数理解析研究所講究録
1498巻 2006年 99-112

Solutions with boundary blowup for k-curvature equation

広島大学・大学院理学研究科　滝本　和広 (Kazuhiro Takimoto) [1]
Graduate School of Science
Hiroshima University

1　はじめに

次の **k-曲率方程式**と呼ばれる偏微分方程式の**境界爆発問題**

$$H_k[u] = S_k(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) = f(u)g(|Du|) \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) \to \infty \quad \text{as } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \to 0 \tag{1.2}$$

の解の存在，および境界 $\partial\Omega$ 付近における解の挙動について考察する．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ は有界領域，$u \in C^2(\Omega)$ に対して $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ は u のグラフの**主曲率**，即ち次の $n \times n$ 行列

$$\mathcal{C} = D\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(I - \frac{Du \otimes Du}{1+|Du|^2}\right) D^2 u \tag{1.3}$$

の固有値とし，S_k $(k = 1, \ldots, n)$ は **k 次基本対称関数**，即ち

$$S_k(\kappa) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_k} \tag{1.4}$$

とする．

さて，$k = 1, 2, n$ のとき，$H_k[u]$ は u の平均曲率，スカラー曲率，Gauss 曲率にそれぞれ対応している．従って本稿で考察する k-曲率方程式は，幾何学や物理学で重要なこれらの方程式を包括し，より総合的な立場から定式化された方程式と言える．ここで，(1.1) は $k = 1$ のときは発散型の準線形方程式であるのに対し，$2 \leq k \leq n$ のときは完全非線形方程式であり，解析が非常に困難であることに注意する（ただし $k = n$ の場合は Monge-Ampère 型方程式となり解析は比較的容易である）．$2 \leq k \leq n-1$ の場合においては，k-曲率方程式の研究はこれまで主として Dirichlet 問題の可解性が中心であった（例えば [6, 13, 28]）．

一方，(1.2) は**境界爆発条件**と呼ばれ，(1.2) を満たす解は**境界爆発解**と呼ばれる．境界爆発条件は物理学や幾何学においてしばしば現れる条件である ([15, 23, 25])．楕円型方程式の境界爆発問題の可解性の研究は，$\Delta u = e^u$ を考察した Bieberbach

[1]本研究の一部は，文部科学省より科学研究費補助金 (No. 16740077) の補助を受けて行われた．

[4] や Rademacher [25] による先駆的な研究がある．その後，準線形および半線形方程式については盛んに研究されており（例えば [16, 24] や [3, 8, 19, 20, 21, 23]），特に (1.1) で $k=1$ の場合には [2, 9, 11] の結果が知られている．しかし，完全非線形方程式については Monge-Ampère 方程式および Hessian 方程式の場合 ([7, 12, 22, 26]) に限られており，今まで進んだ研究はされていなかった．

次の第 2 節では主結果，即ち $2 \leq k \leq n-1$ の場合において，(1.1)-(1.2) の解の存在・非存在，および解が存在した場合の，領域の境界付近における解の挙動に関する結果を述べ，その証明を第 3 節〜第 5 節で行う．$k=n$ の場合については第 6 節で別に議論する．最後に応用として，第 7 節で k-曲率流方程式に従って一定速度で動く曲面について考察を行う．

2 仮定と主結果

主結果を述べる前に，k-曲率方程式を解析する上で必要な概念について述べる．k 次基本対称関数 S_k の admissible set $\Gamma_k(\mathbb{R}^n)$ を

$$\Gamma_k(\mathbb{R}^n) = \{\kappa \in \mathbb{R}^n \mid S_j(\kappa) > 0, \quad j = 1, \dots, k\} \tag{2.1}$$

と定義する．このとき，

$$\Gamma_1(\mathbb{R}^n) \supset \Gamma_2(\mathbb{R}^n) \supset \cdots \supset \Gamma_n(\mathbb{R}^n) = \{\kappa \in \mathbb{R}^n \mid \kappa_i > 0, i = 1, \dots, n\}, \tag{2.2}$$

$$\overline{\Gamma_k(\mathbb{R}^n)} = \{\kappa \in \mathbb{R}^n \mid S_k(\kappa + \eta) \geq S_k(\kappa), \quad {}^\forall \eta_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \tag{2.3}$$

が成立する ((2.3) の証明は [5] を参照)．

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とするとき，$u \in C^2(\Omega)$ が <u>k-admissible</u> であるとは，任意の $x \in \Omega$ に対して $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \overline{\Gamma_k(\mathbb{R}^n)}$ であることをいう．(2.2) より，C^2 級関数が n-admissible であることと凸関数であることは同値である．さて，$k \geq 2$ のとき k-曲率方程式 (1.1) は $C^2(\Omega)$ 全体では楕円型の方程式ではない．しかしながら，次の命題が成立する．

Proposition 2.1. ([6]) H_k は k-admissible な関数に関して退化楕円型である．

次に Ω を C^2 級領域（即ち境界 $\partial\Omega$ が C^2 級の領域），$k = 1, \dots, n-1$ のとき，Ω が <u>k-convex</u> (resp. <u>uniformly k-convex</u>) であるとは，任意の $x \in \partial\Omega$ に対して，$\kappa' = (\kappa'_1, \dots, \kappa'_{n-1}) \in \overline{\Gamma_k(\mathbb{R}^{n-1})}$ (resp. $\Gamma_k(\mathbb{R}^{n-1})$) となることをいう．ここで $\kappa' = (\kappa'_1, \dots, \kappa'_{n-1})$ は点 x における $\partial\Omega$ の主曲率である．(2.3) より，C^2 級領域が $(n-1)$-convex (resp. uniformly $(n-1)$-convex) であることと凸領域 (resp. 狭義凸領域) であることは同値である．また，k-admissible な関数の非退化な等高面はある $(k-1)$-convex な領域の境界となっている．

以下，主結果を述べる．本稿全体を通して，f, g に以下の仮定をおく．

- $t_0 \in [-\infty, \infty)$ に対し，f は $C^\infty(t_0, \infty)$ に属する正値関数，かつ $f'(t) \geq 0$ $\left({}^\forall t \in (t_0, \infty)\right)$.
- $t_0 > -\infty$ ならば $\lim_{t \to t_0+0} f(t) = 0$. $t_0 = -\infty$ ならば $\int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds < \infty$ $\left({}^\forall t \in \mathbb{R}\right)$.
- $g \in C^\infty[0, \infty)$ かつ g は正値関数.

まずは k-曲率方程式の境界爆発問題の解の存在に関する結果を述べる.

Theorem 2.2. $2 \leq k \leq n-1$ とし，Ω, f, g に次の条件を仮定する.

(A1) Ω は uniformly k-convex な C^∞ 級の有界領域.

(A2) ある $T > 0$ が存在して，g は $[T, \infty)$ 上で非増加関数，かつ $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$.

(A3) $\tilde{g}(t) = \dfrac{g(t)}{t}$, $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$ とおくとき，$\displaystyle\int^{\infty} \frac{dt}{\tilde{g}^{-1}\left(\frac{1}{F(t)}\right)} < \infty$.

(A4) $H(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{s^k}{g(s)\,(1+s^2)^{(k+2)/2}}\, ds$ とおくとき，$\lim_{t \to \infty} H(t) = \infty$.

(A5) $\varphi(t) = g(t)(1+t^2)^{\frac{k}{2}}$ とおくとき，$\varphi(t)$ は $[0, \infty)$ 上の凸関数.

(A6) $\limsup_{t \to \infty} g'(t) t^2 < \infty$.

このとき，(1.1)-(1.2) を満たす粘性解 u が存在する.

この定理では $2 \leq k \leq n-1$ としているが，$k = 1$ の場合は Greco [11] により研究されている．また $k = n$ の場合は第 6 節で考察する.

次は境界爆発解の非存在に関する結果である.

Theorem 2.3. $2 \leq k \leq n-1$ とする．$\bar{g}, \bar{h}$ を

$$\bar{g}(t) = \max_{s \geq t} g(s), \quad \bar{h}(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \left(\frac{\binom{n-1}{k}}{\bar{g}(t)} \right)^{1/k}. \tag{2.4}$$

と定義し，$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$ を仮定する．このとき，もし

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\bar{h}^{-1}\left(f(t)^{1/k} R\right)} = \infty, \tag{2.5}$$

となる $R \geq \inf_{x \in \Omega} \sup_{y \in \Omega} |x - y|$ が存在すれば，(1.1)-(1.2) は解をもたない.

Example 2.1. $2 \leq k \leq n-1, p, q > 0$ とし，Ω を uniformly k-convex な C^∞ 級有界領域とする．次の 3 つの方程式を考える.

$$H_k[u] = \frac{u^p}{(1+|Du|^2)^{q/2}} \quad \text{in } \Omega, \tag{2.6}$$

$$H_k[u] = \frac{e^{pu}}{(1+|Du|^2)^{q/2}} \quad \text{in } \Omega, \tag{2.7}$$

$$H_k[u] = \frac{e^{pu}}{e^{q|Du|}} \quad \text{in } \Omega. \tag{2.8}$$

このとき，(2.6) は $p > q$ かつ $1 \leq q \leq k-1$ ならば境界爆発解をもち，(2.7) は $1 \leq q \leq k-1$ ならば境界爆発解をもつ．しかし，(2.8) はいかなる $p, q > 0$ に対しても境界爆発解をもたない．

次に，(1.1)-(1.2) の解の $\partial\Omega$ の近くにおける挙動に関して得られた結果を述べる．

Theorem 2.4. $1 \leq k \leq n-1$ とする．Theorem 2.2 の **(A1)**, **(A2)**, **(A3)** および次の条件を仮定する．

(B1) 「$t_0 = -\infty$」または「$t_0 > -\infty$ かつ $f^{1/k}$ が t_0 で Lipschitz 連続」が成立．

(B2) ある $T' > 0$ が存在して，f は $[T', \infty)$ 上で凸関数．

(B3) $h(t) = \dfrac{t}{g(t)^{1/k}\sqrt{1+t^2}}$ とおく．このとき，ある $\alpha > 0$ が存在して $\dfrac{h(t)}{t^\alpha}$ は $(0, \infty)$ 上で非減少関数．

(B4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{(1+t^2)g'(t)} = 0.$

このとき，正定数 C_1, C_2 が存在して，(1.1)-(1.2) の任意の解 u は次を満たす．

$$\psi^{-1}\left(C_1 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right) - O(1) \leq u(x) \leq \psi^{-1}\left(C_2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right) + O(1). \tag{2.9}$$

ただし，$\psi(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{ds}{h^{-1}\left(f(s)^{1/k}\right)}$ とする．

Remark 2.1. 研究集会における講演，および著者の論文 [27] では Ω が狭義凸である（この仮定は **(A1)** より強い）ことを仮定していたが，その後の研究により，より自然な仮定である **(A1)** に弱められることがわかった．

Example 2.2. $1 \leq k \leq n-1$, $p, q > 0$ とし，Ω を uniformly k-convex な C^∞ 級有界領域とする．$p \geq k$ かつ $p > q$ のとき，(2.6) の境界爆発解は

$$C_1 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{-\frac{q}{p-q}} \leq u(x) \leq C_2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{-\frac{q}{p-q}} \quad \text{near } \partial\Omega \tag{2.10}$$

を満たす（$C_1, C_2 > 0$ は正定数）．また，$q > 0$ のとき，(2.7) の境界爆発解は

$$u(x) = -\frac{q}{p} \log \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) + O(1) \quad \text{near } \partial\Omega, \tag{2.11}$$

を満たす．

3 Theorem 2.2 の証明

Theorem 2.2 の証明は以下の 2 つのステップからなる．

$\boxed{\textbf{Step 1.}}$ $n > t_0$ を満たす自然数 n に対して，次の Dirichlet 問題

$$\begin{cases} H_k[u_n] = f(u_n)g(|Du_n|) & \text{in } \Omega, \\ u_n \equiv n & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

の古典解が存在することを示す.

$\boxed{\textbf{Step 2.}}$ **Step 1.** で構成した $\{u_n\}$ に対し $\lim_{n\to\infty} u_n$ が存在し，極限関数 u が (1.1)-(1.2) の粘性解であることを示す.

以下，各ステップごとに証明のスケッチを述べる．詳しい証明については [27] を参照されたい.

Step 1. のスケッチ

$n > t_0$ を満たす自然数 n を固定する．このとき（u や $\sigma \in [0,1]$ に依らない）定数 $M > 0$ が存在して,

$$\begin{cases} H_k[u] = \sigma f(u)g(|Du|) + (1-\sigma)\delta & \text{in } \Omega, \\ u \equiv \sigma n & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

の任意の解 u_σ に対して

$$\|u_\sigma\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M. \tag{3.3}$$

を満たすことを示せばよい ([10, 18])．ここで δ は十分小さい正定数とする．この a priori 評価の導出に **(A1)**, **(A2)**, **(A4)**, **(A5)** が用いられる.

Step 2. のスケッチ

比較原理により，$u_n(x)$ は n に関して単調増加であるから，$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ が存在する.

次に $\{u_n\}$ が局所一様有界であることを示す．コンパクト集合 $K \Subset \Omega$ を固定する．すると，ある定数 $d > 0$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $B_d(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < d\} \Subset \Omega$ かつ

$$v(x) \to \infty \quad \text{as } \mathrm{dist}(x, \partial B_d(0)) \to 0 \tag{3.4}$$

を満たす (1.1) の <u>球対称解</u> $v \in C^2(B_d(0))$ が存在する（このことは仮定 **(A3)** から保証される）．比較原理より，任意の $x \in K$ と任意の $n > t_0$ に対し

$$u_n(y) \leq v(|y - x|), \quad {}^\forall y \in B_d(x) \tag{3.5}$$

が成立する．従って

$$\sup_{n > t_0} \max_{x \in K} u_n(x) \leq v(0) \tag{3.6}$$

が得られ，局所一様有界性が示された．また **(A6)** と Korevaar [17] の結果から局所同程度連続性が言えるので，Ascoli-Arzelà の定理と対角線論法を用いると $u \in C^0(\Omega)$ が示される．最後に，粘性解の広義一様収束に関する安定性より，u は (1.1)-(1.2) の粘性解である.

Remark 3.1. (1.1)-(1.2) の解の一意性については未解決である．しかし，上の証明で構成した u は (1.1) の最小の境界爆発解である．実際，U を任意の (1.1) の境界爆発解とすると，比較原理から $u_n \le U$ ($^\forall n > t_0$) であるので，$u = \lim_{n\to\infty} u_n \le U$ がいえる．

4 Theorem 2.3 の証明

(1.1) の球対称解 $u(x) = \tilde{u}(|x|)$ は次の常微分方程式を満たす．(以降，$\tilde{u}$ を u と表すことにする)

$$\binom{n-1}{k-1}\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}\left(\frac{u'}{r\sqrt{1+u'^2}}\right)^{k-1} + \binom{n-1}{k}\left(\frac{u'}{r\sqrt{1+u'^2}}\right)^{k} = f(u)g(|u'|), \quad (r>0) \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0 > t_0, \quad u'(0) = 0. \tag{4.2}$$

いま，(1.1)-(1.2) の解 v が存在したと仮定する．$x_0 \in \Omega$ と $u_0 > v(x_0)$ を満たす実数 u_0 を固定する．

このとき，初期値問題 (4.1)-(4.2) の解 u は，$R' \le \sup_{y\in\Omega}|x_0 - y|$ を満たすある R' が存在して $\lim_{r\to R'-0} u(r) = \infty$ となることが比較原理からわかる．

一方，(4.1) より

$$\binom{n-1}{k}\left(\frac{u'}{R'\sqrt{1+u'^2}}\right)^{k} < f(u)\bar{g}(u') \iff u' < \bar{h}^{-1}\left(f(u)^{1/k}R'\right) \tag{4.3}$$

を得る．0 から R' まで積分すると

$$\int_{u_0}^{\infty}\frac{dt}{\bar{h}^{-1}\left(f(t)^{1/k}R'\right)} < R'. \tag{4.4}$$

即ち，任意の $R \ge \sup_{y\in\Omega}|x_0 - y|$ に対して

$$\int^{\infty}\frac{dt}{\bar{h}^{-1}\left(f(t)^{1/k}R\right)} < \infty \tag{4.5}$$

が成立する．x_0 の任意性より (4.5) は $R \ge \inf_{x\in\Omega}\sup_{y\in\Omega}|x_0 - y|$ で成立するが，これは矛盾である．

Remark 4.1. Example 2.1 の (2.6) を考えると，Theorem 2.2 の結果より，境界爆発解が存在するためには $p > q$ が必要である．一方，この場合 **(A3)** は $p > q$ と同値であることに注意する．我々は $1 \le q < p$ ならば (2.6) の境界爆発解が存在する（$q \le k-1$ は不要）と推測しているが，まだ証明は得られていない．

5 Theorem 2.4 の証明

方程式 (1.1) の解 u を任意にとる．以後，$d(x) := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, $\Omega_r := \{x \in \Omega \mid d(x) < r\}$ $(r > 0)$ とする．**(A1)** より，次の条件を満たす正定数 R が存在する：

- $d(x)$ は Ω_R において C^∞ 級関数である．
- $x \in \Omega_R$ に対して，x に最も近い $\partial\Omega$ 上の点 $z(x)$ がただ一つ定まる．
- ある正定数 $m, M > 0$ が存在して，任意の $x \in \Omega_R$ に対し，$\tilde{\kappa} = (\tilde{\kappa}_1, \dots, \tilde{\kappa}_{n-1}) := \left(\dfrac{\kappa'_1}{1 - d(x)\kappa'_1}, \dots, \dfrac{\kappa'_{n-1}}{1 - d(x)\kappa'_{n-1}}\right) \in \Gamma_k(\mathbb{R}^{n-1})$ かつ

$$m \le S_k(\tilde{\kappa}) \le M \tag{5.1}$$

が成立する．ただし，$\kappa'_1, \dots, \kappa'_{n-1}$ は $z(x)$ における $\partial\Omega$ の主曲率とする．

それでは，(2.9) の左側の不等式から証明しよう．いま，(4.1)-(4.2) の解で $u(r) \to \infty$ (as $r \to \mathrm{diam}\,\Omega - 0$) を満たすものを v_1 とおく．(このような解の存在は **(A2)**, **(A3)**, **(B1)**, **(B3)** から言える．証明は [27, Theorem 3.6] を参照.) $d(y) = 3R/4$ を満たす $y \in \Omega$ を任意にとると，比較原理より

$$u(x) \ge v_1(|x - y|) \quad \text{in} \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |x - y| < \frac{R}{2} \right\} \tag{5.2}$$

が得られる．従って，$C := v_1(0)$ とおくと，任意の (1.1) の解 u と $d(y) = 3R/4$ を満たす任意の $y \in \Omega$ に対して

$$u(y) \ge C \tag{5.3}$$

が成立する．

上で得られた $m > 0$ に対し，常微分方程式

$$\begin{cases} f(w)g(|w'|) = \left(\dfrac{|w'|}{\sqrt{1 + w'^2}}\right)^k \cdot m \\ \lim\limits_{r \to +0} w(r) = \infty, \quad w(R) = w_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

を満たす $(0, R]$ 上の単調非増加かつ凸関数 w が存在するような $w_0 > t_0$ が存在することが示される（証明略）．$\varepsilon \in (0, R/4)$ に対して

$$v_{1\varepsilon}(x) = w(d(x) + \varepsilon) + L, \quad L := \min\left\{ C - w\left(\frac{3}{4}R\right), 0 \right\} \qquad (x \in \overline{\Omega_{3R/4}}) \tag{5.5}$$

とおく．このとき，$d(x) \to +0$ のとき $u(x) \to \infty$ であり，また $d(x) = 3R/4$ となる x において

$$v_{1\varepsilon}(x) = w\left(\frac{3}{4}R + \varepsilon\right) + L \le w\left(\frac{3}{4}R\right) + L \le C \le u(x) \tag{5.6}$$

が成立する．さらに $x \in \Omega_{3R/4}$ において

$$\begin{aligned}
H_k[v_{1\varepsilon}](x) &= \left(\frac{|w'(d(x)+\varepsilon)|}{\sqrt{1+w'(d(x)+\varepsilon)^2}}\right)^k S_k(\tilde{\kappa}) \\
&\quad + \frac{w''(d(x)+\varepsilon)}{(1+w'(d(x)+\varepsilon)^2)^{3/2}} \left(\frac{|w'(d(x)+\varepsilon)|}{\sqrt{1+w'(d(x)+\varepsilon)^2}}\right)^{k-1} S_{k-1}(\tilde{\kappa}) \\
&\geq \left(\frac{|w'(d(x)+\varepsilon)|}{\sqrt{1+w'(d(x)+\varepsilon)^2}}\right)^k \cdot m \\
&= f(w(d(x)+\varepsilon))\, g(|w'(d(x)+\varepsilon)|) \\
&= f(v_{1\varepsilon}(x)-L)\, g(|Dv_{1\varepsilon}(x)|) \geq f(v_{1\varepsilon}(x))\, g(|Dv_{1\varepsilon}(x)|)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

となる．故に比較原理より

$$v_{1\varepsilon}(x) = w(d(x)+\varepsilon) + L \leq u(x) \qquad \text{in } \Omega_{3R/4} \tag{5.8}$$

がわかる．$\varepsilon \to +0$ の極限を考えれば

$$w(d(x)) + L \leq u(x) \qquad \text{in } \Omega_{3R/4} \tag{5.9}$$

が得られる．

ところで (5.4) と **(B3)** より

$$|w'| = -w' = h^{-1}\left(m^{-1/k} f(w)^{1/k}\right) \leq \max\left\{1, m^{-1/\alpha k}\right\} h^{-1}(f(w)^{1/k}). \tag{5.10}$$

が得られる．0 から r まで積分すると

$$\psi(w(r)) = \int_{w(r)}^{\infty} \frac{ds}{h^{-1}(f(s)^{1/k})} \leq \max\left\{1, m^{-1/\alpha k}\right\} r. \tag{5.11}$$

これと (5.9) より，(2.9) の左側の不等式が示された．

次に (2.9) の右側の不等式を示す．先程の議論と同様に，常微分方程式

$$\begin{cases} f(\tilde{w})g(|\tilde{w}'|) = \left(\dfrac{|\tilde{w}'|}{\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}}\right)^k \cdot M \\ \lim\limits_{r\to+0} \tilde{w}(r) = \infty, \quad \tilde{w}(R) = w_0{}' \end{cases} \tag{5.12}$$

を満たす $(0,R]$ 上の単調非増加かつ凸関数 $\tilde{w}$ が存在する．$R' \in (0,R)$ を $\tilde{w}(R') \geq T'$ を満たすように選ぶ．ここで T' は条件 **(B2)** に現れる実数である．$\varepsilon \in (0, R'/4)$ に対して

$$v_{2\varepsilon}(x) = \tilde{w}(d(x)-\varepsilon) + L' \qquad (x \in \overline{\Omega_{R'} \setminus \Omega_\varepsilon}) \tag{5.13}$$

とおく．ここで $L'>0$ は後で定める定数である．以下 $v_{2\varepsilon}=v_{2\varepsilon}(x),\ \tilde{w}=\tilde{w}(d(x)-\varepsilon)$ と略記する．このとき，**(B2)** より

$$f(\tilde{w})=f(v_{2\varepsilon}-L')\le f(v_{2\varepsilon})-Lf'(\tilde{w}) \tag{5.14}$$

が成立する．(5.12) を微分すると

$$\tilde{w}''=\frac{f'(\tilde{w})\tilde{w}'g(|\tilde{w}'|)^2\left(1+(\tilde{w}')^2\right)^{3/2}}{M|\tilde{w}'|\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}g'(|\tilde{w}'|)-Mkg(|\tilde{w}'|)}\left(\frac{|\tilde{w}'|}{\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}}\right)^{-(k-1)} \tag{5.15}$$

であるから，(5.14) を用いると

$$\begin{aligned} H_k[v_{2\varepsilon}] &= \left(\frac{|\tilde{w}'|}{\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}}\right)^{k} S_k(\tilde{\kappa})+\frac{\tilde{w}''}{(1+(\tilde{w}')^2)^{3/2}}\left(\frac{|\tilde{w}'|}{\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}}\right)^{k-1} S_{k-1}(\tilde{\kappa}) \\ &\le f(\tilde{w})g(|\tilde{w}'|)+\frac{f'(\tilde{w})\tilde{w}'g(|\tilde{w}'|)^2}{M|\tilde{w}'|\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}g'(|\tilde{w}'|)-Mkg(|\tilde{w}'|)}S_{k-1}(\tilde{\kappa}) \\ &\le g(|v_{2\varepsilon}'|)\left(f(v_{2\varepsilon})-f'(\tilde{w})\left(L+\frac{S_{k-1}(\tilde{\kappa})}{M\frac{\sqrt{1+(\tilde{w}')^2}g'(|\tilde{w}'|)}{g(|\tilde{w}'|)}+\frac{Mk}{\tilde{w}'}}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

(B5) と $S_{k-1}(\tilde{\kappa})$ の有界性より，ある $R''\in(0,R')$ が存在して，$x\in\Omega_{R''}\setminus\Omega_\varepsilon$ では

$$H_k[v_{2\varepsilon}]\le f(v_{2\varepsilon})\,g(|v_{2\varepsilon}'|) \tag{5.17}$$

が成立する．

ここで，(4.1)-(4.2) の解で $u(r)\to\infty$ (as $r\to R''/2-0$) を満たすものを v_2 とおくと，比較原理より $d(y)=R''$ を満たす任意の $y\in\Omega$ に対して $u(y)\le C':=v_2(0)$ が言える．いま，L' を $L'>C'-w(R'')$ となるように選ぶと，$d(x)\to\varepsilon+0$ のとき $v_{2\varepsilon}(x)\to\infty$ であり，また $d(x)=R''$ となる x において

$$v_{2\varepsilon}(x)=w(R''-\varepsilon)+L'\ge w(R'')+L'>C'\ge u(x) \tag{5.18}$$

が成立するので，比較原理から

$$v_{2\varepsilon}(x)=w(d(x)-\varepsilon)+L'\ge u(x)\qquad \text{in }\Omega_{R''}\setminus\Omega_\varepsilon \tag{5.19}$$

がわかる．$\varepsilon\to+0$ の極限を考えれば

$$w(d(x))+L'\ge u(x)\qquad \text{in }\Omega_{R''} \tag{5.20}$$

(5.4) と **(B3)** より

$$-w'=h^{-1}\left(M^{-1/k}f(w)^{1/k}\right)\ge\min\left\{1,M^{-1/\alpha k}\right\}h^{-1}(f(w)^{1/k}). \tag{5.21}$$

が得られる．0 から r まで積分して

$$\psi(w(r))=\int_{w(r)}^{\infty}\frac{ds}{h^{-1}(f(s)^{1/k})}\ge\min\left\{1,M^{-1/\alpha k}\right\}r. \tag{5.22}$$

これと (5.20) より，(2.9) の右側の不等式が示された．

6 $k=n$ の場合

これまでの議論では，$k=n$（Gauss 曲率）の場合を除外して考察した．ここで，まず (4.1) の解，即ち k-曲率方程式の球対称解を考えてみる．$1 \le k \le n-1$ のとき，(本質的に) 第 1 項を無視した方程式

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u'}{r\sqrt{1+u'^2}}\right)^k = f(u)g(|u'|), & r>0 \\ u(r) \to \infty & \text{as } r \to R-0 \end{cases} \tag{6.1}$$

を考えると，その解は $u(r)=\psi^{-1}(R-r)$ を満たす．即ち，境界付近では (4.1) の左辺の第 1 項の大きさは第 2 項に比べて無視できるほど小さいことがわかる．ところが，$k=n$ のときは第 2 項は 0 となるので，$1 \le k \le n-1$ の場合と $k=n$ の場合とでは結果に大きな違いがあることが想像できる．今節では，$k=n$ の場合の境界爆発解の存在と境界付近における解の挙動について考える．詳しい議論は [27] に譲る．

定理を述べる前に，次の条件を導入する．

(A1)' Ω は狭義凸である C^∞ 級の有界領域.

(B5) $H(t) := \displaystyle\int_0^t \frac{s^n}{g(s)\,(1+s^2)^{(n+2)/2}}\,ds$ とするとき，ある $\alpha>0$ が存在して $\dfrac{H(t)}{t^\alpha}$ は $(0,\infty)$ 上で非減少関数.

ここで，$k=n$ のときは (1.1) は Monge-Ampère 型方程式であるので，凸領域で議論するのが自然であることに注意する．まずは境界爆発解の存在に関する結果である．

Theorem 6.1. $k=n$ とする．条件 **(A1)'**, **(A3)** および $\limsup_{t\to\infty} g(t)t < \infty$ を仮定する．このとき，(1.1)-(1.2) を満たす粘性解 u が存在する．

次に境界付近での解の挙動に関する結果を述べる．

Theorem 6.2. $k=n$ とする．条件 **(A1)'**, **(A3)**, **(B2)** および **(B5)** を仮定する．このとき，正定数 C_1, C_2 が存在して，(1.1)-(1.2) の任意の解 u は次を満たす．

$$\Psi^{-1}(C_1\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)) \le u(x) \le \Psi^{-1}(C_2\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)). \tag{6.2}$$

ただし，Ψ は次によって定義される関数である．

$$\Psi(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{H^{-1}(F(s))}, \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,ds. \tag{6.3}$$

Example 6.1. $k=n$ とする．さらに $p,q>0$ とし，Ω を狭義凸である C^∞ 級有界領域とする．ここでも方程式 (2.6), (2.7) について考察する．

- もし $p > q \geq 1$ ならば，(2.6) の境界爆発解は存在する．また，$p \geq n$ かつ $p > q > 1$ ならば (2.6) の境界爆発解は

$$C_1 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{-\frac{q-1}{p-q+2}} \leq u(x) \leq C_2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{-\frac{q-1}{p-q+2}} \quad \text{near } \partial\Omega \tag{6.4}$$

を満たす（C_1, C_2 は正定数）．
- もし $q > 1$ ならば，(2.7) の境界爆発解は存在し，

$$u(x) = -\frac{q-1}{p} \log \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) + O(1) \quad \text{near } \partial\Omega, \tag{6.5}$$

を満たす．

7 k-曲率流下において一定速度で動く超曲面に関する一考察

$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の超曲面 $\Gamma(t), t > 0$ が，以下を満たすように時間と共に動く状況を考える：

$$V = H_k[\Gamma(t)]. \tag{7.1}$$

ここで，V は曲面の（上向き法線に関する）法線速度，$H_k[\Gamma(t)]$ は $\Gamma(t)$ の k-曲率とする．$\Gamma(t)$ が $u = u(x,t), (x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ で表される場合，(7.1) は

$$\frac{u_t}{\sqrt{1+|Du|^2}} = H_k[u(x,t)] \qquad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \tag{7.2}$$

となる．特に $k = 1$ のときはよく知られている平均曲率流方程式

$$u_t = \Delta u - \frac{1}{1+|Du|^2} \sum_{i,j=1}^{n} D_i u D_j u D_{ij} u \tag{7.3}$$

である．一般の k の場合（k-曲率流方程式）は，(7.2) の右辺が $H_k^{1/k}$ や $H_k^{1/k} + g$ (g は与えられた関数）のときは [14, 29] などで研究されている．

ここでは，特に曲面が形を変えずに u 軸方向に一定速度で動く場合を考える．このとき，$u(x,t) = \varphi(x) + ct$ $(c > 0)$ と表せるので，(7.2) は

$$H_k[\varphi] = \frac{c}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}} \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{7.4}$$

と帰着できる．$k = 1$ かつ $n = 1$ のとき（曲線短縮方程式）は (7.4) の解として，Grim Reaper ([1]) と呼ばれる

$$\varphi(x) = -\frac{1}{c} \log(\cos cx), \qquad -\frac{\pi}{2c} < x < \frac{\pi}{2c} \tag{7.5}$$

が知られている．そこで，一般の $n \geq 2, 1 \leq k \leq n$ に対して，与えられた領域の上でグラフで表される曲面で,「Grim Reaper のように」一定速度で動くもの，即ち (7.4) の境界爆発解 を考察する．このとき，次の結果が得られる．

- $1 \leq k \leq n-1$ のとき，(7.4) の境界爆発解は存在しない．(Theorem 2.3 より)
- $k = n$ (Gauss 曲率方程式) のとき，Ω が狭義凸かつ滑らかな有界領域ならば，$c = \dfrac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)|\Omega|}$ のとき（またそのときに限り），(7.4) の境界爆発解が存在する．

参考文献

[1] S. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 601–633.

[2] C. Bandle, A. Greco, and G. Porru, *Large solutions of quasilinear elliptic equations: existence and qualitative properties*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **11** (1997), 227–252.

[3] C. Bandle and M. Marcus, *"Large" solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behaviour*, J. Anal. Math. **58** (1992), 9–24.

[4] L. Bieberbach, *$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen*, Math. Ann. **77** (1916), 173–212.

[5] L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155** (1985), 261–301.

[6] ———, *Nonlinear second-order elliptic equations, V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1988), 47–70.

[7] S.Y. Cheng and S.T. Yau, *On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 507–544.

[8] F.-C. Cîrstea and V. Rădulescu, *Blow-up boundary solutions of semilinear elliptic problems*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 521–534.

[9] G. Diaz and R. Letelier, *Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: existence and uniqueness*, Nonlinear Anal. **20** (1993), 97–125.

[10] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[11] A. Greco, *On the existence of large solutions for equations of prescribed mean curvature*, Nonlinear Anal. **34** (1998), 571–583.

[12] B. Guan and H.Y. Jian, *The Monge-Ampère equation with infinite boundary value*, Pacific J. Math. **216** (2004), 77–94.

[13] N.M. Ivochkina, *The Dirichlet problem for the equations of curvature of order m*, Leningrad Math. J. **2** (1991), 631–654.

[14] N.M. Ivochkina and O.A. Ladyzhenskaya, *Estimation of the second derivatives on the boundary for surfaces evolving under the action of their principal curvatures*, St. Petersberg Math. J. **2** (1998), 199–217.

[15] J.B. Keller, *Electrohydrodynamics I. The equilibrium of a charged gas in a container*, J. Rational Mech. Anal. **5** (1956), 715–724.

[16] ———, *On solutions of $\Delta u = f(u)$*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 503–510.

[17] N.J. Korevaar, *A priori interior gradient bounds for solutions to elliptic Weingarten equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **4** (1987), 405–421.

[18] N.V. Krylov, *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Reidel, Dordrecht, 1987.

[19] J.M. Lasry and P.L. Lions, *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints. I. The model problem*, Math. Ann. **283** (1989), 583–630.

[20] A.C. Lazer and P.J. McKenna, *On a problem of Bieberbach and Rademacher*, Nonlinear Anal. **21** (1993), 327–335.

[21] ———, *Asymptotic behavior of solutions of boundary blowup problems*, Differential Integral Equations **7** (1994), 1001–1019.

[22] ———, *On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, J. Math. Anal. Appl. **197** (1996), 341–362.

[23] C. Loewner and L. Nirenberg, *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*, Contributions to Analysis (A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York, 1974, pp. 245–272.

[24] R. Osserman, *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$, Pacific J. Math. **7** (1957), 1641–1647.

[25] H. Rademacher, *Einige besondere Probleme partieller Differentialgleichungen*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I, Second edition, Rosenberg, New York, 1943, pp. 838–845.

[26] P. Salani, *Boundary blow-up problems for Hessian equations*, Manuscripta Math. **96** (1998), 281–294.

[27] K. Takimoto, *Solution to the boundary blowup problem for* k*-curvature equation*, to appear in Calc. Var. Partial Differential Equations.

[28] N.S. Trudinger, *The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **111** (1990), 153–179.

[29] J.I.E. Urbas, *On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures*, Math. Z. **3** (1990), 355–372.