず $R_T^G(\theta)$ の定義から始める．G を $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結代数群，$F : G \to G$ を $\mathbf{F}_q$ 構造に付随したフロベニウス写像とする．T を G の F 不変な極大トーラスとし，$B = UT$ を T を含む G の Borerl 部分群とする．B の巾単根基 U は必ずしも F 不変ではない．G の部分多様体 $X_U = \{g \in G \mid g^{-1}F(g) \in U\}$ に $(g,t) : x \mapsto gxt^{-1}$ により $G^F \times T^F$ が作用する ($g \in G^F, t \in T^F, x \in X_U$)．その作用は compact support の l 進 cohomology 群 $H_c^i(X_U, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ への線形の作用を誘導し，T^F の線形指標 $\theta : T^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ による θ-isotypic part $H_c^i(X_U, \bar{\mathbf{Q}}_l)_\theta$ は G^F 加群になる．G^F 加群の形式的な交代和

$$R_T^G(\theta) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i H_c^i(X_U, \bar{\mathbf{Q}}_l)_\theta$$

を (T, θ) で定まる Deligne-Lusztig の virtual G^F 加群という．その指標として得られる G^F の一般指標を Deligne-Lusztig の一般指標という．

G_{uni} を G の巾単元の集合 (巾単多様体) とし G_{uni}^F をその F 固定点の集合とする．$R_T^G(\theta)$ の指標の G_{uni}^F への制限 $Q_T^G : G_{\mathrm{uni}}^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l, u \mapsto \mathrm{Tr}\,(u, R_T^G(\theta))$ を G^F の Green 関数という．Green 関数 Q_T^G は θ の取りかたによらない．Green 関数の重要性は Deligne-Lusztig によって示された次の指標公式にある．

2.2. (指標公式) $g = su = us$ を $g \in G^F$ の Jordan 分解とする．(s : 半単純, u : 巾単)．このとき

$$\mathrm{Tr}\,(g, R_T^G(\theta)) = |Z_G^0(s)^F|^{-1} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T^F}} Q_{xTx^{-1}}^{Z_G^0(s)} \theta(x^{-1}sx).$$

s の中心化群 (の連結成分) $Z_G^0(s)$ は再び連結代数群になるので指標公式により $R_T^G(\theta)$ の指標の計算は種々の簡約部分群の Green 関数の計算に帰着することが分かる．

2.3. $B_0 \supset T_0$ を F 不変な Borel 部分群と極大トーラスの組とする. F は T_0 の Weyl 群 $W = N_G(T_0)/T_0$ に自然に作用する. F が W に自明に作用するとき G^F はsplit type であるという. 例えば $G^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ は split である. 以後, 簡単のために G^F はsplit であると仮定する. このとき, G の F 不変な極大トーラスの G^F 共役類は W の共役類と1対1に対応する. w (の共役類) に対応する G^F の極大トーラス (の同型類) を T_w と表す. W の既約表現 $E \in W^\wedge$ に対し, G^F の類関数 R_E を

$$R_E = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \mathrm{Tr}\,(w, E) R^G_{T_w}(1)$$

により定義する. ただし $R^G_{T_w}(1)$ は T^F_w の単位指標 $\theta = 1$ に対する Deligne-Lusztig の一般指標を意味する. Deligne-Lusztig によって示された $R^G_T(\theta)$ の直交関係より,

$$\langle R_E, R_{E'} \rangle = \begin{cases} 1 & E \simeq E' \text{ の場合}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が成立する. ここに $\langle\, , \rangle$ は $C(G^F)$ の内積を表す. $G^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合, R_E は既約になり, $\{R_E \mid E \in W^\wedge\}$ が n の分割によってラベル付けられた巾単指標 $\{\rho^\lambda \mid \lambda$ は n の分割$\}$ を与える. しかし一般に R_E は既約ではない. 一般の θ に関する $R^G_T(\theta)$ についても R_E の類似物が定義され (この場合, E は θ の固定化群 W_θ の既約指標), Lusztig は それらの R_E を既約指標に分解することにより G^F の既約表現の分類を完成した. ここに現われた R_E 達の集合は $C(G^F)$ の正規直交系を与えるが, $G = GL_n$ の場合を除けば基底にはならない. Lusztig はこの正規直交系の自然な拡張として $C(G^F)$ の正規直交基底を得た. それを G^F の概指標という. 概指標の既約指標への分解は具体的に与えられる. 注目すべき点は概指標に現れる既約指標の重複度は (適当なラベル付けのもとに) q によらない定数になることである. q が増大すれば当然 G^F の既約指標の個数は増大する. その中で重複度が q によらないことは概指標がほとんど既約指標に近いことを意味する. 概指標といわれる所以である.

3. 指標層と Green 関数

3.1. 前節で説明した $R_T^G(\theta)$ に対応する事柄が指標層においても成立する．それが Deligne-Lusztig 理論の幾何学化であり，Lusztig 予想の要請でもある．$R_T^G(\theta)$ は G の部分多様体の l 進 cohomology を使って構成されるが，それはあくまで G と F の組 (G,F) に対して定まるものである．その意味では G^F に付随する対象なのであって，G に付随する幾何的な対象である指標層とは性格が異なることに注意する．なお，ここで扱う指標層は極大トーラスに関係した部分のみであり，Lusztig の指標層の理論の一部である．しかしここでの議論が指標層の理論の母体となったのであった．

G を前の通りとし，Springer 写像

$$\pi : \widetilde{G} = \{(g, xB) \in G \times G/B \mid x^{-1}gx \in B\} \to G \tag{3.1.1}$$

を考える．π は $\widetilde{G}$ の第一成分への射影である．G_{reg} を G の正則半単純元全体の集合とする．G_{reg} は G の open dense な部分集合になる．$\pi_0 : \pi^{-1}(G_{\mathrm{reg}}) \to G_{\mathrm{reg}}$ を π の制限とする．$\pi^{-1}(G_{\mathrm{reg}}) \simeq \{(g, xT) \in G \times G/T \mid x^{-1}gx \in T \cap G_{\mathrm{reg}}\}$ であり，右辺には W が自然に作用する．これにより π_0 は不分岐な W-covering $\pi^{-1}(G_{\mathrm{reg}}) \to \pi^{-1}(G_{\mathrm{reg}})/W \simeq G_{\mathrm{reg}}$ を与える．$\alpha : \pi^{-1}(G_{\mathrm{reg}}) \to T, (g, xT) \mapsto x^{-1}gx$ として次の図式を考える．

$$T \xleftarrow{\ \alpha\ } \pi^{-1}(G_{\mathrm{reg}}) \xrightarrow{\ \pi_0\ } G_{\mathrm{reg}} \tag{3.1.2}$$

T 上の tame 局所系 $\mathcal{L}$ (ある整数 m に対して $\mathcal{L}^{\otimes m} \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l$ となる局所系) に対して，$\alpha^*\mathcal{L} \simeq \pi_0^*\mathcal{L}_0$ となる G_{reg} 上の半単純局所系 $\mathcal{L}_0$ が一意的に定まる．$\mathcal{L}_0$ から DGM 拡大により得られる交叉 cohomology 複体 (の次数シフト) $K_{\mathcal{L}} = \mathrm{IC}(G, \mathcal{L}_0)[\dim G]$ は G 同変な半単純 perverse sheaf になる．$K_{\mathcal{L}}$ の単純成分として得られる G 同変な simple perverse sheaf が指標層の典型的な例である．ここまでの構成には G の $\mathbf{F}_q$ 構造は関与せず，$\mathbf{C}$ 上の簡約代数群に対しても意味を持つことに注意する．

ここで T を F 不変な極大トーラスとし，$\mathcal{L}$ を F 不変な局所系，すなわち $F^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ となる局所系とする．同型 $\varphi_0 : F^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ を標準的に選ぶと，特性関数 $\chi_{\mathcal{L},\varphi_0} : T^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ は T^F の線形指標 $\theta \in \mathrm{Hom}(T^F, \bar{\mathbf{Q}}_l^*)$ を与える．図式 (3.1.2) の各項と写像はすべて F 不変であり，同型 $\varphi : F^*K_{\mathcal{L}} \to K_{\mathcal{L}}$ が誘導される．次の事実は Luszitg が $q >> 0$ のもとに証明し，後に筆者により q の制限が外された．

定理 3.2. $\chi_{K_{\mathcal{L}},\varphi} = (-1)^{\dim G} R_T^G(\theta)$.

$\chi_{K_{\mathcal{L}},\varphi}$ の制限 $\tilde{Q}_T^G : G_{\mathrm{uni}}^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を指標層に付随した Green 関数という. 上の事実から $\tilde{Q}_T^G = (-1)^{\dim G} Q_T^G$ である. $\tilde{Q}_T^G$ が Green 関数の幾何的実現を与える. ここで特別な場合として $\mathcal{L}$ が定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ の場合を考える. このとき $K = K_{\bar{\mathbf{Q}}_l}$ は (W の G への自明な作用のもとに) W 同変な perverse sheaf になり, $\mathrm{End}\, K \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l[W]$ が成立する. したがって, K の単純成分は W の既約指標 によってラベル付けられる. 前のように G^F を split と仮定し $T = T_0$ とする. $E \in W^\wedge$ に対応する K の単純成分を K_E と表すと, K_E は F 不変になり $\varphi : F^*K \simeq K$ より自然に同型 $\varphi_E : F^*K_E \simeq K_E$ が導かれる. 定理3.2 の系として得られる次の事実が Lusztig 予想の標準的な例であり, その出発点となったものである.

系 3.3. $\chi_{K_E,\varphi_E} = (-1)^{\dim G} R_E$.

3.4. 指標層の特性関数 χ_{K_E,φ_E} の計算は指標公式により Green 関数 $\tilde{Q}_{T_w}^G$ $(w \in W)$ の計算に帰着する. 以下, Green 関数計算のアルゴリズムについて説明する. 前の通りに, $K = K_{\bar{\mathbf{Q}}_l}$ を極大トーラス T_0 の定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ により定まる perverse sheaf とし $K_u = K|_{G_{\mathrm{uni}}}$ とおく. K_u は (次数シフトを除いて) G_{uni} 上の G 同変な半単純 perverse sheaf になることが知られており

$$K_u[-d] \simeq \bigoplus_{(C',\mathcal{E}')} V_{(C',\mathcal{E}')} \otimes \mathrm{IC}(\overline{C'},\mathcal{E}')[\dim C'] \tag{3.4.1}$$

と分解できる. ここに $d = \dim T$, C' は G の巾単共役類, $\mathcal{E}'$ は C' 上の G 同変な単純局所系であり, 和はそのような組 $(C',\mathcal{E}')$ をすべて動く. $V_{(C',\mathcal{E}')}$ は K_u の単純成分 $\mathrm{IC}(\overline{C'},\mathcal{E}')[\dim C']$ の重複度の空間である. K への W の作用は K_u への W の作用を導き, それより各 $V_{(C',\mathcal{E}')}$ は W-加群となる. この状況で, $\mathrm{End}\, K_u \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l[W]$ となることが証明される. したがって各 $V_{(C',\mathcal{E}')}$ は既約 W 加群となり, W のすべての既約表現が $V_{(C',\mathcal{E}')}$ の形で得られる. 言い替えると対応 $(C',\mathcal{E}') \mapsto V_{(C',\mathcal{E}')}$ により, 全単射

$$\{(C',\mathcal{E}') \mid C' : \text{巾単類}, \mathcal{E}' : C' \text{ 上の } G \text{ 同変単純局所系で} V_{(C',\mathcal{E}')} \neq \{0\} \text{ となるもの}\} \simeq W^\wedge$$

が得られる. この対応を Weyl 群の既約指標と G の巾単類との間の **Springer 対応**という. 左辺の集合を $\mathcal{I}_0$ と表す. $i = (C',\mathcal{E}') \in \mathcal{I}_0$ に対し, $K_i = \mathrm{IC}(\overline{C'},\mathcal{E}')[\dim C']$ とおく. $\varphi : F^*K \simeq K$ は $F^*K_u \simeq K_u$ を導き, 同型 $\varphi_i : F^*\mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'$, $\tilde{\varphi}_i : F^*K_i \simeq K_i$ を誘導する (各巾単類 C はすべて F 不変になる). 各 $i \in \mathcal{I}_0$ に対し, $X_i = \chi_{K_i,\tilde{\varphi}_i}$ とおく. X_i は G_{uni}^F 上の

G^F 不変な関数のなす線形空間 $C(G^F_{\mathrm{uni}})$ の元である.

$$\widetilde{Q}^G_{T_w} = \sum_{i\in\mathcal{I}_0} Tr(w, E_i)X_i$$

と表されるので (E_i は $i \in \mathcal{I}_0$ に対応する W の既約表現) Green 関数 $\widetilde{Q}^G_{T_w}$ ($w \in W$) の決定は関数 X_i ($i \in \mathcal{I}_0$) の決定と同値になる.

3.5. 各 $j \in \mathcal{I}_0$ に対し, 関数 $Y_j \in C(G^F_{\mathrm{uni}})$ を

$$Y_j(g) = \begin{cases} \mathrm{Tr}\,(\varphi_i, \mathcal{E}'_g) & g \in C'^F \text{ の場合}, \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

として定義する. このとき $X_i = \sum_{j\in\mathcal{I}_0} a_{ji}Y_j$ と表されることが知られている. (これは自明ではなく, 証明には指標層に関する深い議論を必要とする). 筆者が Green 関数の場合に考案し [S1], [S2], 後に Lusztig [L1] によって一般 Green 関数の場合にまで拡張、強化された議論により, この係数 $a_{ij} \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ を計算する統一的なアルゴリズムが存在する. そこで関数 X_i の決定は関数 Y_j の決定に帰着する. 以下に述べるように関数 Y_j はスカラー倍を除けば具体的に記述できるのである.

$j = (C', \mathcal{E}')$ とする. $u \in C'^F$ を取り, $A_G(u) = Z_G(u)/Z^0_G(u)$ とおく. 有限群 $A_G(u)$ に F が自然に作用し, C'^F の G^F 共役類は $A_G(u)$ の F 共役類と 1 対 1 に対応する. ($a, b \in A_G(u)$ に対し, $b = c^{-1}aF(c)$ となる $c \in A_G(u)$ が存在するとき a と b は F 共役であるという.) $a \in A_G(u)$ に対応する C'^F の G^F 共役類 (の代表元) を $u_a \in C'^F$ とする. 一方, C' 上の G 同変単純局所系は $A_G(u)$ の既約指標と 1 対 1 に対応する. $\mathcal{E}'$ に対応する $A_G(u)$ の既約指標を ρ とする. $\mathcal{E}'$ が F 不変なので ρ も F 不変になる. F の作用による半直積 $A_G(u)\langle F\rangle$ を考えて ρ の $A_G(u)\langle F\rangle$ への拡大 $\widetilde{\rho}$ をひとつ固定する. 関数 $Y'_j \in C(G^F_{\mathrm{uni}})$ を

$$Y'_j(g) = \begin{cases} \mathrm{Tr}\,(aF, \widetilde{\rho}) & g \text{ が } u_a \text{ に } G^F \text{ 共役な場合}, \\ 0 & g \notin C'^F \text{ の場合} \end{cases}$$

とおく. するとあるスカラー $\tau_j \in \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ が存在して $Y'_j = \tau_j Y_j$ と表される. Y'_j は完全に記述可能な関数なので結局 Green 関数 $Q^G_{T_w}$ の決定はスカラー τ_j ($j \in \mathcal{I}_0$) の決定に帰着することになる.

3.6. 3.5 節に出てきたスカラー τ_j は次のような幾何的な意味合いを持っている. $\widetilde{G}$ 上の定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ の写像 π による順像 $R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ は交叉 cohomology 複体 $\mathrm{IC}(G, (\pi_0)_*\bar{\mathbf{Q}}_l)$ と同型

になることが知られている．これより，$\mathcal{H}_g^i(K) \simeq H^i(\mathcal{B}_g, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ が得られる．ただし $\mathcal{B} = G/B$ を旗多様体としたとき，$\mathcal{B}_g$ は g を含むような Borel 部分群全体のなす $\mathcal{B}$ の部分多様体を表す．この同型により，$g \in G^F$ に対し，$H^i(\mathcal{B}_g, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ 上に W の作用が得られ（ Weyl 群の **Springer 表現**），また F の作用も得られる．Springer 表現を使うと Green 関数の次のような表示が得られる．

$$Q_{T_w}^G(u) = \sum_{I \geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(Fw, H^i(\mathcal{B}_u, \bar{\mathbb{Q}}_l)).$$

F と W は可換だから F の $H^i(\mathcal{B}_u, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ 上の固有空間は W 加群になる．この W 加群を決定するのが係数 a_{ij} を計算するアルゴリズムで，F の固有値を決定するのがスカラー τ_j の決定に対応する．そこで Green 関数の決定は次の問題に帰着する．

問題 3.7. $u \in C'^F$ を固定したとき，$H^i(\mathcal{B}_u, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ への F の作用を決定せよ．

F の作用はもちろん $u \in C'^F$ の取りかたに依存する．また $d_u = \dim \mathcal{B}_u$ としたとき，重要なのは F の top cohomology $H^{2d_u}(\mathcal{B}_u, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ への作用であって，それが分かれば Green 関数は計算できるのである．そこで F の作用が記述できるように $u \in C'^F$ を選ぶことが問題になる．それは C'^F の G^F 共役類への分割を記述するような標準的な代表元 $u \in C'^F$ を選ぶ問題でもある．標数 p が good prime の場合，次が知られている（[BS], [S1], [S2]）．

- G^F が split 型，$G \neq E_8$ の時，F が $H^{2d_u}(\mathcal{B}_u, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ にスカラー倍 $q^{d_u}\,\mathrm{Id}$ で作用するような $u \in C'^F$ が存在する．（このような代表元 $u \in C'^F$ を split 元という）．
- $G = E_8$ とする．$q \not\equiv -1 \pmod 3$ の場合，split 元が存在する．$q \equiv -1 \pmod 3$ の場合 split 元は存在しないが F の作用は記述できる．

これらの事実を使って，p が good prime の場合に Green 関数は完全に計算されている．

4. 一般 Green 関数

4.1. Green 関数が計算できたことで，$R_T^G(\theta)$ が計算できるようになった．それはまた，$K_\mathcal{L}$ の単純成分として得られる指標層の特性関数が計算できることを意味する．ところで Luszitg の指標層の理論は Harish-Chandra の有限簡約群の既約表現の理論をモデルにしている．中心となる柱は cuspidal な対象とそれを誘導して得られる対象を分解してできる単純な対象である．3 節で議論した $K_\mathcal{L}$ は極大トーラスから得られる複体で，これが Harish-Chanra の理論における主系列表現に対応する．ただし Harish-Chandra 理論で

は極大トーラスからの誘導にはそれを含む F 不変な Borel 部分群の存在を必要としたが, F 不変な $K_{\mathcal{L}}$ については極大トーラスの F 不変性だけですむので, はるかに効率がよい.

4.2. 指標層の理論で cuspidal な既約指標の役割を果たすのが cuspidal な局所系である. G を連結な簡約代数群, $\pi : G \to G/Z^0(G)$ とする. C を $G/Z^0(G)$ の共役類とするとき, C 上の局所系 $\mathcal{E}$ が次の条件をみたすとき cuspidal であるといわれる;. 任意の放物部分群 $P = LU_P$ $(P \neq G)$ とその Levi 部分群 L の共役類 C_L の元 g に対し,

$$H_c^{\delta}(gU_P \cap \Sigma, \mathcal{E}) = 0.$$

ただし, $\Sigma = \pi^{-1}(C)$, $\delta = \dim C - \dim C_L$ である. さらに $f : G \to G/G_{\mathrm{der}}$ とし, トーラス G/G_{der} 上の tame 局所系 $\mathcal{L}$ に対して Σ 上の局所系 $\mathcal{E}_1$ を $\mathcal{E}_1 = f^*\mathcal{L} \boxtimes \pi^*\mathcal{E}$ により定義する. 組 $(\Sigma, \mathcal{E}_1)$ を G 上の cuspidal pair という.

$P = LU_P$ を G の放物部分群とし, $(\Sigma, \mathcal{E}_1)$ を L の cuspidal pair とする. 指標層の induction により $(\Sigma, \mathcal{E}_1)$ から G 上の 半単純な G-同変 perverse sheaf $K = K_{L,\Sigma,\mathcal{E}_1}$ が構成される. G の指標層の集合 $\widehat{G}$ はすべての3つ組 $(L, \Sigma, \mathcal{E}_1)$ から得られる $K_{L,/\Sigma,\mathcal{E}_1}$ の単純成分全体の集合として定義される. ここで $(L, \Sigma, \mathcal{E}_1)$ が F 不変であると仮定し $\varphi_0 : F^*\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_1$ とする. φ_0 は $\varphi : F^*K \simeq K$ を誘導し, 特性関数 $\chi_{K,\varphi}$ が定義される. 特に $L = T$ の場合 $\mathcal{E} = \bar{\mathbf{Q}}_l$ とすれば3節で議論した $K_{\mathcal{L}}$ が得られる.

4.3. C を $L/Z^0(L)$ の巾単類とする. $\pi : L \to L/Z^0(L)$ とすると, $\Sigma = \pi^{-1}(C) \simeq Z^0(L) \times C$ である. C 上の cuspidal な局所系 $\mathcal{E}$ と $Z^0(L)$ の tame 局所系 $\mathcal{L}$ に対して $\mathcal{E}_1 = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{E}$ を考える. $(L, C, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ は F 不変であると仮定し $\varphi_0 : F^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$, $\psi : F^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ を固定する. これらのデータより $\varphi : F^*K \simeq K$ が誘導され G^F の類関数 $\chi_{K,\varphi}$ が定義される. $\chi_{K,\varphi}$ の G^F_{uni} への制限を**一般 Green 関数** といい, $Q_{L,C,\mathcal{E},\varphi_0}$ と表す. $Q_{L,C,\mathcal{E},\varphi_0}$ は $\mathcal{L}$ の取りかたによらない. 4.2 の3つ組 $(L, \Sigma, \mathcal{E}_1)$ から得られる特性関数 $\chi_{K,\varphi}$ に対して, Green 関数の場合と同様の一般 Green 関数を使った指標公式が成立し, $\chi_{K,\varphi}$ の計算は一般 Green 関数の計算に帰着する. 指標層 $A \in \widehat{G}$ に対し A が $K = K_{L,\Sigma,\mathcal{E}_1}$ の単純成分となるような 組 $(L, \Sigma, \mathcal{E}_1)$ が一意的に定まる. A が F 不変ならば $(L, \Sigma, \mathcal{E}_1)$ も F 不変に取れて A の特性関数の計算は 種々の F 不変な L に対する $\chi_{K,\varphi}$ の計算に帰着する. したがって A の特性関数の計算は一般 Green 関数の計算に帰着することになる.

4.4. C を L の巾単類, $\mathcal{E}$ を C 上の cuspidal 局所系とし $\mathcal{E}_1 = \bar{\mathbb{Q}}_l \boxtimes \mathcal{E}$ から得られる G 上の perverse sheaf を K とする. 3 節の議論の拡張として, K の G_{uni} への制限は (次数シフトを除いて) 半単純 perverse sheaf となり, 次が得られる.

$$K[-d]|_{G_{\mathrm{uni}}} = \bigoplus_{(C',\mathcal{E}')} V_{(C',\mathcal{E}')} \otimes \mathrm{IC}(\overline{C'}, \mathcal{E}')[\dim C']. \tag{4.4.1}$$

ただし $d = \dim Z^0(L)$, $(C', \mathcal{E}')$ は G の巾単類とその上の G 同変単純局所系をすべて動く. $V_{(C',\mathcal{E}')}$ は単純成分 $\mathrm{IC}(\overline{C'}, \mathcal{E}')[\dim C']$ の重複度の空間を表す. (4.4.1) の左辺を K_u とおく. $\mathcal{W} = N_G(L)/L$ とおく. 一般にこのような $\mathcal{W}$ は Coxeter 群にならないが, この場合 (L が cuspidal pair $(C, \mathcal{E})$ を持つ場合) には $\mathcal{W}$ は Coxeter 群になる. さて $\mathrm{End}\, K_u \simeq \bar{\mathbb{Q}}_l[\mathcal{W}]$ となることが知られている. したがって 3 節と同様に $V_{(C',\mathcal{E}')}$ は既約 $\mathcal{W}$ 加群となり, すべての既約 $\mathcal{W}$ 加群が (4.4.1) の分解に現れることが分かる. $\mathcal{I}$ を全ての組 $(C', \mathcal{E}')$ の集合とする (C' は G の巾単類, $\mathcal{E}'$ はその上の G 同変単純局所系). 上の議論により, 各 $E \in \mathcal{W}^\wedge$ に対し, 既約 $\mathcal{W}$ 加群 $V_{(C',\mathcal{E}')}$ が E に一致するような組 $(C', \mathcal{E}') \in \mathcal{I}$ が唯ひとつ定まる. Luszitg は Springer 対応を拡張して次を示した.

定理 4.5 (一般 Springer 対応). 上の対応のもとに

$$\mathcal{I} \simeq \coprod_{(L,C,\mathcal{E})} (N_G(L)/L)^\wedge.$$

ここに和は $(C, \mathcal{E})$ が L の cuspidal pair となるような組 $(L, C, \mathcal{E})$ をすべて動く. この対応で, $(L, C, \mathcal{E}) = (T, \{e\}, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ の場合 $\mathcal{W}$ は Weyl 群 W に一致し, $\mathcal{I}_0 \simeq W^\wedge$ が本来の Springer 対応になっている.

4.6. 定理4.5の組 $(L, C, \mathcal{E})$ が F 不変だとして, $\varphi_0 : F^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ を選ぶと, $\varphi : F^*K \simeq K$ が誘導される. 各 $i = (C', \mathcal{E}') \in \mathcal{I}^F$ に対して F の $V_{(C',\mathcal{E}')}$ への作用を決めると (4.4.1) より $\widetilde{\varphi}_i : F^*\,\mathrm{IC}(\overline{C'}, \mathcal{E}') \simeq \mathrm{IC}(\overline{C'}, \mathcal{E}')$ が定まり, これより $\varphi_i : F^*\mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'$ が得られる. そこで 3 節と同様に各 $i \in \mathcal{I}^F$ に対して $Y_i \in C(G^F_{\mathrm{uni}})$ を定義する. (3 節の Y_i はこれの特別な場合に相当する). 今の場合には $\{Y_i \mid i \in \mathcal{I}^F\}$ は $C(G^F_{\mathrm{uni}})$ の基底になることが確められる. また $Y_i' \in C(G^F_{\mathrm{uni}})$ も前と同様に定義でき, Y_i はスカラー倍を除いて Y_i' に一致する, すなわち $Y_i' = \tau_i Y_i$ となる $\tau_i \in \bar{\mathbb{Q}}_l^*$ が存在する. 一般 Green 関数の計算は結局, これらの τ_i の計算に帰着することになる. 序論の注意 1.4 で述べた Lusztig のアルゴリズムに含まれる

不定性とは, このスカラーに他ならない. G およびその簡約部分群に対してこの τ_i が決まれば, G の指標層の特製関数は計算できることになる. これに関して次の定理が成立する.

定理 4.7. 次の場合に定数 τ_i が決定できる.

(i) SL_n : F: split (p は任意),

(ii) SL_n : F: non-split ($p >> 0$),

(iii) $Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n}$ ($p \neq 2$),

(iv) $Spin_N$ ($p >> 0$).

(i) の場合には代表元 u は Jordan 標準形に取れる. (iii) の場合, F が split 型の時は, u は 3 節の Green 関数の議論に出てきた split 元に取れる.

1.5 の Lusztig 予想に関する結果と合わせて、定理の系として次が得られる.

系 4.8. $SL_n(\mathbf{F}_q), SO_{2n+1}(\mathbf{F}_q), SO_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の既約指標は全て計算可能である.

5. 証明の方針など

5.1. 定理 4.5 の (i), (ii) は 2002 年の数理研の集会で報告したものである. その証明の概略は数理研の講義録 [S3] に書いた. 詳しい内容については preprint [S4] があるのでそれも合わせて参照してほしい. (iii), (iv) についても基本的に同様の議論が成立するのである. [S3] で基本的なアイデアについては説明してあるので、興味のある方はそちらを見ていただくことにして、ここでは概略だけを述べる.

$(L, C, \mathcal{E})$ を定理 4.5 の 3 つ組とし, $i = (C', \mathcal{E}') \in \mathcal{I}^F$ とする. $u \in C'^F$ を取り, $\mathcal{E}'$ に対応する $A_G(u)$ の既約指標を ρ とする. $P = LU_P$ を F 不変な放物部分群とし,

$$\mathcal{P}_u = \{gP \in G/P \mid g^{-1}ug \in CU_P\},$$
$$\widehat{\mathcal{P}}_u = \{g \in G \mid g^{-1}ug \in CU_P\}$$

とおく. 次の図式を考える.

$$C \xleftarrow{\alpha} \widehat{\mathcal{P}}_u \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_u$$

ただし $\alpha(g)$ を $g^{-1}ug$ の Levi part, $\beta(g) = gP$ として, 写像 α, β を定義する. C 上の局所系 $\mathcal{E}$ に対して $\alpha^*\mathcal{E} \simeq \beta^*\dot{\mathcal{E}}$ をみたす $\mathcal{P}_u$ 上の局所系 $\dot{\mathcal{E}}$ が唯ひとつ存在する. cohomology 群 $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})$ 上に F と $A_G(u)$ の作用が得られる. ただし $d_u = \dim \mathcal{P}_u$. $\mathcal{W} = N_G(L)/L$

とおくと, さらに $\mathcal{W}$ が $A_G(u)$ と可換になるように $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})$ に作用する. この $\mathcal{W}$ 加群 $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})$ が Green 関数の場合の W 加群 $H^{2d_u}(\mathcal{B}_u, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ に対応している. そこで3節の議論のように定数 τ_i の決定は $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})$ の ρ-isotypic な部分 $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})_\rho$ への F の作用を決定することに帰着する.

5.2. $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})$ への F の作用に関しては次のような戦略を立てる.

(I) $G = SL_n$ (F: split), $Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n}$ の場合.

この場合には, P を含む F 不変な極大放物部分群 $Q = MU_Q$ で M が G と同じタイプの階数 $n-1$ の群になるものが取れ, F の作用と可換になるような同型

$$H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}}) \simeq \bigoplus_{u_1} H_c^{2d_{u_1}}(\mathcal{P}_{u_1}, \dot{\mathcal{E}})$$

を作ることができる. したがって F の作用は帰納的に調べることができる.

(II) $G = SL_n$ (F : non-split), $Spin_N$ の場合.

この場合には (I) の方法がうまく機能しない. SL_n については, F が non-split なので極大放物部分群は F 不変にならないという事情がある. $Spin_N$ については isogeny map $Spin_N \to SO_N$ を考えて, $Spin_N$ の組 $i = (C', \mathcal{E}')$ が SO_N の組から得られる場合には, 対応する τ_i の決定は本質的に SO_N の問題であり (I) で処理できる. そこで $(C', \mathcal{E}')$ が SO_N からは得られない場合が本質的である. この場合 F 不変な極大部分群が存在したとしても, cohomology 群 $H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})$ の構造が複雑になり, (I) のような同型を作ることが難しくなる.

しかし, これらの場合には次が成り立つ.

$$H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}}) = H_c^{2d_u}(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})_\rho,$$
$$H_c^0(\mathcal{P}_u, \dot{\mathcal{E}})_\rho \neq \{0\}.$$

これらの性質は SL_n と $Spin_N$ （の SO_N に帰着できない場合）に特徴的なものである. SL_n の場合と同様にこれらの性質を使って graded affine Hecke 環の理論を適用することにより, F の作用を決めることができる.

5.3. graded affine Hecke 環を用いた議論については [S3] に書いたのでここでは繰り返さない. しかしどのような状況で graded affine Hecke 環が関係するかについて GL_n と SL_n の対比で述べておく（[S3] にも書いてあるが）. $G = GL_n$, F は non-split とする. 埋

め込み $f:\mathcal{B}_u\hookrightarrow\mathcal{B}$ により, 線型写像 $f^*:H^{2i}(\mathcal{B},\bar{\mathbf{Q}}_l)\to H^{2i}(\mathcal{B}_u,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ が得られる. f^* は全射, W,F 同変な写像になることが示される. そこで $H^{2d_u}(\mathcal{B},\bar{\mathbf{Q}}_l)$ への F の作用が決まれば F の $H^{2d_u}(\mathcal{B}_u,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ への作用が分かる. しかし $H^*(\mathcal{B},\bar{\mathbf{Q}}_l)$ は W の余不変式環と同型であり, その構造はよく分かっている. これより Fw_0 (w_0 は W の最長元) が $H^{2d_u}(\mathcal{B}_u,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ に $(-q)^{d_u}$ のスカラー倍で作用することが分かる.

一方, $\mathcal{P}_u$ の状況で $\mathcal{B}_u\hookrightarrow\mathcal{B}$ の役割を果たすのはある u_0 に対する $\mathcal{P}_{u_0}$ である (Borel の場合には u_0 が単位元). しかし $\mathcal{P}_u$ の場合には $\mathcal{P}_u\hookrightarrow\mathcal{P}_{u_0}$ は成立しない. それにも関わらず cohomology のレベルでは $\mathcal{W},F$ 同変な写像

$$f^*:H^i_c(\mathcal{P}_{u_0},\dot{\mathcal{E}})\to H^i_c(\mathcal{P}_u,\dot{\mathcal{E}})$$

を定義することができる. GL_n の場合と違って, $\mathcal{P}_{u_0},\mathcal{P}_u$ の構造を調べるのが困難なことから写像 f^* が全射になるかどうか分からない. ところが次数 0 の部分では容易に

$$f^*:H^0_c(\mathcal{P}_u,\dot{\mathcal{E}})\simeq H^0_c(\mathcal{P}_{u_0},\dot{\mathcal{E}})\simeq\bar{\mathbf{Q}}_l \tag{5.3.1}$$

が確められる. もし F の $H^{2d_u}_c(\mathcal{P}_u,\dot{\mathcal{E}})$ と $H^0_c(\mathcal{P}_u,\dot{\mathcal{E}})$ への F の作用を比較することができれば (5.3.1) を通じて $H^*_c(\mathcal{P}_{u_0},\dot{\mathcal{E}})$ の状況に移ることができる. 実際, このプロセスに利用されるのが graded affine Hecke 環である. Lusztig [L2] により graded affine Hecke 環 の $H^*_c(\mathcal{P}_u,\dot{\mathcal{E}})$ への表現が得られており, これは概略 $\mathcal{W}$ の表現と cohomology 群の cup 積の作用からできている. その意味で都合がよいのである. 詳細については [S3] を参照されたい.

References

[BS] W.M Beynon and N. Spaltenstein, Green functions of finite Chevalley groups of type E_n ($n=6,7,8$), J. Algebra **88** (1984), 584–614.

[L1] G. Lusztig, Character sheaves, I Adv. in Math. **56** (1985), 193–237, II Adv. in Math. **57** (1985), 226–265, III, Adv. in Math. **57** (1985), 266–315, IV, Adv. in Math. **59** (1986), 1–63, V, Adv. in Math. **61** (1986), 103–155.

[L2] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras, I, Publ. Math. I.H.E.S. **67** (1988), 145-202.

[S1] T. Shoji, On the Green polynomials of Chevalley groups of type F_4, Comm. in Alg. **10**, (1982), 505–543.

[S2] T. Shoji, On the Green polynomials of classical groups, Invent. Math. **74**, (1983), 237–267.

[S3] 庄司 俊明, Generalized Green functions, unipotent classes and graded Hecke algebras. 京都大学数理解析研究所講究録 1310, 「組合せ論的表現論とその周辺」, pp.154 – 168.

[S4] T. Shoji, Generalized Green functions and unipotent classes for finite reductive groups, I. Preprint.