

# 可積分オートマトンと Kerov-Kirillov-Reshetikhin 全単射

防衛大応物 高木太一郎 (Taichiro Takagi)

Department of Applied Physics, National Defense Academy

## 1 はじめに

箱玉系と呼ばれる 1 次元可積分セル・オートマトン [T, TM, TNS] の数学的構造については、それが非自励離散 KP 方程式、あるいは離散戸田方程式の超離散極限であるという理解に加えて、クリスタル (結晶基底) による組合せ論的な理解が進んでいる [FOY, HHIKTT]。リー環  $sl_{n+1}$  のクリスタルの場合、このオートマトンには  $n$  種類の玉の色に相当する内部自由度があるが、それは時間発展のダイナミクスから分離できる [Tg1]。本稿の目的はこの内部自由度の分離を、Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) 全単射と呼ばれる組合せ論的な写像の観点から再導出する (定理 5) ことである。

その際に鍵となるのは、KKR 全単射を一般化した Kirillov-Schilling-Shimozono の全単射 [KSS] であるので、われわれの問題に即した形でその紹介を行う。これらの全単射は一般にその要素が長方形のヤングタブロで表される Kirillov-Reshetikhin 加群のクリスタルのテンソル積からつくられるパスを、rigged configuration (ヤング図の各行に数字を添えたもの幾つかからなる組) に対応させる。特に、クリスタルの同型写像である '組合せ R' の作用のもとで rigged configuration が変化しないという事実 (命題 7) が証明に本質的な役割を果たす。一方でこの事実から次のことが分かる。

箱玉系を力学系として見るならば、その初期値問題が考察の対象となる。内部自由度の分離は、もともとこのような背景から筆者が行った研究であった。ところが系の状態を KKR 全単射で rigged configuration に変換すると、そこでは時間発展が線形化されている (命題 9) ので、初期値問題はこれを利用すれば解けてしまう。時間発展の線形化は、上に述べた命題 7 と、時間発展が組合せ R で与えられるという事実 [FOY, HHIKTT] からの帰結である。

従って、内部自由度の分離は力学系の問題を解くという意味では必ずしも必要のない手続きとなった。しかしそれは、未だ謎の多い KKR 全単射という対象を、表現論的に理解するという目的において役割を果たしているように思われる。

本稿の内容の一部は国場敦夫、尾角正人、坂本玲峰、山田泰彦の各氏との共同研究にもとづいています。これらの方々、および議論をしていただいた Mark Shimozono 氏に感謝します。

## 2 組合せR

この節および次節の説明および例は投稿中のレクチャーノート [Tg2] と部分的に重複する。文献 [KKM] におけるクリスタル (結晶) を考える。リー環  $sl_{n+1}$  に対するクリスタル  $B_l$  ( $l$  は正整数) は集合としては以下のものである

$$B_l = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = l \right\}. \quad (1)$$

集合  $B_l$  の元  $b = (x_1, \dots, x_{n+1})$  は長さ  $l$  の一行からなるヤングタブロで文字  $i$  を  $x_i$  個含むものと同一視される。写像  $R: B_l \otimes B_1 \xrightarrow{\sim} B_1 \otimes B_l$  を組合せR (クリスタルの同型 [NY]) とする。タブロを使った記法では

$$R: \boxed{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \otimes \boxed{\beta} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \boxed{\alpha_l} \otimes \boxed{\beta \alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} & \text{if } \beta \leq \alpha_1, \\ \boxed{\alpha_p} \otimes \boxed{\dots \alpha_{p-1} \beta \alpha_{p+1} \dots} & \text{if } \beta > \alpha_1, \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $p$  は条件  $\alpha_p < \beta \leq \alpha_{p+1}$  により決まる。

つぎに  $B_1$  を2階反対称テンソル表現のクリスタルとする。集合としては

$$B_1 = \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\beta} \end{array} \mid 1 \leq \alpha < \beta \leq n+1 \right\},$$

である。写像  $R: B_1 \otimes B_1 \xrightarrow{\sim} B_1 \otimes B_1$  を組合せRとする。それは以下のように与えられる

$$R: \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\beta} \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{\gamma} \\ \boxed{\beta} \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \otimes \boxed{\gamma} \\ \boxed{\beta} \end{array} & \text{if } \gamma \leq \alpha, \\ \begin{array}{c} \boxed{\beta} \otimes \boxed{\alpha} \\ \boxed{\gamma} \end{array} & \text{if } \alpha < \gamma \leq \beta, \\ \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \otimes \boxed{\beta} \\ \boxed{\gamma} \end{array} & \text{if } \beta < \gamma. \end{cases}$$

この写像Rを運搬車に対する玉の積み込み・積み下ろし操作として記述しておく。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \boxed{\gamma} \\ \alpha \downarrow \uparrow \beta \\ \beta \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{\gamma} \\ \alpha \downarrow \uparrow \alpha \\ \beta \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{\gamma} \\ \alpha \downarrow \uparrow \beta \\ \beta \end{array} \\ (\gamma \leq \alpha) & (\alpha < \gamma \leq \beta) & (\beta < \gamma) \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \boxed{\phantom{\gamma}} \\ \beta \downarrow \uparrow \beta \\ \phantom{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{\phantom{\gamma}} \\ \alpha \downarrow \uparrow \beta \\ \phantom{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{\gamma} \\ \beta \downarrow \uparrow \gamma \\ \beta \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{\gamma} \\ \beta \downarrow \uparrow \beta \\ \gamma \end{array} \\ & & (\gamma \leq \beta) & (\beta < \gamma) \end{array} \quad (4)$$

ここでは  $\alpha, \beta, \gamma > 1$  を仮定している。また空白は文字 1 を表す。

### 3 セル・オートマトン

#### 3.1 時間発展

$B_l$  を前節で導入した  $sl_{n+1}$  クリスタルとし、セル・オートマトンの状態を表すパスの集合を次のように定義する

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{p} = p_1 \otimes p_2 \otimes \cdots \in B_1^{\otimes \infty} \mid p_i = \boxed{1} \text{ for } i \gg 1 \right\}. \tag{5}$$

$B_1^{\otimes \infty}$  の  $\infty$  は実質的には十分大きな有限の大きさの整数と見てよい。パス  $\mathbf{p} = p_1 \otimes p_2 \otimes \cdots$  が与えられたとき、任意の正整数  $k, L$  に対して  $p_1, \dots, p_L$  に含まれる文字  $k$  の数が文字  $k+1$  の数を下回らないならば、それを最高ウェイトパスと呼び、それらすべてからなる  $\mathcal{P}$  の部分集合を  $\mathcal{P}_+$  で表す。

集合  $\mathcal{P}$  の上の演算子  $T_l (l \geq 1)$  をクリスタル  $B_l$  の最高ウェイト元  $u_l = (l, 0, \dots, 0)$  を用いて定義する。勝手な  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  に対して  $T_l(\mathbf{p}) \in \mathcal{P}$  を  $sl_{n+1}$  クリスタルの同型 (2) を使って次のように定める

$$u_l \otimes \mathbf{p} \xrightarrow{\sim} T_l(\mathbf{p}) \otimes u_l. \tag{6}$$

ここでは同型 (2) を繰り返し使い  $B_l \otimes \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} B_1 \otimes B_l \otimes \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} B_1^{\otimes 2} \otimes B_l \otimes \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} \mathcal{P} \otimes B_l$  というやり方で最高ウェイト元  $u_l$  を左から右へ移動させた。定義 (5) において課された境界条件のため右辺のテンソル積の右側に現れるものが常に最高ウェイト元  $u_l$  となることが保証される。

演算子  $T_l$  は箱玉系と呼ばれる  $sl_{n+1}$  オートマトンの時間発展を与える [T, TNS, TM, FOY]。ヤン・バクスター関係式のためそれらは可換であり、勝手な  $l$  と  $l'$  に対して  $T_l T_{l'} = T_{l'} T_l$  を満たす。もし  $l = \infty$  ならば  $T_\infty$  を単に  $T$  と書く。箱玉系の言葉では、1つのパスは容量1の無限個の箱を1列に並べたもので、 $\boxed{1}$  は空箱を表し、 $\boxed{\alpha} (\alpha \geq 2)$  はラベル  $\alpha$  を持つ玉の入った箱を表す。時間発展の例を一つ挙げる。

例 1.

t=0	554422.....632.....5.....
t=1	.....554422.632..5.....
t=2	.....552.6445322.....
t=3	.....552.4...654322.....

ここでは  $t=0$  におけるパス  $\mathbf{p}$  が1行目に与えられたものであるとして、それに対するパス  $T(\mathbf{p}), T^2(\mathbf{p}), T^3(\mathbf{p})$  を下に続けて並べて書いてある。なお、ドット (.) は文字 1を表す。

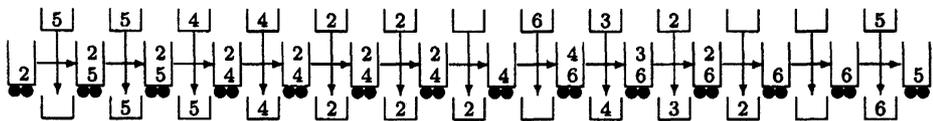
### 3.2 色自由度の分離

クリスタル  $B_q$  の最高ウェイト元  $u_q$  を用い、組合せ  $R$  を繰り返し使ってパス  $p$  に対する時間発展  $T_q$  を次のように定義する

$$u_q \otimes p \xrightarrow{\sim} T_q(p) \otimes \frac{1}{x} \tag{7}$$

組合せ  $R$  の運搬車による記述 (3)-(4) によると、 $x = x(p)$  は運搬車によって持ち去られる玉のラベルである。演算子  $T_q$  を一つの状態に繰り返し作用させ、何が起こるかを観察してみる。

例 2.  $T_q$  を例 1 の  $t = 1$  の状態に作用させる。運搬車の記述を用いると、次のように成る



同じ操作を繰り返し行くと次のようなデータが得られる。

s=0	.....554422.632..5.....	5
s=1	.....554222.432.6.....	6
s=2	.....552222443..2.....	2
s=3	.....522225442.3.....	3
s=4	.....2222554224.....	4
s=5	.....2222.552242.....	4
s=6	.....2222..522522.....	5
s=7	.....2222...225222.....	5
s=8	.....2222...22.2222.....	

ここで  $s$  は演算子  $T_q$  を作用させた回数を表す。各行の右端に書いた数字は運搬車によってその行（に対応するオートマトン状態）から持ち去られる文字（玉のラベル）である。

この例で最後の行（ $s = 8$ ）に現れた状態は玉の種類が1種類の箱玉系の状態であり、これ以上  $T_q$  を作用させても変化しない。最初の行の状態を  $p$ 、最後の行の状態を  $\bar{p}$  で表そう。また、持ち去られる文字を下から上に並べたものを  $y$  で表す。つまりこの例では  $y = 55443265$  である。以上をシンボリックに  $p = \bar{p} \oplus y$  と書く。

例 3. 同じ手続きを例 1 における  $t = 2$  の状態に対して行うと以下のようになる。

s=0	.....552.6445322.....	5
s=1	.....522.5464322.....	6
s=2	.....22255.44322.....	2
s=3	.....222.5254432.....	3
s=4	.....222..2554422.....	4
s=5	.....222..2.554222.....	4
s=6	.....222..2..552222.....	5
s=7	.....222..2...522222.....	5
s=8	.....222..2....222222.....	

さらに  $t=3$  の状態に対して行うと以下のようになる。

s=0	.....552.4...654322.....	5
s=1	.....5225....644322.....	6
s=2	.....2252....544322.....	2
s=3	.....22.22...554432.....	3
s=4	.....22.22....554422.....	4
s=5	.....22.22.....554222.....	4
s=6	.....22.22.....552222.....	5
s=7	.....22.22.....522222.....	5
s=8	.....22.22.....222222.....	

この例から推測されることは、語  $y$  は不変であり、パス  $\bar{p}$  は演算子  $T$  によって‘玉の種類が1種類の箱玉系’として時間発展する、ということである。

この性質は一般に成り立つ [Tg1]。

命題 4.

1.  $sl_{n+1}$  セル・オートマトンの勝手な状態  $p \in \mathcal{P}$  は、 $T_i$  を有限回作用させることにより  $p = \bar{p} \oplus y$  という形に分解できる。ここで  $\bar{p} \in \mathcal{P}$  は文字 1 と 2 のみからなるパスであり  $y$  は文字  $2, \dots, n+1$  からなる語である。
2. 演算子  $T_i$  を作用させることによりそれは次のように時間発展する

$$T_i(p) = T_i(\bar{p}) \oplus y. \quad (8)$$

後の節で用いるため、記号を用意しておく。語  $y$  を成す各数字から 1 を減じ、後に 1 を無限個補ったものは  $sl_n$  オートマトンの状態と見なせる。これを  $\bar{p}$  で表す。例えば、 $y = 55443265$  に対しては、 $\bar{p} = 44332154111 \dots$  のようになる。

上の命題が主張していることは、勝手な  $sl_{n+1}$  基本パス  $p$  に対して  $sl_2$  基本パス  $\bar{p}$  と  $sl_n$  基本パス  $y$  が定まり、 $p$  におけるオートマトンの時間発展は  $\bar{p}$  の時間発展が全てを担い、 $\bar{p}$  は不変に保たれるということである。

### 4 Rigged Configuration

この節の説明および例は共著論文 [KOSTY] と部分的に重複する。次のような形のデータを考える；

$$(\mu^{(0)}, (\mu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})), \tag{9}$$

ここで  $\mu^{(a)} = (\mu_1^{(a)}, \dots, \mu_{l_a}^{(a)})$  は分割であり、また  $J^{(a)} = (J_1^{(a)}, \dots, J_{l_a}^{(a)}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{l_a}$  である。また次のようにおく；

$$E_j^{(a)} = \sum_{i=1}^{l_a} \min(j, \mu_i^{(a)}). \tag{10}$$

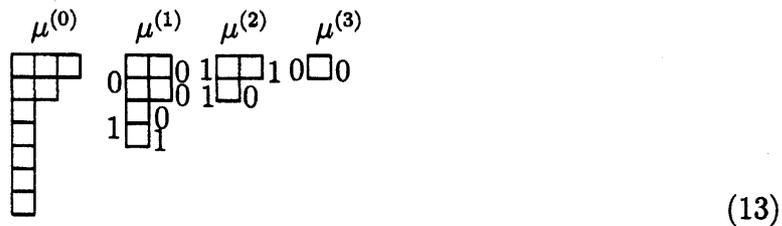
これを用いて vacancy numbers を

$$p_j^{(a)} = E_j^{(a-1)} - 2E_j^{(a)} + E_j^{(a+1)} \quad (1 \leq a \leq n), \tag{11}$$

と定義する。ここで  $E_j^{(n+1)} = 0$  である。データ (9) は、以下の条件が満たされるとき rigged configuration と呼ばれる。条件：すべての  $1 \leq a \leq n$  および  $j \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して：

$$0 \leq J_i^{(a)} \leq J_{i+1}^{(a)} \leq \dots \leq J_l^{(a)} \leq p_j^{(a)} \text{ if } \{i, i+1, \dots, l\} = \{k \mid \mu_k^{(a)} = j\}. \tag{12}$$

分割を並べたもの  $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(n)}$  を configuration と呼び、非負整数たち  $J_i^{(a)}$  を rigging と呼ぶ。分割  $\mu^{(a)}$  をヤング図で表すならば、vacancy number  $p_j^{(a)}$  は幅  $j$  の‘崖’に割り当てられる。その崖の高さを  $m_j^{(a)}$  とすると、 $J^{(a)}$  はサイズが  $m_j^{(a)} \times p_j^{(a)}$  の箱に収まるような分割と見なせる。例をひとつ挙げる。



ヤング図の左に書いてあるのが vacancy number で、各々の行の右に書いてあるのが rigging である。分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  に対し、 $\mu^{(0)} = \lambda$  となるような rigged configurations (9) の集合を  $RC(\lambda)$  で表す。また分割  $\lambda$  に対する最高ウェイトパスの集合を

$$\mathcal{P}_+(\lambda) = \{p \in B_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes B_{\lambda_k} \mid \tilde{e}_i p = 0, 1 \leq i \leq n\}, \tag{14}$$

とする。ここで  $\tilde{e}_i$  はクリスタルの柏原作用素でありその説明は省略するが、 $\lambda = (1^\infty)$  とすれば  $\mathcal{P}_+(\lambda)$  は (5) の直後で定義した  $\mathcal{P}_+$  に等しい。集合  $RC(\lambda)$  と Littlewood-Richardson タブロの間の全単射 [KKR, KR] を、集合  $RC(\lambda)$  と集合  $\mathcal{P}_+(\lambda)$  の間の全

単射に翻訳することが可能であり、その結果できる写像を **KKR 全単射** と呼ぶことにする [KOSTY, KOTY]。例えば、KKR 全単射は rigged configuration (13) をつぎのような最高ウェイトパスに写す

$$\boxed{111} \otimes \boxed{22} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3}. \tag{15}$$

なお、本稿に限って  $RC(\lambda)$  から  $\mathcal{P}_+(\lambda)$  への写像を **KKR 写像** と呼び、その逆を **KKR 写像の逆** と呼ぶ。KKR 写像を与える組合せ論的な操作については、次節で長方形のクリスタルに一般化した状況でその定義 [KSS, Schi] を例を挙げて説明する。

以下では  $\lambda = (1^\infty)$  とする。データ (9) の中で確定している  $\mu^{(0)} = (1^\infty)$  は表記上省略する。上でも述べたようにこの場合の  $\mathcal{P}_+(\lambda)$  は前節の  $\mathcal{P}_+$  に等しい。オートマトンを考えるときは、この  $\mathcal{P}_+$  は  $\mathcal{P}$  に拡張しておきたい。KKR 写像の逆を与える具体的な操作を、最高ウェイト条件を満たさないパスにも形式的に適用することができる。これによって定義される写像を  $\Psi$  で表すことにしよう。像  $\Psi(\mathcal{P})$  には vacancy number や rigging が非負に限定されない一般化された rigged configuration が含まれる。

以上の準備の下で、本稿の中心となる結果を述べる。分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  に対し、 $T_\lambda = T_{\lambda_1} \circ \dots \circ T_{\lambda_k}$  とする。以下の定理は、共著論文 [KOSTY] の Theorem 2.7 の定式化を若干変えたものである。

**定理 5.** 与えられた  $sl_{n+1}$  パス  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  に対し、対応する rigged configuration を

$$\Psi(\mathbf{p}) = ((\mu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})),$$

とする。このとき  $\bar{\mathbf{p}} := T_{\mathfrak{h}}^M(\mathbf{p})$  が  $sl_2$  パスに成るような整数  $M$  が存在し、次が成り立つ

$$\Psi(\bar{\mathbf{p}}) = ((\mu^{(1)}, J^{(1)})), \tag{16}$$

$$\Psi(\mathbf{p}^\dagger) = ((\mu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})). \tag{17}$$

ここで  $\mathbf{p}^\dagger = (T_1^{-1})^M \circ T_{\mu^{(1)}}(\bar{\mathbf{p}})$  であり、 $\bar{\mathbf{p}}$  は命題 4 の直後で定義した  $sl_n$  パスである。

**例 6.** パスを  $\mathbf{p} = 1111223214322111 \dots$  とする。  $\Psi(\mathbf{p})$  は次のような rigged configuration になる。

$$\begin{array}{ccc} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(3)} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 0 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{18}$$

このパスに対して、 $T_{\mathfrak{h}}^3(\mathbf{p}) = 1111221221112222111 \dots$  となることが、直接確かめられる。これを  $\bar{\mathbf{p}}$  とすると、 $\Psi(\bar{\mathbf{p}})$  は (18) の一番左のもの、すなわち  $\Psi(\bar{\mathbf{p}}) = ((\mu^{(1)} = (1, 3, 4), J^{(1)} = (4, 1, 0)))$  である。一方このとき  $y = 334$ 、すなわち  $\bar{\mathbf{p}} = 223111 \dots$  となる。よって  $T_{\mu^{(1)}}(\bar{\mathbf{p}}) = T_1 \circ T_3 \circ T_4(\bar{\mathbf{p}}) = 11112132111 \dots$ 、さらに  $\mathbf{p}^\dagger = 12132111 \dots$  となる。このとき  $\Psi(\mathbf{p}^\dagger)$  は (18) の右二つ、すなわち  $\Psi(\mathbf{p}^\dagger) = ((\mu^{(2)} = (1, 2), J^{(2)} = (0, 0)), (\mu^{(3)} = (1), J^{(3)} = (0)))$  である。

## 5 長方形クリスタルのパス

集合  $B^{a,s}$  を、縦の長さ  $a$  横の長さ  $s$  の長方形の形をしたヤングタブロの集合（使用されている文字は  $1$  から  $n+1$ ）とする。ここにもクリスタルの構造が入り、テンソル積をとることによって最高ウェイトパスを定義できる。このパスも Littlewood-Richardson タブロに翻訳され、それは Kirillov-Schilling-Shimozono [KSS] の全単射により rigged configuration と対応づけられる [Schi, SS]。本節では定理 5 の証明に用いるためこの対応について説明する。なお、対応を与える操作自体は最高ウェイト条件を満たさないパスにも適用できるので、そのような場合も含めて（長方形クリスタルのパスと rigged configuration の間の）KSS 対応と本稿では呼ぶことにする。

集合  $B := B^{a_1, s_1} \otimes \cdots \otimes B^{a_L, s_L}$  の要素であるようなパスたちを考える。  $B$  のテンソル成分に於いて、縦の長さ  $a$  横の長さ  $s$  の長方形の数を  $L_{a,s}$  とする。すなわち順序を無視すれば  $B = \bigotimes_{a,s \geq 1} (B^{a,s})^{\otimes L_{a,s}}$  である。分割  $\xi^{(a)}$  を大きさ  $s$  の部分が  $L_{a,s}$  個ある分割とする。つまり

$$\xi^{(a)} = (\xi_1^{(a)}, \dots, \xi_{n_a}^{(a)}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{L_{a,1}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{L_{a,2}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{L_{a,3}}, \dots),$$

ここで  $n_a = \sum_{s \geq 1} L_{a,s}$  である。前節の (9) を一般化して次のような形のデータを考える

$$((\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}), (\mu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})), \quad (19)$$

また次のようにおく

$$\tilde{E}_j^{(a)} = \sum_{i=1}^{n_a} \min(j, \xi_i^{(a)}). \quad (20)$$

これと前節の (10) を用いて vacancy numbers を（前節の定義を修正して）

$$p_j^{(a)} = E_j^{(a-1)} - 2E_j^{(a)} + E_j^{(a+1)} + \tilde{E}_j^{(a)} \quad (1 \leq a \leq n), \quad (21)$$

とする。ここでは  $E_j^{(0)} = E_j^{(n+1)} = 0$  である。これらの  $p_j^{(a)}$  たちを用いて条件 (12) が満たされるとき、データ (19) は rigged configuration と呼ばれる。以下では、条件 (12) の一番左の不等号が成立せず vacancy number が負にもなりうる場合も含めて、データ (19) を rigged configuration と呼ぶことにする。

集合  $B = B^{a_1, s_1} \otimes \cdots \otimes B^{a_{L-1}, s_{L-1}} \otimes B^{a_L, s_L}$  の要素であるようなパス  $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_{L-1} \otimes b_L$  と、それに KSS 対応する rigged configuration があつたとする。以下の Case 1, 2 の操作を繰り返すことにより、rigged configuration はサイズの小さなものに置き換えられていき、パスは末尾から削られていき、最終的に空集合どうしの対応に行き着く。まずはそれを説明するための言葉を用意しておこう。組  $(\mu^{(a)}, J^{(a)})$  を  $a$  番目の rigged partition と呼ぶ。各  $a$  に対する分割  $\mu^{(a)}$  の部分のことを string と呼び、そ

の大きさを string の長さと呼ぶ。分割  $\mu^{(a)}$  の長さ  $j$  の string に付随する rigging が  $J_i^{(a)}$  のとき、 $p_j^{(a)} - J_i^{(a)}$  をその string に付随する co-rigging と呼ぶ。Co-rigging がゼロとなる string を特異な string と呼ぶ。

Case 1 ( $a_L > 1$  の場合).  $B^{a_L, s_L}$  の要素  $b_L$  から  $B^{a_L-1, s_L} \otimes B^{1, s_L}$  の要素  $\tilde{b}_L \otimes \tilde{b}_{L+1}$  を次のようにしてつくる。長方形タブロ  $b_L$  の一番下の 1 行を剥ぎ取り、それを剥ぎ取られた残りの部分に右側からテンソル積でつける。このときパス  $b_1 \otimes \cdots \otimes b_{L-1} \otimes \tilde{b}_L \otimes \tilde{b}_{L+1}$  に対応する rigged configuration は次のものになる。分割  $\xi^{(a_L)}$  から大きさ  $s_L$  の部分の一つを削除し、分割  $\xi^{(a_L-1)}$  と  $\xi^{(1)}$  に大きさ  $s_L$  の部分の一つずつ追加する。さらに  $1 \leq i \leq a_L - 1$  に対して  $i$  番目の rigged partition たちに長さ  $s_L$  の特異な string を一つずつ追加する。このような操作を行っても、vacancy numbers (21) の値に変化はない。図 1, 2 を参照。

Case 2 ( $a_L = 1$  の場合). タブロ  $b_L$  に含まれる一番小さな数字  $(b_L)_1$  が rigged configuration に於いて次のように決まる。まず  $i = 1, x = s_L$  とおく。

1. Rigged partition  $(\mu^{(i)}, J^{(i)})$  に長さが  $x$  以上の特異な string(s) があるかどうか確認する。
2. もし、 $(\mu^{(i)}, J^{(i)})$  に特異な string(s) があり、その長さが  $x$  以上ならば、その中で最も短い string を選択された string と呼んで印をつける。このときもし  $i = n$  ならば、 $(b_L)_1 = n + 1$  が確定して終了。もし  $i < n$  ならば、選択された string の長さを新たな  $x$  とし、 $i$  の値を 1 つ増して 1 に戻る。
3. もし、 $(\mu^{(i)}, J^{(i)})$  に特異な string がないか、あるいはあってもその長さが  $x$  より短いならば、 $(b_L)_1 = i$  が確定して終了。

パスの末尾をタブロ  $b_L$  から  $(b_L)_1$  を 1 つ取り除いたもの  $b'_L$  で置き換える。パス  $b_1 \otimes \cdots \otimes b_{L-1} \otimes b'_L$  に対応する rigged configuration は次のものになる。分割  $\xi^{(1)}$  に於いて、大きさ  $s_L$  の部分の一つを大きさ  $s_L - 1$  の部分で置き換える。また、 $1 \leq i \leq (b_L)_1 - 1$  に対する  $(\mu^{(i)}, J^{(i)})$  について、選択された string たちを長さが 1 だけ短い特異な string たちに置き換える。(選択された string の長さが 1 の場合は、それを単に消去する。) 図 3, 4 を参照。

以上のことを用いてパス  $b$  に rigged configuration (19) を対応させる写像を記号  $\Phi$  で表すことにする。次の重要な事実がある [KSS] (ただしこの形で主張が述べられているのは [SS], Theorem 8.6 第 6 項)。

命題 7. Rigged configuration は組合せ  $R$  の作用で不変である。

すなわち 2 つのパス  $b$  と  $b'$  がクリスタルの同型で写りあうならば  $\Phi(b) = \Phi(b')$  である。(図 1-4 と図 5, 6 を比較。)

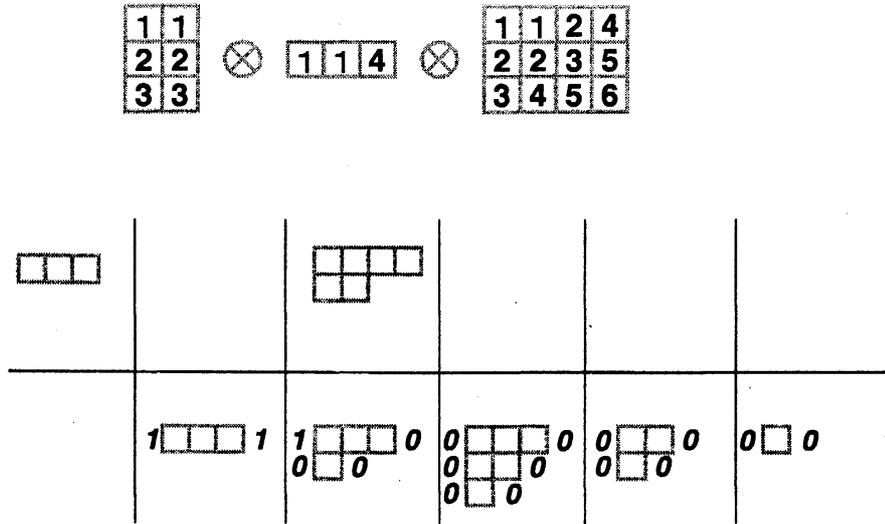


図 1: 長方形クリスタルのパスと、rigged configuration との間の KSS 対応。Rigged configuration (19) の表示の仕方として、ここでは上の段の  $a$  番目の区画に  $\xi^{(a)}$  を書き、下の段の  $a+1$  番目の区画に  $(\mu^{(a)}, J^{(a)})$  を書いた。

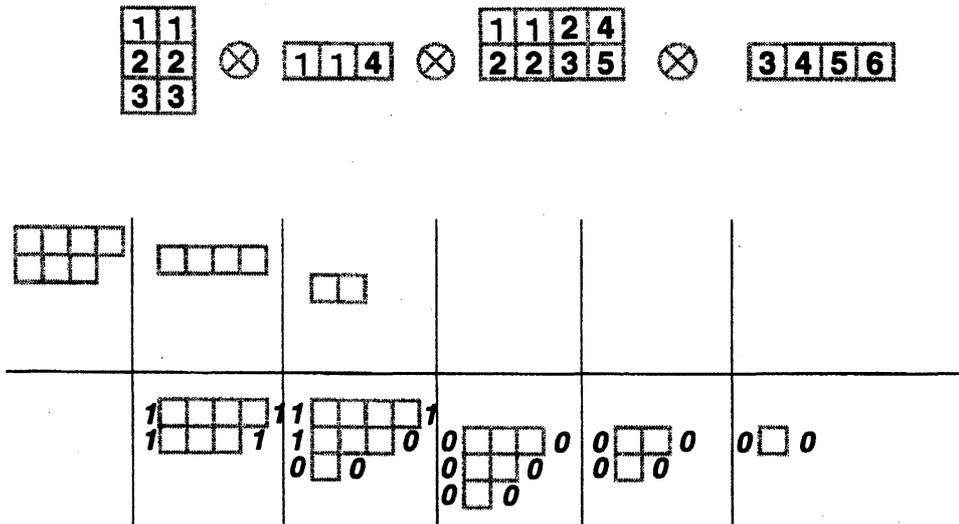


図 2: パスの一番右のタブロの一番下の行を剥ぎ取り、テンソル積で右につけてつくった新たなパスと、それに対応する rigged configuration。

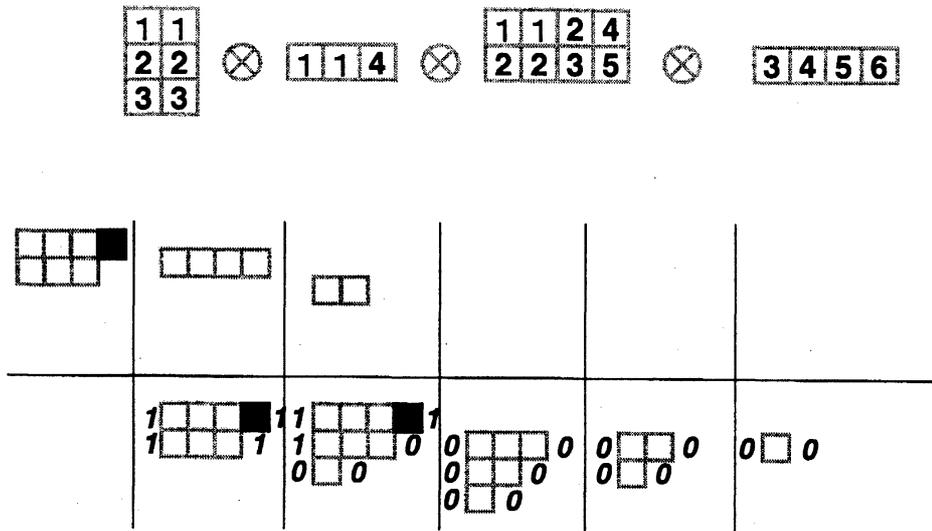


図 3: 特異な string の選択。パスの右端のタブロの一番小さい数字 (この例では 3) がこのようにして確定する。

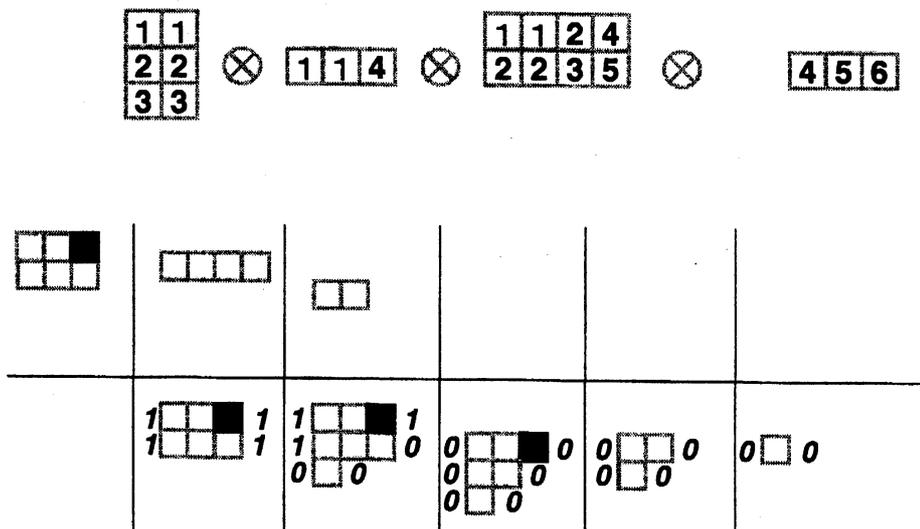


図 4: 上の例から一つ縮小したパスと、rigged configuration との間の KSS 対応。およびそこからの特異な string の選択。今度は数字 4 が確定する。

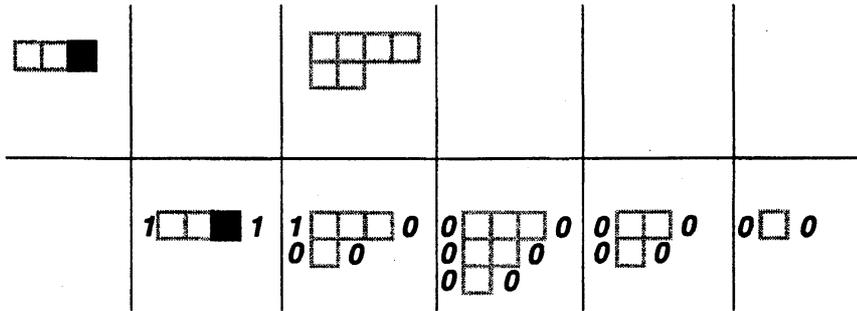
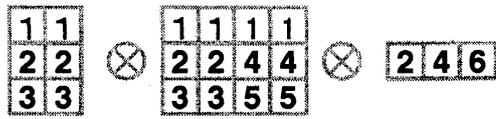


図 5: パスに組合せ R を作用させても rigged configuration は変わらない。図 1 のパスの右二つの要素をクリスタルの同型で入れ換えたものと、rigged configuration との間の KSS 対応。およびここからの特異な string の選択。数字 2 が確定する。

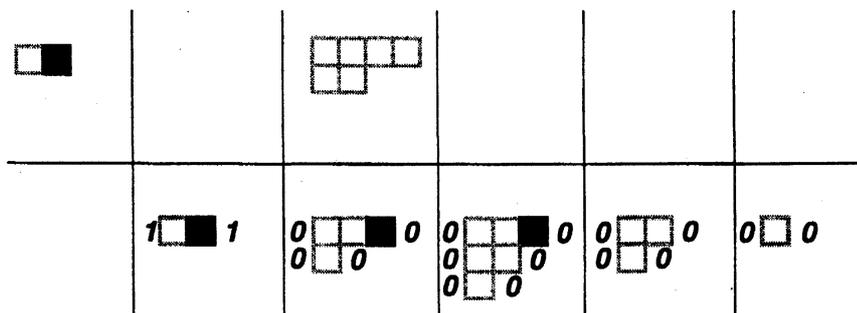
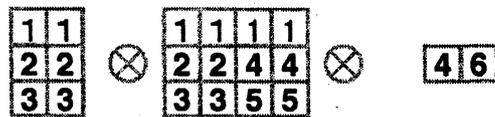


図 6: 上の例から一つ縮小したパスと、rigged configuration との間の KSS 対応。およびここからの特異な string の選択。今度は数字 4 が確定する。

## 6 定理の証明

$\Phi$  を前節で定義した写像とする。KSS 対応のアルゴリズムから、次のことが容易に分かる。

補題 8. 任意のパス  $\mathbf{b}$  と、クリスタル  $B^{a,s}$  の最高ウェイト元  $u = u^{a,s}$  に対して以下が成立する。

1.  $\Phi(\mathbf{b})$  と  $\Phi(\mathbf{b} \otimes u)$  の configuration および rigging は共通である。
2.  $\Phi(\mathbf{b})$  と  $\Phi(u \otimes \mathbf{b})$  の configuration および co-rigging は共通である。

定理 5 の証明. 勝手な  $sl_{n+1}$  パス  $\mathbf{p} = p_1 \otimes p_2 \otimes \cdots \in \mathcal{P}$  を考え、対応する rigged configuration を

$$\Psi(\mathbf{p}) = ((\mu^{(1)}, J^{(1)}), (\mu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})),$$

とする。整数  $L$  を十分大きくとれば  $L$  番目のテンソル成分より右側には 1 のみがあることになるので、そこで打ち切ったパスを改めて  $\mathbf{p}$  と呼ぶことにする。すなわち  $\mathbf{p} = p_1 \otimes \cdots \otimes p_L$  のように再定義する。すると補題 8 第 1 項より

$$\Phi(\mathbf{p}) = (((1^L), \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(1)}, J^{(1)}), (\mu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)}))), \quad (22)$$

となる。 $B^{2,1}$  の最高ウェイト元  $u = u^{2,1}$  を用いて補題 8 第 2 項を繰り返し適用し

$$\Phi(u^{\otimes M} \otimes \mathbf{p}) = (((1^L), (1^M), \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(1)}, J^{(1)}), (\mu^{(2)}, \tilde{J}^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)}))).$$

ただし  $\tilde{J}_i^{(2)} = J_i^{(2)} + M$  であり、これによって 2 番目の rigged partition の co-rigging は (22) と同一に保たれる。クリスタルの同型により

$$u^{\otimes M} \otimes \mathbf{p} \simeq T_1^M(\mathbf{p}) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ x_M \end{bmatrix} \quad \left( \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{を} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{で表した} \right) \quad (23)$$

のようになる。命題 7 により写像  $\Phi$  による像は両辺で等しい。前節の Case 1 により右辺の一番右のテンソル成分を  $1 \otimes x_M$  で置き換えると、対応する rigged configuration は次のものに成る。

$$(((1^{L+2}), (1^{M-1}), \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(1)}, J^{(1)})', (\mu^{(2)}, \tilde{J}^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)}))).$$

ただし  $(\mu^{(1)}, J^{(1)})'$  は  $(\mu^{(1)}, J^{(1)})$  に長さ 1 の特異な string を 1 つ追加したものである。前節の Case 2 の操作を 2 回適用すると、パスの末尾から  $1 \otimes x_M$  が取り除かれ、rigged configuration は次のものに成る

$$(((1^L), (1^{M-1}), \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(1)}, J^{(1)}), \dots)).$$

1 番目の rigged partition は元に戻っている。2 番目以降の rigged partitions (表記上省略した) は一般には変更を受けてサイズは縮小する。もし変更を受けなければ 2 番目の rigged partition の string に付随する co-rigging はすべて 1 だけ減少している。

したがって整数  $M$  を十分大きくとっておけば、上の操作を繰り返すことにより 2 番目の rigged partition に必ず特異な string が出現する。よって  $M$  を然るべく十分に大きくとっておけば、この操作の繰り返しにより 2 番目の rigged partition は縮小し続け、いずれ消滅する。このとき rigged configuration の定義により 3 番目以降の rigged partitions もすべて消滅する。

以上で定理 5 の第 1 項が証明された。続いて第 2 項を証明する。パス  $\bar{p}$  も有限の長さで考える。十分大きい整数  $N$  をとり、 $y_i = x_i - 1$  ( $x_i$  は (23) で定まったもの) とし、次のおく。

$$\bar{p} = y_1 \otimes \cdots \otimes y_M \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_N.$$

前節の Case 1,2 の操作を用いて rigged configuration から  $x_i$  たちが決定される時、2 番目の rigged partition に対する co-rigging の値の計算には分割  $\mu := \mu^{(1)}$  の情報が使われていたことを考慮すると

$$(u^{1,\mu_1} \otimes u^{1,\mu_2} \otimes \cdots) \otimes \bar{p}$$

に対応する rigged configuration が

$$(((1^{N+M}) \cup \mu, \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(2)}, \tilde{J}^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)}))),$$

になることが分かる。一方、命題 7 によりそれは以下のパスにも対応する。

$$T_\mu(\bar{p}) \otimes (u^{1,\mu_1} \otimes u^{1,\mu_2} \otimes \cdots)$$

すると補題 8 第 1 項より  $T_\mu(\bar{p})$  に対応するのは

$$(((1^{N+M}), \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(2)}, \tilde{J}^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})))$$

である。よって補題 8 第 2 項より  $p^\dagger = (T_1^{-1})^M \circ T_\mu(\bar{p})$  に対応するのは

$$(((1^N), \emptyset, \dots, \emptyset), ((\mu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})))$$

である。以上で定理 5 の第 2 項が証明された。 □

以下の事実は補題 8 から従う。

命題 9. 与えられた  $sl_{n+1}$  パス  $p \in \mathcal{P}$  に対し、対応する rigged configuration を

$$\Psi(p) = ((\mu^{(1)}, J^{(1)}), (\mu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})),$$

とする。このときパス  $\mathbf{p}$  に (6) の時間発展演算子  $T_i$  を作用させたものに対応する rigged configuration は

$$\Psi(T_i(\mathbf{p})) = ((\mu^{(1)}, \bar{J}^{(1)}), (\mu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\mu^{(n)}, J^{(n)})),$$

となる。ここで  $\bar{J}_i^{(1)} = J_i^{(1)} + \min(l, \mu_i^{(1)})$  である。

箱玉系における内部自由度のダイナミクスからの分離 (命題 4) は定理 5 とこの命題から従う。

## 参考文献

- [FOY] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, Energy functions in box ball systems, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 1379–1392.
- [HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, The  $A_M^{(1)}$  automata related to crystals of symmetric tensors, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 274–308.
- [KKM] S.-J. Kang, M. Kashiwara and K. C. Misra, Crystal bases of Verma modules for quantum affine Lie algebras, *Compositio Math.* **92** (1994) 299–325.
- [KKR] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group. *J. Soviet Math.* **41** (1988) 916–924.
- [KR] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux. *J. Soviet Math.* **41** (1988) 925–955.
- [KOSTY] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi, and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin Bijection, *Nuclear Physics B* **740** (2006) 299–327.
- [KOTY] 国場、尾角、高木、山田: 箱玉系の頂点作用素と分配関数, 京都大学数理解析研究所講究録 1302 (2003) pp91–107.
- [KSS] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations. *Selecta Math.* **8** (2002) 67–135.
- [NY] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Mathematica, New Ser.* **3** (1997) 547–599.

- [Schi] A. Schilling, X=M Theorem: Fermionic formulas and rigged configurations under review preprint, math.QA/0512161.
- [SS] A. Schilling and M. Shimozono, X=M for symmetric powers, *J. Alg.* **295** (2006) 562–610.
- [Tg1] T. Takagi, Separation of colour degree of freedom from dynamics in a soliton cellular automaton, *Journal of Physics A: Math. Gen.* **38** (2005) 1961-1976.
- [Tg2] T. Takagi, Soliton cellular automata, submitted.
- [T] D. Takahashi, On some soliton systems defined by using boxes and balls, *Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA '93)*, (1993) 555–558 [Unpublished].
- [TM] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultra-discrete modified KdV equation, *J. Phys. A* **30** (1997) L733 – L739.
- [TNS] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma, Proof of the solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization, *Inverse Probl.* **15**, (1999) 1639–1662.