

### 跡等式としての五角数定理

京都大学・理学部 梅田 亨 (TÔRU UMEDA)  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY

#### 0: 要約を兼ねた序

五角数定理とは 1741 年 L. Euler によって発見された次の等式である。

$$(P) \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

右辺の  $q$  の肩にいる  $\frac{n(3n-1)}{2}$  という数列, 即ち 1, 5, 12, 22, ... が, 五角数と呼ばれるのに因んで「五角数定理」の名がついている。

Euler はこの五角数定理を発見したが, その証明 (Euler 流に言えば「厳密な」証明) が得られたのは, ようやく 1750 年であって, もちろん Euler 自身による。現在は Jacobi の三重積公式を経由する証明や, Franklin による組合せ的証明もあって, このいずれかが多くの本に見られる。Euler 自身の証明は A. Weil の Number Theory ([W2], 邦訳「数論」日本評論社) には出ているが, それだけを見ていると式変形の巧妙さで目のくらむ思いがする。ここではこの Euler の証明のからくりが実は無限サイズの行列のトレースに関する等式に他ならないことを明らかにして, 五角数定理の (三重積公式とは別の) 拡張も全く同じ機構で得られることを示す。

タイトルにある「跡等式」は「跡公式」や或いは「積公式」の誤植ではない。行列のトレースは共軛で不変であるが, そのような等式をすべて跡公式 (trace formula) と呼ぶ訳にはいかない。五角数定理の背後にあるのは高々跡等式 (trace identity) としか言えないであろう。しかしながら, サイズが無限になった場合の次のような結合法則の“破れ”とも結びいて, なかなか面白いものである。三つの無限行列  $X, Y, Z$  を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots \\ & 1 & 1 & \cdots & \cdots \\ & & 1 & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & \\ & & 1 & -1 & \ddots \\ & & & 1 & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

と置く。このとき  $(XY)Z = Z$  だが  $X(YZ) = 0$  となって素朴な意味での結合法則は成り立っていない。この両辺の差が五角数定理の無限乗積の部分となってでてくるのである。

### 1: Euler の証明とその双対的証明

1750 年の Euler 自身の証明とは次の二つの等式 (1.2)(1.3) を示すことから成り立っている： $m = 1, 2, \dots$  に対して

$$(1.1) \quad P_m = \sum_{n=m}^{\infty} q^{\frac{m(2n+m+1)}{2}} (1 - q^m) \cdots (1 - q^n)$$

と置く。このとき

$$(1.2) \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = 1 - q - P_1,$$

及び

$$(1.3) \quad P_m = q^{\frac{m(3m+1)}{2}} - q^{\frac{(m+1)(3m+2)}{2}} - P_{m+1},$$

が成り立つ。この証明は上記 Weil の本 (邦訳には式に誤植があるので注意) に見られる。三重積公式を経るものとは趣が異なることも判るだろう。さて、今回の「跡等式」としての五角数定理に想が及んだのは、1998 年の春 (丁度、学会の最中であつた)、上の証明と双対的な証明を思いついたことがきっかけである。その「双対的」証明とは

$$(1.1^*) \quad Q_m = \sum_{n=m}^{\infty} (-)^n q^{\frac{n(n+2m-1)}{2}} \frac{1}{(1 - q^m) \cdots (1 - q^n)}$$

と置いてやると、次の二つの等式 (1.2\*)(1.3\*) を示すことができ、それが五角数定理の証明となるのである：

$$(1.2^*) \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = 1 + Q_1,$$

及び

$$(1.3^*) \quad Q_m = (-)^m (q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}) + Q_{m+1}.$$

何故このような双対的な証明が可能なのかという疑問と、Euler 自身の証明の式変形の仕方の分析から話の核ができた。論文は書き始めたが、発展性がありそうだったので、拡張まで含めようとしているうちに、個人的な事情から中断したままになってしまった。今回は、基本的な部分の報告とする。

なお、調べてみると Euler の証明の掘り起こしとして G.E. Andrews [A1] がある (少し手に入れにくい文献であった)。ここでは Euler の証明を、孤立したものではなく、自然なものとして捉えようとしている。本稿はその精神を更に徹底したものといえる。因みに、この双対的な証明が既に知られているものなのかどうかについては、調べがつかなかった。

## 2: 記号の準備

幾つか記号を導入する。次は標準的である： $(a; q)_0 = 1$  として  $n \geq 1$  について

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), \quad (a; q)_{-n} = \prod_{k=1}^n (1 - aq^{-k})^{-1}$$

とおく。前進および後退差分作用素を  $\Delta^+$  と  $\Delta^-$  で表わす：定義は

$$\Delta^+ \varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n, \quad \Delta^- \varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$$

である。どの変数に関する差分かをはっきりさせたいときは  $\Delta_n^+$  のように添え字をつける。これらの差分作用素に対する Leibniz 則は

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta^+(\varphi_n \psi_n) = \Delta^+ \varphi_n \cdot \psi_{n+1} + \varphi_n \cdot \Delta^+ \psi_n, \\ \Delta^-(\varphi_n \psi_n) = \Delta^- \varphi_n \cdot \psi_{n-1} + \varphi_n \cdot \Delta^- \psi_n \end{cases}$$

という形をとる。

## 3: Euler の証明の機構

ここでは Euler の証明の機構を簡単に解説する。基礎体を  $\mathbb{K}$  として、不定元  $q$  に関する形式的冪級数環  $\mathbb{K}[[q]]$  を考える。ここで  $n = 1, 2, \dots$  に対し

$$(3.1) \quad f_n = (q; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^k),$$

および

$$(3.2) \quad g_n = (1; q)_{-n} = \prod_{k=1}^n (1 - q^{-k})^{-1} = (-)^n \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{f_n}$$

と置く. また, 添え字が 0 の場合は  $f_0 = g_0 = 1$  とするのが都合がよい. 環  $\mathbb{K}[[q]]$  の自然な位相に関してこれら  $f_n$  と  $g_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で次の極限をもつ:  $g_\infty = 0$  及び

$$(3.3) \quad f_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k).$$

これらの数列は漸化式 (差分関係式)

$$(3.4) \quad \begin{cases} f_n = (1 - q^n) f_{n-1}, \\ (1 - q^{-n}) g_n = g_{n-1}, \end{cases}$$

を満たすので

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Delta^+ f_n = -q^{n+1} f_n, \\ \Delta^- g_n = q^{-n} g_n, \end{cases}$$

が成り立つ. この (3.4) 式で  $n = 0$  とおくと  $g_{-1} = 0$  となるので, そのように定義しておく.

**Remark:** 最初に述べた式 (1.3) and (1.3\*) は和を「部分差分」し, この (3.5) 式と

$$\Delta_n^\pm (q^{mn}) = \mp (1 - q^{\pm m}) q^{mn}$$

という関係に注意するとでる. これには下に述べる (1.6) が背景にある. また  $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$  というガンマ函数の等式を導くのと類似である点にも注意しておきたい. この類似は単なる観察を越えた本質的な内容を背景に含んでいるかもしれないと最近思い直した.

Euler による五角数定理の証明の鍵は次の等式である:

$$(3.6) \quad \Delta_n^+ (f_n g_m q^{nm}) = -\Delta_m^- (f_n g_m q^{(n+1)(m+1)}).$$

証明自体は Leibniz 則 (2.1) と (3.4) から次のように容易に得られる:

$$\begin{aligned} \Delta_n^+ (f_n g_m q^{nm}) &= \Delta_n^+ (f_n) g_m q^{(n+1)m} + f_n g_m \Delta_n^+ (q^{nm}) \\ &= -q^{n+1} f_n g_m q^{(n+1)m} + f_n g_m q^{(n+1)m} (1 - q^{-m}) \\ &= -f_n g_m q^{(n+1)(m+1)} + f_n g_{m-1} q^{(n+1)m} \\ &= -\Delta_m^- (f_n g_m q^{(n+1)(m+1)}). \end{aligned}$$

## 4: 主定理 (加法的構造)

上記の Euler の証明の枠組みを一般的に定式化し、その構造を敷衍する。応用のためにはできるだけ一般的にしておくのがよいだろうということで、位相アーベル群  $A$  を固定して、その中で考える。前節ではこれが ultrametric topological ring  $\mathbb{K}[[q]]$  であって、その場合は収束の級数の収束の条件はずっと易しく記述できるが、どのような条件を使うかは一般化しておく方が、明快になるだろう。

我々の扱うのは  $A$ -値の二重数列の組  $(\Phi, \Psi)$  である。添え字の範囲をはっきりさせるために

$$\begin{aligned}\Phi &= (\Phi_{n,m}) \quad (n \geq 0, m \geq 0), \\ \Psi &= (\Psi_{n,m}) \quad (n \geq 0, m \geq -1)\end{aligned}$$

としておく。関係式 (3.6) に対応して、この数列の組に対して

$$(C) \quad \Delta_n^+(\Phi_{n,m}) = -\Delta_m^-(\Psi_{n,m}) \quad (n \geq 0, m \geq 0)$$

という関係式を考える。これは組の成分の入れ替えに対しても殆ど同様なもので、次の形になる。それが Euler の証明の双対の根拠である。

$$(C^*) \quad \Delta_m^+(\Psi_{n,m-1}) = -\Delta_n^-(\Phi_{n+1,m}) \quad (n \geq 0, m \geq 0).$$

その様子を正確に書くと、組  $(\Phi, \Psi)$  が条件 (C) を満たすと対応して  $(\Psi^*, {}^*\Phi)$  も (C) を満たすという形になる。ただし

$$(R) \quad \Psi_{n,m}^* = \Psi_{m,n-1}, \quad {}^*\Phi_{n,m} = \Phi_{m+1,n}.$$

条件 (R) 以外にも、明らかな平行移動対称性がある：

$$(T) \quad \Phi_{m,n} \mapsto \Phi_{m,n} + F_m, \quad \Psi_{m,n} \mapsto \Psi_{m,n} + G_n.$$

定理の主張を正確に述べるために、これらの二重数列に対して級数の和、及び極限という無限遠での挙動の条件を考える。次の (I) - (VI) の型の条件が用いられる。

(I) 級数の和が存在する：

$$(S\Phi_n) \quad \alpha_n = \sum_{\mu=0}^{\infty} \Phi_{n,\mu},$$

$$(S\Psi_m) \quad \beta_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_{\nu,m}.$$

(II) 極限が存在する：

$$(L\Phi_m) \quad \Phi_{\infty,m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,m},$$

$$(L\Psi_n) \quad \Psi_{n,\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_{n,m}.$$

(III) 極限級数の和が存在する：

$$(S\Phi_\infty) \quad \alpha_\infty^S = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{\infty,m},$$

$$(S\Psi_\infty) \quad \beta_\infty^S = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{n,\infty}.$$

(VI) 級数の和で定義される数列に極限が存在する：

$$(L\Phi_\infty) \quad \alpha_\infty^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n,$$

$$(L\Psi_\infty) \quad \beta_\infty^L = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m.$$

ここで例えば  $(S\Phi_n)$  が存在すれば

$$\varphi_n = \sum_{\mu=n}^{\infty} \Phi_{n,\mu}.$$

が考えられ、 $(S\Psi_m)$  が存在すれば

$$\psi_m = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_{\nu,m}.$$

が考えられる。さらに  $(L\Psi_n)$  と  $(L\Phi_m)$  の存在を仮定すると、以下の補題の関係式が導けるが、それは Euler の式変形 (1.3) (またはその双対の (1.3\*)) をこの枠組みで書き直したものである。

**補題 4.1:** 二重数列の組  $(\Phi, \Psi)$  が関係式 (C) を満たすとする。また、直前に述べた級数の和、および極限が存在するとする。したがって  $\varphi_n$  と  $\psi_m$  が定義できる。これらについて

$$(1) \quad \Delta^+ \varphi_n = -\Psi_{n,\infty} + \Psi_{n,n} - \Phi_{n,n} \quad (n \geq 0),$$

及び

$$(2) \quad \Delta^- \psi_m = -\Phi_{\infty,m} + \Phi_{m,m} - \Psi_{m-1,m-1} \quad (m \geq 0).$$

という関係がなりたつ。ただし、(2)において  $m = 0$  の場合は  $\Psi_{-1,-1} = 0$  と規約する。

この補題の関係を足し合わせれば、トレースの差が二重級数の極限(境界)で表示されることになる。そのためには、極限の存在を仮定しなくてはならない。また、そのときには極限値の間のいろいろな関係式が導かれる。

**命題 4.2:** 上の補題の仮定のもと、 $\varphi_n$  と  $\psi_m$  について次の (A)(B) が言える。

(A) もし  $(S\Phi_\infty)$  及び  $(S\Psi_\infty)$  が収束すると、極限

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \quad \psi_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m$$

が存在する。そして関係式

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n}) = \alpha_0 - \beta_\infty^S - \varphi_\infty,$$

及び

$$(2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (\Phi_{m,m} - \Psi_{m-1,m-1}) = \alpha_\infty^S - \beta_{-1} + \psi_\infty.$$

が成立する。但し (2) では  $\Psi_{-1,-1} = 0$  と置いた。

(B) 逆に級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n})$$

が収束し、極限  $\Psi_{\infty,\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_{m,m}$  が存在するならば、極限

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \quad \psi_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m$$

が存在し、関係式

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n}) = \alpha_0 - \beta_\infty^S - \varphi_\infty = \alpha_\infty^S - \beta_{-1} + \psi_\infty - \Psi_{\infty,\infty}.$$

が成り立つ。

**命題 4.3:** (1) 補題 4.1 の仮定に加えて、級数  $(S\Psi_\infty)$  が収束し、極限  $(L\Phi_\infty)$  が存在すると仮定する。このとき

$$\alpha_\infty^L - \alpha_0 = \beta_{-1} - \beta_\infty^S$$

が成り立つ.

(2) 補題 4.1 の仮定に加えて, 級数  $(S\Phi_\infty)$  が収束し, 極限  $(L\Psi_\infty)$  が存在すると仮定する. このとき

$$\alpha_\infty^S - \alpha_0 = \beta_{-1} - \beta_\infty^L$$

が成り立つ.

(3) 上の (1) 及び (2) が満たされる時,  $\alpha_\infty^S = \alpha_\infty^L$  と  $\beta_\infty^S = \beta_\infty^L$  は互いに他を導く.

系 4.4: 命題 4.3 の (1)(2) の条件を仮定すると

$$\alpha_\infty^L - \alpha_\infty^S = \beta_\infty^L - \beta_\infty^S = \varphi_\infty + \psi_\infty - \Psi_{\infty,\infty}$$

が成り立つ.

この系に現われた極限の差が消える時, つまり  $\varphi_\infty + \psi_\infty - \Psi_{\infty,\infty} = 0$  が成立するとき typical だと言うことにする. すると

$$\alpha_\infty = \alpha_\infty^L = \alpha_\infty^S, \quad \beta_\infty = \beta_\infty^L = \beta_\infty^S.$$

と置ける. さらに typical の条件の各項がすべて消えてしまう, つまり

$$\varphi_\infty = 0, \quad \psi_\infty = 0, \quad \Psi_{\infty,\infty} = 0$$

のとき most typical と言うことにする. 五角数定理に関係した具体的な例では, 実際満たされるものである.

以上をまとめて, 次の形の跡等式が得られる. これが五角数定理の抽象化である.

**定理 (跡等式):** 二重数列の組  $(\Phi, \Psi)$  が関係式 (C) を満たすとする. またこれらが条件 (I) - (VI) のすべてを満たすとする. つまり, 級数  $(S\Phi_n), (S\Psi_m)$  が  $n \geq 0, m \geq -1$  に対して収束し, 極限  $(L\Phi_m), (L\Psi_n)$  が  $n, m \geq 0$  に対し存在し, 級数  $(S\Phi_\infty), (S\Psi_\infty)$  が収束し, 極限  $(L\Phi_\infty), (L\Psi_\infty)$  が存在する, とする. このとき次の等式が成り立つ.

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n}) = \alpha_\infty^L - \beta_{-1} - \varphi_\infty = \alpha_\infty^S - \beta_{-1} + \psi_\infty - \Psi_{\infty,\infty}.$$

特に most typical な場合には

$$(2) \quad \alpha_\infty - \beta_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n})$$



が成り立つ。更にすべての  $n$  に対して  $\Psi_{n,-1} = 0$  が成り立つならば

$$(3) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \Phi_{\infty,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n})$$

が成立する。

**Remark:** 上では一般的な枠組みを設定したので、級数や極限の条件がいろいろ仮定されてやや煩わしかった。しかし、位相アーベル群  $A$  が、形式的冪級数環  $\mathbb{K}[[q]]$  のような ultrametric な性質をもてば、収束の条件はもっと簡単になる。実際、そのような場合は級数が収束することと、極限が 0 になることがおなじだから条件  $(S\Phi_m), (S\Psi_m), (S\Phi_{\infty}), (S\Psi_{\infty})$  は単に

$$(U1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{n,m} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{n,m} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{\infty,m} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{n,\infty} = 0,$$

となるし、もし

$$(U2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,n} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{m,m} = 0,$$

ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{n,n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{m,m}$$

も存在する。したがって極限  $\varphi_{\infty}, \psi_{\infty}$  も存在する。

### 5: 五角数定理を含む例

上の跡等式を  $\Phi_{n,m} = f_n g_m q^{nm}$  と  $\Psi_{n,m} = f_n g_m q^{(n+1)(m+1)}$  に対して適用する。これらが差分関係式 (C) を満たすことは (3.6) で見た。また  $\Psi_{n,-1} = 0$  は  $g_{-1} = 0$  という規約から従うが、同時に差分関係式とも両立している。極限については  $\Psi_{n,\infty} = 0$  及び

$$\Phi_{\infty,\mu} = \begin{cases} f_{\infty} & (\mu = 0), \\ 0 & (\mu > 0), \end{cases}$$

が成り立つことは見易い。定義式 (3.1) と (3.2) とから  $f_n g_n = (-)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}$  が判り、上記定理の (3) の式から

$$f_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} (q^{n^2} - q^{(n+1)^2})$$

が得られる。これは五角数定理に他ならない。上で述べた補題や命題に現われる級数 (或いは少しの変形) が Euler の証明と対応していることも確かめられる。

上の五角数定理を拡張する形で、2つのパラメータ  $x, y$  を入れたものが見つかる。一旦見つかれば、証明は (3.6) と同様である。

**補題 5.1:** 次のように  $\Phi_{n,m}$  と  $\Psi_{n,m}$  とを定める:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \Phi_{n,m} = (x; q)_n (y^{-1}; q)_{-m} x^m y^n q^{(n-1)m}, \\ \Psi_{n,m} = (x; q)_n (y^{-1}; q)_{-m} x^{m+1} y^{n+1} q^{n(m+1)}. \end{cases}$$

但し  $x$  と  $y$  は不定元で、

$$(x; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - xq^k),$$

$$(y^{-1}; q)_{-m} = \prod_{k=1}^m (1 - y^{-1}q^{-k})^{-1} = (-)^m \frac{y^m q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(yq; q)_m}$$

である。このとき関係式  $\Delta_n^+(\Phi_{n,m}) = -\Delta_m^-(\Psi_{n,m})$  が成り立つ。

この組に跡等式を適用するときは、3変数形式的冪級数環  $\mathbb{K}[[x, y, q]]$  に於いて考える。その自然な位相で  $x^n$  と  $y^n$  とは  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。従って  $\Phi_{\infty, \mu} = 0$  及び  $\Psi_{\nu, \infty} = 0$  である。五角数定理と同様に定理の (3) を適用しようとするとも何も残らなく見えるが、実は  $\Psi_{n,-1}$  が生き残っているので定理の (2) を用いなくてはならない。この場合

$$\Psi_{n,-1} = (x; q)_n (y-1)y^n$$

であるから

$$(5.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (x; q)_m y^m (1-y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(x; q)_n}{(yq; q)_n} x^n y^{2n} q^{\frac{n(3n-1)}{2}} (1 - xyq^{2n})$$

が得られる。これは [F] の (13.3) という式である。ここで、さらに  $y=1$  と特殊化したものを考えても、差分関係式は当然満たされる。このときは  $y^n \rightarrow 0$  ではないから事情が変わり、むしろ五角数定理と同様な境界値が残る。まず  $\Psi_{n,-1} = 0$  であり

$$\Phi_{\infty, \mu} = \begin{cases} (x; q)_{\infty} & (\mu = 0), \\ 0 & (\mu > 0). \end{cases}$$

なので、定理の (3) を用いると

$$(5.3) \quad (x; q)_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(x; q)_n}{(q; q)_n} x^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} (1 - xq^{2n})$$

が得られる。これは Sylvester Identity [Sy, p. 91] と呼ばれる五角数定理の1パラメータ入り拡張である。(この等式については [F] の (13.4) 及び [A3, (9.2.3)] も参照されたい。) これについては  $x, y, q$  を形式変数でなく、複素数としても考えられる。その場合、 $|q| < 1$  と  $|y| \leq 1$  という範囲で意味があるが、(5.3) は (5.2) から  $y \rightarrow 1$  という極限移行で得られる。単純に  $y \rightarrow 1$  とすると左辺が消えるように見えるので注意しないとイケないが、微積分でてくる「Abelの連続性定理」と同様の扱いで極限が  $(x; q)_\infty$  となることが判る。このように極限移行は形式的でも、複素数の範囲でもどちらでも可能である点や、それが定理の境界の現れ方に反映する点なども興味深い。また別の  $x = yq$  という特殊化は [A1, (8)] という式になっている。

### 6: 跡等式の直観的説明

ここでは上で得られた跡等式が「無限サイズの行列のトレースの関係式」であることの直観的な説明を与えよう。以下  $A$  は位相環とする。

まず素朴に考えて二重数列  $\Phi_{n,m}$  から  $A$ -線型な写像  $\Phi$  を

$$(6.1) \quad \Phi v_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{n,m} v_m$$

によって定義する。但し作用するのは、適当な条件を満たす数列  $v_n$  の空間である。上にできた差分関係式 (C) は線型写像に言い換えると

$$(D) \quad \Delta^+ \Phi = \Psi \Delta^+$$

となることが判る。つまり、差分作用素  $\Delta^+$  は二つの  $\Phi, \Psi$  を intertwine している。既にみた (C) から (C\*) に移る対称性 (R) もこれからすぐに判り、Euler の証明と双対的な証明は作用素の転置をとることで実際得られることも理解ができる。

さて、もし差分作用素  $\Delta$  が可逆ならば、関係式 (D) で結ばれた二つの作用素は共軛となり、したがってそのトレースは等しい。しかし実際は差分作用素は可逆でない。しかし、その核は1次元だけであり、また「和をとる」作用素という右逆がある。したがって、この状況は共軛という関係に相当近いものであることが期待される。そして上で述べた定理は二つの作用素のトレースの差が  $\Phi$  と  $\Psi$  の境界の値で記述できることを示しているのである。

この考えを厳密に遂行するためには、作用素の定義域についてきちんと考察しないとイケない。素朴にやりすぎると序で述べた結合律の破れに対応することがすぐにでてくるのである。そこにでてきた  $X$  は「和分」作用素であり、差分作用素  $Y$  の右逆であるが、行列表示

では核の部分が見えず、恰も本当の逆であるかのように振る舞う。その破綻は「定数」数列に作用させたとき出現するが、それが  $Z$  を右から掛けることに対応する (1 列だけとっても同じことである)。これが五角数定理と結合律の破れの関係である。

以上のような注意を踏まえて、次のような 2 種類の数列空間を考えよう：

$$E_L = \{ u = (u_n)_{n=0}^{\infty}; \exists \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \}, \quad E_S = \{ v = (v_n)_{n=0}^{\infty}; \exists \sum_{n=0}^{\infty} v_n \}.$$

差分作用素  $\Delta^+$  は  $E_L$  で定義されて値を  $E_S$  にとる。さて  $\Phi$  及び  $\Psi$  を (6.1) のように二重数列から定義される線型作用素とする。ここで  $\Phi$  は  $E_L$  上の線型変換で、 $\Psi$  は  $E_L$  上の線型変換としよう。この仮定の下、関係式 (D) はきちんと意味をもつ。これは図式

$$\begin{array}{ccc} E_L & \xrightarrow{\Phi} & E_L \\ \Delta^+ \downarrow & & \downarrow \Delta^+ \\ E_S & \xrightarrow{\Psi} & E_S \end{array}$$

が可換であることを意味するが、それから  $\Phi$  は  $\Delta^+$  の核を保つことが判る。そこで核で割った可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_L / \text{Ker}(\Delta^+) & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & E_L / \text{Ker}(\Delta^+) \\ \Delta^+ \downarrow & & \downarrow \Delta^+ \\ E_S & \xrightarrow{\Psi} & E_S \end{array}$$

が得られるが、誘導された  $\bar{\Delta}^+$  作用素は  $E_L / \text{Ker}(\Delta^+)$  と  $E_S$  という二つの空間の間の同型を与える。従って  $\bar{\Phi}$  と  $\Psi$  のトレースは (存在すれば) 等しい。更に  $\bar{\Phi}$  のトレースは

$$\text{Tr}(\bar{\Phi}) = \text{Tr}(\Phi) - \text{Tr}(\Phi|_{\text{Ker}(\Delta^+)})$$

として与えられる。問題はこのトレースで、これを計算しよう。まず  $e^{(r)}$  を数列

$$e_n^{(r)} = \begin{cases} 1 & (n=r), \\ 0 & (n \neq r) \end{cases}$$

とする。2つの空間  $E_L$  及び  $E_S$  の「位相的」基底として  $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(r)}, \dots$  をとる。すると  $\Phi$  と  $\Psi$  のトレースは普通のように

$$\text{Tr}(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{n,n}, \quad \text{Tr}(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{n,n}$$

となる。また核  $\text{Ker}(\Delta^+)$  は 1 次元で定数数列  $e^{(\infty)} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{(r)}$  から張られる。したがって  
トレース  $\text{Tr}(\Phi|_{\text{Ker}(\Delta^+)})$  は

$$\langle e^{(\infty)*}, \Phi e^{(\infty)} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{n,m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha_{\infty}$$

と計算される。ここで  $e^{(\infty)*}$  は  $e^{(\infty)}$  に対する双対基底である。したがって

$$\text{Tr}(\Phi) - \text{Tr}(\Phi|_{\text{Ker}(\Delta^+)}) = \text{Tr}(\bar{\Phi}) = \text{Tr}(\Psi)$$

から

$$(6.2) \quad \alpha_{\infty} = \text{Tr}(\Phi) - \text{Tr}(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{n,n} - \Psi_{n,n})$$

が得られるが、これは定理の (3) である。

以上の議論は、厳密には完全でない部分を残す。したがって幾つかの疑問点が生じてくる。たとえば差分作用素の核を保つということから  $\alpha_n = \Phi e_n^{(\infty)}$  は「定数」数列でなくてはならないが、見かけ上それは明らかではない。にもかかわらず、実際成り立っている五角数定理などでは、 $q$ -二項定理を用いるとそれが定数であることも確かめられる。一般には

$$\Delta^+ \alpha_n = -\Psi_{n,\infty} + \Psi_{n,-1}.$$

となるのだが、右辺の 2 項が消えるかどうかは明らかとも言えない (五角数定理の時は消える)。このうち特に  $\Psi_{n,-1}$  が消えるかどうかは、一種の便宜上の問題ともいえるが、差分関係式や、添え字の走る範囲についてもう少し丁寧に見るべきところではあった。もう一方の  $\Psi_{n,\infty}$  が消える点については、作用素  $\Phi, \Psi$  が空間  $E_L, E_S$  を保つことに注意しなくてはならない。いずれにせよ、すべてがうまくいく場合はトレースの差としての解釈は、ぴったり五角数定理を直観的に説明している。

**Remark:** もし位相環  $A$  が複素数体  $\mathbb{C}$  の場合、作用素の定義域に関して、つぎのような古典的な総和法の定理 (小島-Schur の定理: [K], [Sch]; 『級数概論』 (岡田良知, 岩波全書), また『数学辞典』の「総和法」の項) が知られている。

定理: 無限行列  $\Phi = (\Phi_{n,m})$  が空間  $E_L$  上の線型作用素を与えるための必要充分条件は

(1) すべての  $m$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,m}$$

が存在し,

(2) 級数

$$t_n = \sum_{m=0}^{\infty} |\Phi_{n,m}|$$

が収束し, 数列  $t_n$  は有界で,

(3) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{n,m}$$

が存在する,

ということである.

形式的計算ばかりでなく, このような定理とも関係するところは面白い. 因みに, 上の定理の小島鉄蔵については『数学のたのしみ』2006年冬の「東北帝国大学における数学研究」(上野健爾)に言及がある.

## 7: さらなる問題

話は本当はまだ続く. 例えば(1)差分関係式をみたす具体的な行列の組をどうやって見つけるか; (2)作用素としての解釈の徹底と議論の厳密化. この二つは無関係ではない. 実際差分関係式は「乗法的」に閉じているので, 既知のものから新たなものが作れるのである. しかし, そのためには「合成」についてきちんと議論しなくては行けないし, 添え字が  $-1$  のところの処理も必要である. 差分関係式 (C) はゆるやかな条件であるから, それを満たすものはいくらでも作れるが, 「跡等式」にうまく当て嵌められる「きれいな形」の解を見つけることは, そう容易ではない. 或る種の限定の下では generic なものも作れるが, それは別の機会に譲ることにする.

## REFERENCES

- [A1] G.E. Andrews, *Euler's pentagonal number theorem*, Math. Mag. **56** (1983), 279–284.
- [A2] ———, *q-series: Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra, conference board of the mathematical sciences, regional conference series in mathematics 66* (Amer. Math. Soc.), 1986.
- [A3] ———, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its applications **2** (Addison-Wesley Publ. Co.), 1976.
- [Eu] L. Euler, *Opera Omnia*.
- [F] N.J. Fine, *Basic Hypergeometric Series and Applications*, Mathematical Surveys and Monographs **27** (Amer. Math. Soc.), 1988.

- [K] T. Kojima, *On generalized Toeplitz's theorem on limit and their applications*, Tôhoku Math. J. **12** (1917), 291–326.
- [Sch] J. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. Reine Angew. Math. **151** (1921), 79–111.
- [Sy] Sylvester, *The Collected Papers*, vol. 4, Cambridge Univ. Press, 1912.
- [W1] A. Weil, *Two lectures on number theory, past and present*, L'Enseignement Mathématique **20** (1974), 87–110; Œuvre Scientifique vol. 3.
- [W2] ———, *Number Theory: an aproach from history; From Hammurapi to Legerndre*, Birkhäuser, 1984.