数理解析研究所講究録
1500 巻 2006 年 1-25

正則化無限積と正則化行列式

無所属（元信州大学）　浅田　明 (ASADA Akira)
Freelance Mathematician (Former; Sinsyu University)

平成 18 年 3 月 23 日

概要

「Hilbert 空間の「極座標」と spectral zeta 関数の特殊値」講究禄 1260(2002), 105-125, 「スケーリング変換のヤコビアンの正則化」講究禄 1408(2004), 20-39 の基礎的部分の精密化を試みる。Hilbert 空間 H と Scatten 級非退化正値作用素 G との組 $\{H,G\}$, $\zeta(G,s)=\mathrm{tr}(G^s)$ は $s=0$ で正則、を考え　$\zeta(G,0)=\nu$, $\zeta(G,s)$ の最初の極の位置 d とする。$Ge_n=\mu_ne_n$, $e_\infty=\sum_n\mu_n^{d/2}e_n$　とし $H^\natural=H\oplus\mathbb{R}e_\infty$ とする。この空間（とその複素化）では　$\zeta(G,s)$ を用いた正則化で、初等微積の計算が出来る。ここでは $H^\natural$ の初等関数　特に座標関数の無限積や行列式（Jacobian）などの正則化を扱う。これらは Paycha の正則化 trace と同じ考えである ([12])。また $(\infty-p)$-次微分形式の外微分の正則化も正則化 trace として表されること 正則化 Laplacian は正則化外微分から導かれることを示す。

Compact 多様体上の楕円形作用素 D の Green 作用素 G のように $s=0$ で $\zeta(G,s)=\mathrm{tr}G^s$　が正則になる G を用いた ζ-正則化を使って Hilbert 空間 H での計算に表れる発散を処理する技法は　Hilbert 空間の Laplacian や Dirac 作用素の正則化やその固有値　「球面」の正則化体積要素や「体積」　正則化 Cauchy 核等の計算や　物理学者による Gauss 型経路積分の計算の正当化等に使われてきた ([3],[4],[5],[6])。

此処ではその基礎的部分の若干の手直しを含む精密化を行い　幾分まとまりがないが　以下のような話題を扱う。

1. 正則化の計算を行う場所として　以前の $H^-(finite)$ を修正して　空間 $H^\natural=H\oplus\mathbb{K}e_\infty$ を導入した (§1). この空間の内積には $\zeta(G,s)$ の最初の極での留数が表れる。H に「経度」を付け加えた空間 $\hat{H}$ と $H^\natural$ が　本質的に同一である (§2)。
2. G が Dirac 作用素の Green 関数のように正負とも　無限の固有値を持つときには H に polarization 以外に Fredholm 構造　Cuntz 構造と呼ぶ構造が入る。これらは平坦な多様体の幾何学に利用できる可能性がある (§3, §10)。

3. H の初等関数の正則化: 基本対称式は 1 次の基本対称式 $\sigma_1(x_1,\dots)=\sum_n x_n$ が正則化できれば 総て正則化出来る (§4)。
4. 無限積の正則化 : $\prod_n x_n$: と 正則化行列式 $det_G T = e^{\mathrm{tr}G^s \log t}|_{s=0}$:
   これらと Paycha の 正則化 trace とは 本質的に同じである (§5, §6)。

§7-§10 では これらを 正則化無限積分 (§7)、無限次の元を含む微分形式 (§8) に応用する。特に正則化無限積分 $\int_D f : d^\infty x :$ については scaling 変換 I_a; $I_a e_n = a_n e_n$, $a=(a_1,a_2,\dots)$ についての変数変換の公式

$$\int_D f : d^\infty x := \int_{I_a D} | : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : |^{-1} I_a^\sharp f : d^\infty y :, \quad y_n = a_n x_n,$$

から $f=\prod_n f_n(x_n)$, $f_n \geq 0$, $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = c_n$, のとき

$$\int_D f : d^\infty x :=: \prod_{n=1}^{\infty} a_n :, \quad D=\{\sum_n x_n e_n | a_n \leq x_n \leq b_n\} \subset H^\natural,$$

を導く。Gauss 型経路積分の公式 $\int e^{-\pi(x,Dx)}\mathcal{D}x = \dfrac{1}{\sqrt{detD}}$ はこれから従う。

正則化無限積分の変数変換の公式から W^k 上の無限次の元を含む微分形式は 加群として $Gr(W^{-k,\natural}) \oplus Gr(W^{k,\natural}) detG$ となる。これから $(\infty-p)$-次の微分形式に対する外微分の正則化が 正則化 trace として与えられる (§9)。最後の §10 で これらの定義・結果を 写像空間などの Soborev 多様体に拡張する問題について触れる (cf.[2])。

1 Hilbert 空間と Schatten 級作用素の組

$\{H,G\}$ を Hilbert 空間 H とその上の非退化対称 Schatten 級作用素 G で、その spectre ζ 関数 $\zeta(G,s)=\mathrm{tr}(G^s)$ が原点で正則なものとの組とする (cf.[8])。$H=L^2(X)$, X は compact Riemann 多様体 G は X の Laplacian (+mass term) の Green 関数 とすればこの仮定を満たす。この G は正値作用素だが X が compact spin 多様体のとき X の 2 乗可積分な spinor 場の Hilbert 空間を H,G を X の Dirac 作用素 $\not{D}$(+mass term) の Green 関数とすれば G が正でないこのような組の例になる。

G が正定値のとき $\zeta(G,0)=\nu$, $\zeta(G,s)$ の最初の極の位置を d, そこでの $\zeta(G,s)$ の留数を c とする。ν は G の固有値の数を数えているので、H の次元の正則化である。また G が compact 多様体 X の楕円形作用素の Green 関数のとき $d=\dim.X/\mathrm{ord}.D$ である。

H の完備正規直交系は G の固有関数 $e_1, e_2, \ldots; Ge_n = \mu_n e_n$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots > 0$ に固定する。$x = \sum_n x_n e_n$ のとき x の座標を $(x_1, x_2, \ldots)$, とする。

$x \in H$ に Soborev norm $\|x\|_k = (G^{-k/2}x, G^{-k/2}x)$ をいれ、それから得られる Soborev 空間を W^k とする。W^k の完備正規直交系は $e_{1,k}, e_{2,k}, \ldots$, $e_{n,k} = \mu_n^{k/2} e_n$ である。$x = \sum_n x_{n,k} e_{n,k} \in W^k$ のとき W^k の元としての x の座標を $(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots)$, とする。$x \in H \cap W^k$ であれば $x_{n,k} = \mu_n^{-k/2} x_n$ である。

Soborev 空間の定義から $e_{1,k}, e_{2,k}, \ldots,$ の和として表される元

$$e_{\infty,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_{\infty,k},$$

を考えれば $e_{\infty,k} \in W^l$, $e_{\infty,k} \notin W^k$ である (cf.[10])。

定義　1. 空間 $W^{k,\natural}$ を

$$W^{k,\natural} = W^k \oplus \mathbb{K} e_{\infty,k}, \tag{1}$$

$\mathbb{K}$ は H が実なら実数体　複素なら複素数体、で定義する。

位相を考えなければ $W^{k,\natural} \subset W^l$, $l < k$ である。定義から $x \in W^{k,\natural}$ は

$$x = x_f + te_{\infty,k}, \quad x_f \in W^k,$$

と一意的に書ける。従って $x \in W^{k,\natural}$ は

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f,n} e_{n,k} + te_{\infty,k} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{f,n} + \mu_n^{d/2} t) e_{n,k},$$

と 2 種類の座標表示がある。

$W^{k,\natural}$　は次で定義するように Hilbert 空間と見るが　この 2 番目の「座標表示」は Hilbert 空間としては正しくなく、$W^{k-0} = \cap_{l<0} W^l$ の部分空間と見たときのものである。その意味では W^{k-0} の部分空間と見たときの $W^k \oplus \mathbb{K} e_{\infty,k}$ は $W^{k,\sharp}$ 等　別の記号で書いて区別したほうが良いが　簡単のため　以下では区別しない。

定義　2. $x = x_f + te_{\infty,k}$, $y = y_f + ue_{\infty,k}$ の内積を

$$\langle x, y \rangle_k = \lim_{s \downarrow 0} (x_f + \sqrt{s} G^{s/2} te_{\infty,k}, y_f + \sqrt{s} G^{s/2} ue_{\infty,k})_k, \tag{2}$$

で定義する。

W^k での内積 $(x, y)_k$ と書けば

$$(\sqrt{s} G^{s/2} e_{\infty,k}, \sqrt{s} G^{s/2} e_{\infty,k})_k = s \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{s+d} = s\zeta(s+d),$$

だから $\lim_{s\downarrow 0}(\sqrt{s}G^{s/2}e_{\infty,k},\sqrt{s}G^{s/2}e_{\infty,k})_k = c$ となって

$$\langle e_{n,k}, e_{m,k}\rangle_k = \delta_{n,m}, \quad \langle e_{n,k}, e_{\infty,k}\rangle_k = 0, \quad \langle e_{\infty,k}, e_{\infty,k}\rangle_k = c, \tag{3}$$

である。従って W^k を $W^{k,\natural}$ の部分空間とみれば（この内積で）W^k と $\mathbb{K}e_{\infty,k}$ は　直交する。

W^k と W^{-k} は　Soborev 双対だが

$$\langle e_{\infty,k}, e_{\infty,-k}\rangle = \lim_{s\downarrow 0}(\sqrt{s}e_{\infty,k+s}, \sqrt{s}e_{\infty,-k+s}) = c,$$

として $W^{k,\natural}$ と $W^{-k,\natural}$ との間の Soborev 双対を定義できる。

2　極座標と「経度」

H が実 Hilbert 空間の時　その極座標は $\|x\| = r$ として

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \quad x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \dots, \\ x_n &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n, \dots, 0 \le \theta_i \le \pi,\ i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

で与えられる。$r_n = \sqrt{\sum_{m=n}^{\infty} x_m^2}$ とおけば $\cos\theta_n = \dfrac{x_n}{r_n}$, $r_1 = r$ である。この座標は緯度だけあって、経度は無い。また緯度変数は

$$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_n,$$

だから独立ではなく 制約

$$\lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n = 0, \tag{4}$$

を満たす。従って $x \in H$ の極座標を $(r, \theta_1, \theta_2, \dots)$, とすれば　座標が $(r, \pi/2, \pi/2, \dots)$ となる点は H には無い。

この制約をはずし　変数

$$t_\infty = \lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n = \prod_{n=1}^{\infty}\sin\theta_n, \tag{5}$$

を導入し　「経度」ϕ, $0 \le \phi < 2\pi$ と変数 y, z を

$$y = rt_\infty\cos\phi, \quad z = rt_\infty\sin\phi, \tag{6}$$

で定義する。この変数を用いて　H に「経度」を付け加えた空間を

$$\tilde{H} = \{(x, y, z) | x \in H\} \cong H \oplus \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

$$\hat{H} = \{(x, y, z) | \phi = 0, \pi\} \cong H \oplus \mathbb{R}, \tag{8}$$

とする。$\hat{H}$ （の球面）は $\tilde{H}$ （の球面）の Greenwitch 子午線である。

W^k にも同様に動径・緯度を $r_k, \theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \dots,$ として極座標を導入する。$k<0$ であれば $e_\infty \in W^k$ だから　その W^k での極座標を $r(k), \theta_n(k)$ また　$r_n(k)$ も r_n と同様に定義する。定義から $\lim_{-k\downarrow 0} r_n(k) = \infty$ である。従って $\lim_{-k\downarrow 0}\cos\theta_n(k) = 0$ となって、

$$\lim_{-k\downarrow 0}\theta_n(k) = \frac{\pi}{2},\ n = 1, 2, \dots \tag{9}$$

である。他方　$r_k^2 = \zeta(G, -k)$ だから　$\lim_{-k\downarrow 0}\sqrt{-k}r(k) = \sqrt{c}$ となる。従って $\rho : H^\natural \to \hat{H}$ を

$$\rho(x, te_\infty) = (x, t\sqrt{c}t_\infty), \tag{10}$$

で定義すれば $\rho : H^\natural \cong \hat{H}$ である。　またこの意味で e_∞ の極座標は $(\sqrt{c}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots)$ となる。

なお　より精密には $r_{\mathbf{n}} = \sqrt{\sum_{m\geq n} x_m^2}$ とすれば $\cos\theta_n = \frac{x_n}{r_{\mathbf{n}}}$ となることと $x = G^{k/2}e_\infty,\ k>0,$ については　その極座標を $(r_n(k), \theta_1(k), \theta_2(k), \dots),$ として

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{n}}(k)^2 &= \frac{c}{k} + (c_0 - (\mu_1^{d+k} + \cdots + \mu_{n-1}^{d+k})) + O(k), \\ \zeta(G, d+k) &= \frac{c}{s} + c_0 + O(s), \end{aligned}$$

となることから

$$\cos^2\theta_n(k) = \frac{\mu_n^{d+k}}{r_n(k)^2} = \frac{s}{k}\big(1 - \frac{c_0 - (\mu_1^{d+k} + \cdots + \mu_{n-1}^{d+k})}{c}s + O(s^2)\big),$$

となって $\lim_{k\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{s}}\cos\theta_n(k) = \sqrt{\frac{\mu_n^d}{c}}$ となり

$$\theta_n(k) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\mu_n^d}{c}}\sqrt{k} + O(s), \quad k\downarrow 0,$$

である。

3　Fredholm 構造と Cuntz 構造

この節では　G の正固有空間 H_+, 負固有空間 H_- がともに無限次元とする（G が Dirac 作用素の Green 作用素の場合等）。このときは $\zeta(G, s)$

のほか $\eta(G,s) = tr(G|G|^{s-1})$ も $s=0$ で正則とする。G が compact spin 多様体の Dirac 作用素の Green 作用素の時　この仮定は満たされる。

$$G|G|^{-1} = J = P_+ - P_-,$$

とおく。J は H の polarization であり　$P_\pm$ は $H_\pm$ への射影である。

定義　3．等距離作用素 $\mathcal{F}: H_+ \to H_-$, $\mathcal{F}^\dagger: H_- \to H_+$ が与えられたとき $\{H,G\}$ は Fredholm 構造 $\mathcal{F}$ を持つ　という。

定義　4．H から $H_\pm$ への等距離作用素 $s_1: H \to H_+$, $s_2: H \to H_-$ が与えられれば $\{H,G\}$ は Cuntz 構造 $\{s_1, s_2\}$ を持つ　という。

定義から　s_1, s_2 は

$$s_1^\dagger s_1 = s_2^\dagger s_2 = I, \quad s_1 s_1^\dagger + s_2 s_2^\dagger = I,$$

を満たすから Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ の生成元になる。従って $\{s_1,s_2\}$ は Cuntz 環の表現を与える。また $s_2 s_1^\dagger: H_+ \to H_-$, $(s_2 s_1^\dagger)^\dagger = s_1 s_2^\dagger: H_- \to H_+$ だから $\{H,G\}$ が　Cuntz 構造をもてば　それから $\mathcal{F} = s_2 s_1^\dagger$ として Fredholm 構造が導かれる。しかし逆はいえない。また同じ Fredholm 構造を与える異なる Cuntz 構造が存在する。Fredholm 構造　Cuntz 構造の同値は H の unitary 作用素による unitary 同値で定義する ([1],[9])。

G_+ と G_- が同じ固有値を持つとき G を　対称と呼ぶ。このとき　$G_- = \mathcal{F}G_+\mathcal{F}^\dagger$ となる Fredholm 構造ー対称な Fredholm 構造と呼ぶーが存在する。

例.　X を半径 a の円とし $G = G_n$ を

$$e^{-i\frac{2n+1}{2a}t}\frac{1}{i}\frac{d}{dt}e^{i\frac{2n+1}{2a}t} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \frac{2n+1}{2a}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

の Green 関数とすれば 固有値は $\{\frac{2m+1}{2a}|m \in \mathbb{Z}\}$ だから　対称である。
この場合定数項　$n\ (n/a)$ は　固有値には影響しないが固有関数には影響する。

W^k も同様に $W_+^k \oplus W_-^k$ と分解される。$\{H,G\}$ が Fredholm 構造 $\mathcal{F}$・Cuntz 構造 $\{s_1,s_2\}$ をもつとき　それらは $W_+^k \to W_-^k$, $W^k \to W_\pm^k$ の等距離作用素をあたえる。

$G_\pm$ の固有値・固有ベクトルを $\mu_{n,\pm}$, $e_{n,\pm}$; $G_\pm e_{n,\pm} = \mu_{n,\pm}e_{n,\pm}$, $\mu_{1,\pm} \geq \mu_{2,\pm} \geq \ldots > 0$, とする。$x = \sum_n x_{n,\pm}e_{n,\pm} \in H_\pm$ のとき　$x \in H_\pm$ の座標は $(x_{1,\pm}, x_{2,\pm}, \ldots)$, とする。この場合 $\mathcal{F}e_{n,+} = e_{n,-}$ と $\mathcal{F}$ を与えるのが

(固有ベクトルの選び方や順番に関係するが）標準的な Fredholm 構造である。それにたいし、Cuntz 構造は　例えば

$$\begin{aligned} s_1(e_{2n-1,+}) &= e_{n,+}, \quad s_1(e_{2n}) = e_{n,-}, \\ s_2(e_{2n-1,-}) &= e_{n,+}, \quad s_2(e_{2n}) = e_{n,-}, \end{aligned}$$

と与えることが出来るが　これは標準的ではない $(s_1(e_{2n-1,+}) = e_{n,-}, \dots,$ としても良い)。

G, $|G|$ の η-関数、ζ-関数を $\eta(G,s)$, $\zeta(|G|,s) = \zeta(G^2, s/2)$ とし

$$\zeta(G_\pm, s) = \frac{\zeta(|G|,s) \pm \eta(G,s)}{2},$$

とすれば　$\zeta(G_\pm, s) = \sum_n \mu_{n,\pm}^s$ である。定義から　特に G が対称であれば　$\zeta(G_+,s) = \zeta(G_-,s)$ である。

G の ζ-関数 $\zeta(G,s)$ は

$$\zeta_\pm(G,s) = \zeta(G_+,s) + e^{\pm i\pi s}\zeta(G_-,s),$$

と２種ある。G が　対称のときは

$$\zeta_\pm(G,s) = (1+e^{\pm i\pi s})\zeta_+(G,s), \quad \zeta_\pm(G,n) = 0, \ n \in \mathbb{Z},$$

となる。

$\zeta(G_\pm,s)$ の最初の極は　ともに d であるとする。このとき $\zeta(G_\pm, 0) = \nu_\pm$, d での留数を $c_\pm$ とすれば

$$\nu = \zeta_\pm(G,0) = \nu_+ + \nu_-, \quad \mathrm{Res}_{s=d}\zeta_\pm(G,s) = c_+ + e^{\pm i\pi d}c_-,$$

である。d が整数のとき（G が compact spin 多様体 X 上の Dirac 作用素の Green 作用素のときは $d = \mathrm{dim}X$）

$$\mathrm{Res}_{s=d}\zeta_\pm(G,s) = c_+ + (-1)^d c_-,$$

となる。従って一般には　$\mathrm{Res}_{s=d}\zeta_+(G,s) \neq \mathrm{Res}_{s=d}\zeta_-(G,s)$ である。

$e_{\infty,\pm} = \sum_{n=1}^\infty \mu_{n,\pm}^{d/2} e_{n,\pm}$ として $H_\pm^\natural$ を G が正定値のときの $H^\natural$ と同様に定義する。$W_\pm^{k,\natural}$ も同様に定義される。この場合

$$H^\natural = H_+^\natural \oplus H_-^\natural, \quad W^{k,\natural} = W_+^{k,\natural} \oplus W_-^{k,\natural}, \tag{11}$$

とする。H の正規直交系は　$\{e_{n,\pm} | n = 1,2,\dots\}$, W^k の正規直交系は $e_{n,\pm,k} = \mu_{n,\pm}^{k/2} e_{n,\pm}$ として $\{e_{n,\pm,k} | n = 1,2,\dots\}$ である。$\|e_{\infty,\pm}\| = \sqrt{c_\pm}$ だから

$$\hat{\mathcal{F}}(x) = \mathcal{F}x, \ x \in H_+, \quad \hat{\mathcal{F}}e_{\infty,+} = \sqrt{\frac{c_-}{c_+}}e_{\infty,+},$$

として $\{H,G\}$ の Fredholm 構造 $\mathcal{F}$ は $\{H^\natural, g\}$ の Fredholm 構造 $\hat{\mathcal{F}}$ に拡張される。しかし Cuntz 構造は自然な拡大を持たない。

注意. $G=G_+-G_-$ のとき $|G|=G_++G_-$ である。$\{H,|G|\}$ から作った e_∞ を $e_{\infty,|G|}$ とすれば $e_{\infty,|G|}=e_{\infty,+}+e_{\infty,-}$ だから

$$H\oplus\mathbb{K}e_{\infty.|G|}=H\oplus\mathbb{K}(e_{\infty,+}+e_{\infty,-})\subset H^\natural,$$

である。

4 H の初等関数とその正則化

H の上では簡単な初等関数 例えば $f(x)=\sum_n x_n;\ x=(x_1,x_2,\dots)$ も多くの点で発散し 定義できない。$\{H,G\}$ では $\sum_n x_n$ の正則化として

$$:\sum_{n=1}^\infty x_n:=:\sum_{n=1}^\infty x_n:_G=\sum_{n=1}^\infty \mu_n^s x_n|_{s=0}, \tag{12}$$

を用いる。$:\sum_n x_n:$ が $H^\natural$ で定義されるには $\zeta(G,s)$ が $s=d/2$ で正則なことが 必要十分である。

例. $\mu_n=\dfrac{1}{n}$ とする。$x(c)=(x(c)_1,x(c)_2,\dots), x(c)_n=\dfrac{1}{n^c}$, とすれば $x(c)\in H$, $c>1/2$ だが $\sum_n x(c)_n$ は $c\le 1$ で発散する。しかし

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\frac{1}{n^c}=\zeta(s+c),$$

だから $:\sum_n x(c)_n:$ は $1/2<c<1$ でも存在する。

$G=G_+-G_-$ のときは $:\sum_n x_n:_G$ の定義は

$$:\sum_{n=1}^\infty x_{n,+}:+:\sum_{n=1}^\infty x_{n,-}:,\quad :\sum_{n=1}^\infty x_{n,\pm}:=\sum_{n=1}^\infty \mu_{n,\pm}^s x_{n,\pm}|_{s=0}, \tag{13}$$

とする。従って $:\sum_n x_n:_G$ の存在と $:\sum_n x_n:_{|G|}$ の存在は同値である。

定義 5. τ を不定元とし $x_1,x_2,\dots$ の n-次基本対称式の正則化 $:\sigma_n(x_1,x_2,\dots):$ を

$$\begin{aligned}
:\prod_{n=1}^\infty(1+\tau x_n): &= \prod_{n=1}^\infty(1+\mu_n^s\tau x_n)|_{s=0},\\
:\prod_{n=1}^\infty(1+\tau x_n): &= 1+\sum_{n=1}^\infty :\sigma_n(x_1,x_2,\dots):\tau^n,
\end{aligned} \tag{14}$$

で定義する。

$:\sigma_1(x_1, x_2, \ldots) :=: \sum_n x_n :$ だが

$$\log\bigl(\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s \tau x_n)\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\mu_n^s\tau x_n)$$
$$= (\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s x_n)\tau - \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{2s}x_n^2)\tau^2 + \cdots,$$

で　この第２項以後は $(x_1, x_2, \ldots) \in H$ だから $s=0$ まで解析接続可能だから $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s\tau x_n)$ は $\sum_n \mu_n^s x_n$ が $s=0$ まで　解析接続可能なら $s=0$ まで　解析接続可能である。よって

命題１．　$:\sum_n x_n:$ が　存在すれば　総ての n について $x_1, x_2, \ldots$ の基本対称式の正則化 $:\sigma_n(x_1, x_2, \ldots)$ が存在する。

注意１.　定義５　で扱われる基本対称式は $\sigma_\infty(x_1, x_2, \ldots)$ に当たる総ての変数の積 $\prod_n x_n$ は含まない。$\prod_n x_n$ の正則化は次節で扱う。

注意２. Scaling 変換 I_a; $I_a e_n = a_n e_n$, $a = (a_1, a_2, \ldots)$, を使えば

$$:\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \mathrm{tr}(G^s I_a)|_{s=0}, \tag{15}$$

である。従って　正則化基本対称式等は Paycha の正則化 trace ([7][12]);

$$\zeta - \mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}_G(T) = \mathrm{tr}(G^s T)|_{s=0},$$

T は H の線形作用素、を用いて表される。

H や $H^\natural$ での初等関数の他の例としては　正則化 Laplacian : $\triangle$:;

$$:\triangle: f = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}|_{s=0},$$

の周期的境界条件

$$f|_{x_n=-\mu_n^{d/2}} = f|_{x_n=\mu_n^{d/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=-\mu_n^{d/2}} = \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=\mu_n^{d/2}},$$

の固有関数

$$\prod_n f_n(x_n), \quad f_n(x_n) = \sin(N_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n),\ or\ \cos(N_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n),$$

がある ([3])。ここで N_n は整数で $\lim_{n\to\infty} N_n = N_\infty$ が存在するものとし $\zeta(G,s)$ は $s=-d/2$ で正則とする。

H では　この無限積は　有限個を除いて $f_n(x_n) = \cos(N_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ と成らなければ 0 となる。$\prod_{n=1}^{\infty}\cos(N\mu_n^{-d/2}\pi x_n^2)$ は $x=0$ の近傍で

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos(N\mu_n^{-d/2}\pi x_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2}(N\mu_n^{-d/2}x_n)^2+\cdots),$$

だから $x \in W^d$ であれば無限積として収束する (0 でない値を取る)。また $H^\natural$ では　その他に有限個を除いて $f_n(x_n) = \sin(N_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ となるものが意味がある。

$H^\natural$ では　無限積　$\prod_n \cos(N\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ は $W^d + \frac{m}{N}\pi e_\infty,\ m \in \mathbb{Z}$ で、無限積　$\prod_n \sin(N\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ は $W^d + (\frac{m}{N}+\frac{1}{2})\pi e_\infty$ で 0 でない値をとる。ただし次節で述べるように　$(-1)^\infty$ を $(-1)^\nu$ と正則化する。

5　正則化無限積

定義　6．複素数列 $z_1, z_2, \ldots$ が Agmon angle θ を持つとき $z_1, z_2, \ldots$ の G と θ に関する正則化無限積 : $\prod_n z_n :_{G,\theta}$ を

$$:\prod_{n=1}^{\infty} z_n := \prod_{n=1}^{\infty} z_n^{\mu_n^s}|_{s=0}, \quad \theta < \mathrm{Arg}.z_n < \theta + 2\pi,$$

で定義する。

例. G の Ray-Singer 行列式 $detG = e^{\zeta'(G,0)}$ は

$$e^{\zeta'(G,s)} = e^{\sum_n \log\mu_n \mu_n^s} = \prod_{n=1}^{\infty}\mu_n^{\mu_n^s},$$

だから　G の固有値の正則化無限積　$:\prod_n \mu_n :_G$ である。

命題 2. 定義から　正則化無限積は　各変数について線形であり　次の式が成り立つ。

$$|:\prod_{n=1}^{\infty} x_n :| \;=\; :\prod_{n=1}^{\infty}|x_n| :,\ x_1, x_2, \ldots, \in \mathbb{R} \tag{16}$$

$$:\prod_{n=1}^{\infty}(cx_n): \;=\; c^\nu :\prod_{n=1}^{\infty} x_n :. \tag{17}$$

注意　1.　ν が整数でなければ　(17) での c^ν は Agmon angle のとり方に関係する。

注意 2. $;\prod_n x_n:$ は 各変数 $x_n,\ n=1,2,\ldots$ について線形だから

$$\frac{\partial^p}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}:\prod_{n=1}^{\infty}x_n:=:\prod_{n\notin\{i_1,\ldots,i_p\}}x_n:,$$

となる。しかし 通常の意味では

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}:\prod_{n=1}^{\infty}x_n:=1,$$

は 成立しない。適当な弱位相の意味で これが成立するような関数空間の元にたいしては 正則化無限積分が定義できる（７節）。

また $x_1,x_2,\ldots,\ y_1,y_2,\ldots,\ x_1y_1,x_2y_2,\ldots$ に共通の Agmon angle がとれるときには $(x_ny_n)^{\mu_n^s}=x_n^{\mu_n^s}y_n^{\mu_n^s}$ となることから

$$:\prod_{n=1}^{\infty}x_ny_n:=:\prod_{n=1}^{\infty}x_n::\prod_{n=1}^{\infty}y_n:, \tag{18}$$

も成立する。

$x=x_f+te_{\infty,k}\in W^{k,\natural},\ t\neq 0$ であれば $x=\sum_n x_ne_{n,k},\ x_n=x_{f,n}+\mu_n^{d/2}t$ として $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Arg}x_n=\mathrm{Arg}t$ だから $x_1,x_2,\ldots$ は Agmon angle を持つ。また

$$\prod_{n=1}^{\infty}x_n^{\mu_n^s}=t^{\zeta(G,s)}\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n^{\mu_n^s(d/2)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x_{f,n}}{\mu_n^{d/2}t})^{\mu_n^s},$$

であり この左辺第３項の無限積は $\Re s$ が十分大きければれば $\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n^s x_{f,n}|$ が収束するので 収束する。従って正則化無限積、$:\prod_{n=1}^{\infty}x_n:$ が定義でき、$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s x_{f,n}$ が $s=0$ まで 解析接続できれば その値が存在し

$$:\prod_{n=1}^{\infty}x_n:=t^{\nu}(detG)^d\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x_{f,n}}{\mu_n^{d/2}t})^{\mu_n^s}|_{s=0}, \tag{19}$$

となる。最後の無限積は

$$\begin{aligned}\log(\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x_{f,n}}{\mu_n^{d/2}t})^{\mu_n^s})&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s\log(1+\frac{x_{f,n}}{\mu_n^{d/2}t})\\&=\ t(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s(\mu_n^{-d/2}x_{f,n}))-\frac{t^2}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s(\mu_n^{-d/2}x_{f,n})^2+\cdots,\end{aligned}$$

で この第２項以下は $x_f\in W^d$ のとき $s\to 0$ で収束するから第１項が解析接続されれば 解析接続できる。従って 次の命題を得る。

命題 3. $x_f \in W^d$ のとき 正則化無限積 $:\prod_n x_n:$ が存在するためには scaling 作用素 $I_{x_f};\ I_{x_f}e_n = x_{f,n}e_n$ に対して Paycha の意味での正則化 trace

$$\zeta - \mathrm{tr} I_{x_f} = \mathrm{tr}(G^s I_{x_f})|_{s=0},$$

が存在することが必要十分である。。

$x = x_f + te_{\infty,k} = \sum_n x_n e_{n,k}$ にたいし、$\check{x} = te_{\infty,k} - x_f = \sum_n \check{x}_n e_{n,k}$ とすれば

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \check{x}_n^{\mu_n^s} = t^{2\zeta(G,s)} \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\mu_n^s d} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x_{f,n}^2}{\mu_n^d t^2})^{\mu_n^s},$$

だから ν が整数のとき $:\prod_n x_n:$ は $W^{k,\natural}$ の稠密な部分空間 $W^{(k+d)/2} \oplus \mathbb{C}e_{\infty,k}$ で 解析的である。しかし正則化無限積は W^k の元（$t=0$ となる元）にたいしては定義できない（W^k は関数 $:\prod_n x_n:$ の特異点集合になる)。また ν が整数でなければ 関数 $:\prod_n x_n:$ は 多価である（Cauchy 核などは定義できない ([6]))。

注意. $x \in W^{k,\natural}$ を $\sum_n x_{n,k} e_{n,k}$ と書くのは 正しくは $W^k \oplus \mathbb{K}e_{\infty,k} \in \cap_{l<k} W^l$ と見たときの表示だから $:\prod_n x_:$ は $W^{k,\sharp}$ の関数と見たほうが良い。しかし $:\prod_n x_n:$ は 数列 $x_1, x_2, \ldots$ の位相によらないから 以下ではこの区別はしない。

$x \in W^{k,\natural}$ に対し scaling 変換 $I_x;I_x e_n = x_n e_n$ を作れば Paycha の正則化 trace を用いて

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n :_G = e^{\mathrm{tr} G^s \log I_x}|_{s=0},$$

となる。またこれから G が正でなくても

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n :_G = :\prod_{n=1}^{\infty} x_n :_{|G|},$$

である。

注意 1. $G = G_+ - G_-$ のとき $x_\pm \in W_\pm^{k,\natural}$ に対し $:\prod_n x_{n,\pm} :_{G_\pm}$ が定義され

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_{n,+} \prod_{n=1}^{\infty} x_{n,-} :_G = (:\prod_{n=1}^{\infty} x_{n,+} :_{G_+})(:\prod_{n=1}^{\infty} x_{n,-} :_{G_-}),$$

である。Gが対称であれば　(18)から

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_{n,+} :: \prod_{n=1}^{\infty} x_{n,-} :=: \prod_{n=1}^{\infty} x_{n,+} x_{n,-} :,$$

も成立する。

注意 2. $: \prod_n x_n :_G$は　W^kに独立な2つのベクトル$e_{\infty,+,k}, e_{\infty,-,k}$を添加した空間$W^{k,\natural}$で定義されるが　$: \prod_n x_n :_{|G|}$は　W^kに$e_{\infty,+,k}+e_{\infty,-,k}$を添加した空間で　定義できる。

6 正則化行列式

定義　7. $\log T = S; e^S = T$が存在するとき　TのGに関する正則化行列式$det_G T$を

$$det_G T = e^{\mathrm{tr} G^s S}|_{s=0}, \tag{20}$$

で　定義する。

$\mathrm{tr} G^s S|_{s=0}$はPaychaのζ-regularized traceである。　特に$T = I_a$: $I_a e_n = a_n e_n$であれば$\log I_a = I_{\log a}$; $\log a = (\log a_1, \log a_2, \ldots)$, だから

$$e^{\mathrm{tr} G^s \log I_a} = e^{\sum_n \mu_n^s \log a_n} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n^{\mu_n^s},$$

となって

$$det_G I_a =: \prod_{n=1}^{\infty} a_n :_G, \tag{21}$$

である。$(a_1, a_2, \ldots)$のAgmon angleを定めることは$\log I_a$を定めることに当たる。特に

$$det_G(tT) = t^\nu det_G T, \quad det_G(tI) = t^\nu,$$

である。一般に$T = I_a + N$, $NI_a = I_a N$, $(Ne_n, e_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots,$であれば

$$det_G T =: \prod_{n=1}^{\infty} a_n :_G, \tag{22}$$

である。従って$T = I_x$, $S = I_y$であれば(18)から

$$det_G TS = det_G T det_G S,$$

が成立する。また

$$det_G T = det_{|G|} T,$$

も成立する。しかし $\log ST = \log S + \log T$ と取れ　$[\log S, \log T] = 0$ であっても $[G^s \log T, G^s \log T]$ は　必ずしも 0 でないので、$det_G ST = det_G S det_G t$ は必ずしも成立しない。

また　T が　正でなければ　$\log T$ は一意でないので、$det_G T$ は一般には一意には決まらない。たとえば Dirac 作用素 $D\!\!\!/$ の行列式は

$$det D\!\!\!/ = e^{\pm\nu_- \pi i} det|D\!\!\!/|,$$

だから ν_- が整数でなければ一意ではない。

命題 4. T が trace 級なら　通常の $det(I+T)$ (cf.[13]) に一致する $det_G(I+T)$ が存在する。

証明. $\|ct\| < 1$ となるよう c をとれば

$$\log(I+cT) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(cT)^n}{n},$$

が収束し trace class になる。このとき

$$e^{\mathrm{tr}(G^s \log(I+cT))}|_{s=0} = e^{\mathrm{tr}(\log(I+cT))},$$

だから　これを c について解析接続すれば　$det_G(I+T)$ は普通に定義されている $I+T$ の行列式と一致し　命題が成立する。

注意.　$\|T\| < 1$ であっても H が複素 Hilbert 空間なら　例えば

$$\log(I+T) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{T^n}{n} + 2N\pi i I = \mathrm{Log}(I+T) + 2N\pi i I,$$

と　とれば

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{tr} G^s \log(I+T)}|_{s=0} &= e^{\mathrm{tr} G^s \mathrm{Log}(I+T)}|_{s=0} e^2 N\pi i \zeta(G,s)|_{s=0} \\ &= det(I+T) e^{2N\nu\pi i}, \quad det(I+T) = e^{\mathrm{trLog}(I+T)}, \end{aligned}$$

だから ν が整数でなければ $det_G(I+T)$ は一意ではない。

なお G の Ray-Singer 行列式は

$$\zeta'(G,s) = \mathrm{tr}(G^s \log G),$$

だから $det_G G$ と一致する。同様に G が D の Green 作用素であれば　D の Ray-Singer 行列式も $det_G D$ と表される。

P が逆をもてば、$det_G PTP^{-1} = det_{P^{-1}GP} T$ だが　これと $det_G T$ は必ずしも一致しない。

例　G, T, P を

$$\begin{cases} Ge_{2n-1} = \frac{1}{n}e_{2n-1}, \\ Ge_{2n} = \frac{1}{n+1}, \end{cases} \quad \begin{cases} Te_{2n-1} = 3e_{2n-1}, \\ Te_{2n} = 2e_{2n}, \end{cases} \quad \begin{cases} Pe_{2n-1} = e_{2n}, \\ Pe_{2n} = e_{2n-1}, \end{cases}$$

とすれば

$$det_G T = 3^{\zeta(s)} 2^{\zeta(s)-1}|_{s=0}, \quad det_G PTP^{-1} = 2^{\zeta(s)} 3\ \zeta(s) - 1,$$

となって　それぞれ $1/2\sqrt{6}$, $1/3\sqrt{6}$ だから値は異なる。

$I + K$, K は compact の形の逆をもつ作用素全体の群を $\mathcal{K}$, G と可換な元の作る群を $\mathcal{C}_G$ とすれば $\mathcal{K}$ と $\mathcal{C}_G$ から生成される群に P がはいれば $det_G PTP^{-1} = det_G T$ となる。$\mathcal{K}$ は H の逆を持つ有界作用素の群 $GL(H)$ の正規部分群で　$GL(H)/\mathcal{K}$ は　無限次元 Grassmann 多様体の homotopy 型をもつ。$\mathcal{K}$ の稠密な部分群 $\mathcal{K}_{\mathrm{tr}} = \{I + K \in \mathcal{K}\}$; K は trace class では cohomology 環の生成元は

$$\mathrm{tr}(\overbrace{T^{-1}dT \wedge \ldots T^{-1}dT}^{2p-1}),$$

である。$GL(H)$ で　$T^{-1}dT$ の counter term $A(T) = T^{-1}\Theta(T)T$ が取れ ($T \in \mathcal{K}_{\mathrm{tr}}$ のときは $\Theta(T) = 0$), A^p が trace class になれば $A(T)$ （の曲率）から $GL(H)/\mathcal{K}$ の cohomology の生成元が Chern-Weil 構成と同様にえられる。なお Calkin 代数 $B(H)/\mathbf{I}$ は　この群の「Lie 環」とも解釈できる。

正則化行列式は　T が G と同時対角化されるときには　固有値の正則化無限積である。　一般の場合　T が $\mathcal{K}$ の元で　対角化できれば　同じ計算が可能だから　$\mathcal{K}$ の元で　対角化出来る（または scaling 作用素と一般冪零元の和と出来る）作用素のクラスを調べることが正則化行列式の計算のためには問題となる。

7　正則化体積要素と正則化無限次元積分

正則化無限次元積分は 適当な条件を満たす f に対し

$$\int f : d^\infty x := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1^{\mu_1^s} \cdots dx_n^{\mu_n^s}|_{s=0},$$

で定義される（正確には分数冪を定めるため Agmon 角を指定する必要があるが省略する)。この式は

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}(x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s})f(x)d^nx|_{s=0},$$

とも書ける から f が弱位相の意味で

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}:\prod_{n=1}^{\infty}x_n:=1,$$

を満たす関数空間に属する時には定義できる ([4])。

この積分は H ではなく $H^\natural$ で定義され体積要素 : $d^\infty x$: は極座標表示で

$$:d^\infty x:=r^{\nu-1}dr:d^\infty\omega:,\qquad :d^\infty\omega=\prod_{n=1}^{\infty}(\sin^{\nu-n-1}\theta_n d\theta_n),$$

となる ([5] cf.[10])。積分の領域は H の適当な部分集合（たとえば

$$H^+=\{\sum_n x_ne_n|x_n\geq 0\}$$

でも良いが D が $H^\natural$ に自然に拡張されることが必要である)。解析接続の路は例えば H^+ で $f(x)$ を $\exp(-\sum_n x_n)$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-x_1-\cdots-x_n}d(x_1^{\mu_n^s})\cdots d(x_n^{\mu_n^s})=\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\mu_n^s),$$

$$\log(\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\mu_n^s))=-\gamma\zeta(G,s)+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m}\zeta(G,ms),$$

だから 実軸を取れず 実軸・虚軸に接しない路に沿って $s=0$ に（$\{z|\Re z>0\}$ の中で）近づかねば成らない ([4])。

I_a, $a=(a_1,a_2,\dots)$; $I_ae_n=a_ne_n$ が scaling 変換であれば

$$\int_{I_a(H^\natural)}I_a^\sharp(f):d^\infty I_ax:=\int_{H^\natural}|det_GI_a|f:d^\infty x:, \tag{23}$$

だから $W^{k,\natural}$ での体積要素 : $d^{\infty,k}x$: は

$$:d^{\infty,k}x:=|detG|^{k/2}:d^\infty x:, \tag{24}$$

である。T が scaling 変換でなくても $T=I_a+N$, N は一般冪零元であれば (11) は成り立つから det_GT が存在するとき

$$\int_{T(D)}T^\sharp f:d^\infty Tx:=\int_D|det_GT|f:d^\infty x:, \tag{25}$$

と定義できる。

定理 1. $D=\{\sum_n x_n|a_n\le x_n\le b_n\}\subset H^\natural$, $f(x)=\prod_n f_n(x_n)$; $f_n\ge 0$, $\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx=c_n$ とすれば

$$\int_D f(x):d^\infty x :=: \prod_{n=1}^{\infty} c_n :, \tag{26}$$

である。

証明. $\int_a^b f(x)dx=c$ のとき $x=cy$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx=c\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cy)dy,$$

だから scaling 変換 $x_n=c_ny_n$ を使えば (23) から (26) が得られる。

G が楕円形作用素 D の Green 関数の時の Gauss 型経路積分の公式

$$\int_H e^{-\pi(Dx,x)}\mathcal{D}x=\frac{1}{\sqrt{detD}},$$

は (25) から導かれる ([4])。他の例として 正則化 Laplacian の周期的境界条件の固有関数の L^2-norm の計算を次の例で行う。

例. $H^\natural$ の部分集合 $D=\{\sum_n x_ne_n||x_n|\le\mu_n^{d/2}\}$ とその上の関数

$$\begin{aligned} f_{i_1,\cdots,i_m}(x) &= \prod_{j\in\{i_1,\cdots,i_m\}} f_j(x_j),\quad f^{i_1,\cdots,i_m}(x)=\prod_{j\notin\{i_1,\cdots,i_m\}} f_j(x_j),\\ f_j(x) &= \sin(N_j\mu_j^{-d/2}\pi x),\ or\ \cos(N_j\mu_j^{-d/2}\pi x), \end{aligned}$$

を考えれば (25) から

$$\int_D f_{i_1,\cdots,i_m}(x)^2:d^\infty x: = 2^{\nu-m}(detG)^d, \tag{27}$$

$$\int_D f^{i_1,\cdots,i_m}(x)^2:d^\infty x: = 2^{m}(detG)^d, \tag{28}$$

である。

この例では $f_{i_1,\cdots,i_p}$, $f^{j_1,\cdots,j_q}$ を

$$T^\infty=H^\natural/\mathbb{Z}^\infty,\quad \mathbb{Z}^\infty=\{\sum_n N_ne_{n,k}\in H^\natural|N_n\in\mathbb{Z}\},$$

上の 内積を

$$(f,g)=\int_D f\bar{g}:d^\infty x:,$$

で定義した Hilbert 空間 $L^2(T^\infty)$ の元とみている。(27), (28) から

$$\frac{1}{2^{(\nu-p)/2}\sqrt{detG}}f_{i_1,\dots,i_p}, \quad \frac{1}{2^{q/2}\sqrt{detG}}f^{j_1,\dots,j_q},$$

は $L^2(T^\infty)$ の正規直交系になる。従って $L^2(T^\infty)$ の元にたいしては 3 角関数の無限積を用いて Fourier 展開の議論ができる。同様に $H^\natural$ や $H^\natural_+$ の関数 f にたいして Fourir 変換 $\mathsf{F}(f)$ や Laplace $\mathsf{L}(f)$ を

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(f)(\xi) &= \int_{H^\natural} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} : d^\infty x :, \\ \mathsf{L}(f)(t) &= \int_{H^\natural_+} f(x)e^{-\langle x,t\rangle} : d^\infty x :, \end{aligned}$$

で定義することが示唆される。これを調べるのは今後の課題である。

なお (24) から $\int_D f(x) : d^\infty x :$ は D 上の適当な関数空間の正値線形汎関数だから 何らかの D 上の測度による積分と解釈できる可能性がある。

$\mathbb{R}^n = \{x_1e_{i_1} + \cdots + x_ne_{i_n}\}$ とすれば $\mathbb{R}^\perp$ で同様に正則化体積要素が定義できる。これを $I = \{i_1,\dots,i_p\}$ として $: d^{\infty-I}x :$ と書く。det_GT が存在すれば

$$: d^{\infty-\{i_1,\dots,i_p\},k}Tx := det_GT\mu_{i_1}^{-k}\cdots\mu_{i_p}^{-k} : d^{\infty-\{i_1,\dots,i_p\},k}x :, \tag{29}$$

である。

$G = G_+ - G_-$ のとき $H^\natural_\pm$ での正則化体積要素として $: d^{\infty/2,\pm}x :$ が定義される。$: d^{\infty/2-I,\pm,k}x :$ も同様に定義される。更に $\{H, G\}$ が Fredholm 構造 $\mathcal{F}$ を持ち $G_- = \mathcal{F}G_+\mathcal{F}^\dagger$ であれば

$$Je_{n,+} = \mathcal{F}e_{n,+} = e_{n,-}, \quad Je_{n,-} = -\mathcal{F}^\dagger e_{n,-} = -e_{n,+},$$

で $\sqrt{-1}$-作用素 J を導入し

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{n,+} + Je_{n,+}), \quad \bar{\epsilon}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{n,+} - Je_{n,+}), \\ &\epsilon_\infty = \sum_{n=1}^\infty \mu_n^{d/2}\epsilon_n, \qquad \bar{\epsilon}_\infty = \sum_{n=1}^\infty \mu_n^{d/2}\bar{\epsilon}_n, \end{aligned}$$

とおく。ϵ_n, $\bar{\epsilon}_n$ に対応する $H^\natural$ の座標を ξ_n, $\bar{\xi}_n$ とすれば $dx_{n,+} \wedge dx_{n,-} = d\xi_n \wedge d\bar{\xi}_n$ だが

$$\begin{aligned} d(x_{n,+}^{\mu_n^s})d(x_{n,-}^{\mu_n^s}) &= \mu_n^{2s}(x_{n,+}x_{n,-})^{\mu_n^{s-1}}dx_{n,+}dx_{n,-}, \\ d(\xi_n^{\mu_n^s})d(\bar{\xi}_n^{\mu_n^s}) &= \mu_n^{2s}|\xi_n|^{2(\mu_n^s-1)}d\xi d\bar{\xi}, \end{aligned}$$

だから　$:d^\infty \xi := \lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^\infty d(\xi_n^{\mu_n^s})d(\bar\xi_n^{\mu_n^s})|_{s=0}$ が $: d^\infty x :$ に一致するかは解らない。ただし f が弱収束の意味で

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^{2m}}{\partial x_{1,+}\cdots\partial x_{m,+}\partial x_{1,-}\cdots\partial x_{m,-}} : \prod_{n=1}^\infty x_{n,+} :: \prod_{n=1}^\infty x_{n,-} &= 1,\\ \lim_{m\to\infty}\frac{\partial^{2m}}{\partial\xi_1\cdots\partial\xi_m\partial\bar\xi_1\cdots\partial\bar\xi_m} : \prod_{n=1}^\infty \xi_n :: \prod_{n=1}^\infty \bar\xi_n &= 1,\end{aligned}$$

が成立する関数空間にぞくすれば $\int f : d^\infty x := \int f : d^\infty \xi :$ となる。

8　無限次の元を持つ Grassmann 代数

W^k の上の Grassmann 代数 $Gr(W^k)$ は $e_{1,k}, e_{2,k}, \ldots,$ から生成され W^k の距離で　完備化した代数である。代数としては $Gr(W^k) \subset Gr(W^l)$, $l < k$ であり $e_{\infty,k} \in Gr(W^l)$, $l < k$ だから　$Gr(W^l)$ の部分代数として $Gr(W^k)[e_{\infty,k}]$ は意味がある。これに $W^{k,\natural}$ から誘導された距離を入れて完備化した代数を $Gr(W^{k,\natural})$ とする。W^k 上の微分形式の代数は $Gr(W^{-k})$ である。同様に $Gr(W^{-k,\natural})$ が出来る。これを $W^{k,\natural}$ の上の微分形式の代数と考える。

$Gr(W^{-k,\natural})$ に無限次の元 dx^∞_{-k} を添加する。計算規則は

$$d^I x_{-k}\wedge d^\infty x_{-k} = d^\infty x\wedge d^I x = 0,\ d^I x_{-k} = dx_{i_1,-k}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p,-k}, \tag{30}$$

$I = \{i_1,\ldots,i_p\}$ である。解析的には $d^\infty x_{-k}$ による積分を $: d^\infty x :_{-k} = detG^{-k/2} : d^\infty x :$ による積分と解釈する。同様に $d^{\infty-I}x_{-k}$ も添加する。計算規則は

$$\begin{aligned} d^J x\_k\wedge d^{\infty-I}x_{-k} &= e^{q(\nu-p)\pi i}d^{\infty-I}x_{-k}\wedge d^J x_{-k},\\ d^{\infty-I}x_{-k}\wedge d^J x_{-k} &= e^{-(\nu-p)q\pi i}d^J x_{-k}\wedge d^{\infty-I}x_{-k}, \end{aligned}\tag{31}$$

等である ([2],[3])。実係数のときは　この計算規則は ν が整数でなければ使えない。複素係数のとき　この計算規則は　非可換 torus の計算規則と類似している。

定義 8。上の計算規則で $(\infty - p)$-形式を $Gr(W^{k,\natural})$ に添加して得られる代数を $Gr^\infty(W^{-k,\natural})$ と書く。

G は $d^\infty x_k$, $d^{\infty-I}x_k$ に対し　(13) から

$$G^\sharp d^\infty x_{-k} = d^\infty G x_{-k} = detG d^\infty x_{-k}, \tag{32}$$

$$G^\sharp d^{\infty-I}x_{-k} = detG\mu_{i_1}^{k/2}\cdots\mu_{i_p}^{k/2}d^{\infty-I}x_{-k}, \tag{33}$$

で働く。従って加群として $(\infty - p)$-次形式全体は $Gr(W^{k,\natural})$ と同型であり

$$Gr^{\infty}(W^{-k,\natural}) \cong Gr(W^{-k,\natural}) \oplus Gr(W^{k,\natural})detG, \tag{34}$$

と書ける。$Gr^{\infty}(W^{-k,\natural})$ では　Hodge $*$-作用素が

$$\begin{aligned}
&*(dx_{i_1,-k} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p,-k}) \\
= \;& e^{(i_1+\cdots+i_p-p(p-1)/2)\pi i} d^{\infty-\{i_1,\ldots,i_p\}} x_{-k}, \qquad (35)\\
&*(d^{\infty-\{i_1\ldots,i_p\}} x_{-k} \\
= \;& e^{-(i_1+\cdots+i_p-p(p-1)/2} dx_{i_1,-k} \wedge \ldots dx_{i_p,-k}, \qquad (36)
\end{aligned}$$

で定義できる。ここで (32), (33) を使えば

$$d^{\infty-\{n\}} x_{-k} = detGdx_{n,k} = detGG^{k,\sharp} dx_{n,-k},$$

となるから $*$-作用素は G の作用として定義出来る ([2],[3])。また (33) から $det_G T$ が存在すれば T の $Gr^{\infty}(W^{-k,\natural})$ への作用が定義できる。

$G = G_+ - G_-$ のときは $d^{\infty/2-I,\pm} x_{-k}$ が定義できる。計算規則は

$$\begin{aligned}
d^{\infty/2,+} x_{-k} \wedge d^{\infty/2,-} x_{-k} &= e^{\nu_+ \nu_- \pi i} d^{\infty/2,-} x_{-k} \wedge d^{\infty/2,+} x_{-k}, \\
d^{\infty/2,-} x_{-k} \wedge d^{\infty/2,+} x_{-k} &= e^{-\nu_- \nu_+ \pi i} d^{\infty/2,+} x_{-k} \wedge d^{\infty/2,-} x_{-k}, \quad (37)
\end{aligned}$$

等である。この場合 $Gr^{\infty}(W^{-k,\natural})$ は　$Gr(W^{-k,\natural})$ に $d^{\infty/2=I,\pm} x_{-k}$ を添加した代数で

$$d^{\infty} x_{-k} = d^{\infty/2,+} x_{-k} \wedge d^{\infty/2,-} x_{-k},$$

である。

$\{H, G\}$ が対称な Fredholm 構造を持つとき $d\xi_{n,k}$, $d\bar{\xi}_{n,k}$ を生成元として得られる Grassmann 代数を $Gr_J(W^{-k,\natural})$ とする。$Gr_J(W^{-k,\natural})$ の 2-形式

$$\Omega_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^s d\xi_{n,k} \wedge d\bar{\xi}_{n,k}, \quad s > \frac{d}{2},$$

は $\Omega_k(s) = \Omega_{k+l}(s+l)$ を満たす。$\Omega_k(d)$ は正則化 Symplectic 形式とみられる。しかし $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \overbrace{\Omega_k(d) \wedge \ldots \wedge \Omega_k(d)}^{n}$（の解析接続）からは正則化「体積要素」$: d^{\infty}\xi :$ は導けない。$: d^{\infty}\xi :$ を導くには

$$\tilde{\Omega}_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2s} |\xi|_n^{2(s-1)} d\xi_n \wedge \bar{\xi}_n,$$

を使うのが良いようである。

$:d^\infty\xi:$, $:d^\infty\bar{\xi}:$ が定義できるから $d^\infty\xi$, $d^\infty\bar{\xi}$ 等を $Gr_J(W^{-k,\natural})$ に添加して $Gr_J^\infty(W^{-k,\natural})$ が定義できるが、これと $Gr^\infty(W^{-k,\natural})$ が一致するかは解らない。

注意. Grassman 代数 $Gr(W^k)$ に ∞-次の元を添加するのに まず $e_{\infty,k}$ を添加したが これは $d^\infty x_k$ に解析的意味をつけるためで代数的には G の作用が (31),(32) で 定義されていれば良いようである。$e_{\infty,k}$ を添加することが特別な代数的意味を持つかは 今の所 解らない。

9 正則化外微分

W^k の $(\infty-p)$-次形式は W^k から $\overbrace{W^k\otimes\cdots\otimes W^k}^{p}$ への交代関数 $u=u(x;x_1,\ldots,x_p)$ と見ることが出来る。$x_1,\ldots,x_p$ を助変数とみて、u の Fréchet 微分を $\hat{d}u$ とすれば $\hat{d}u$ は W^k から その双対空間 W^{-k} への写像だから $x_1=x$ とおいて $x_2,\ldots,x_p$ を助変数として $\hat{d}u(x,x;x_2,\ldots,x_p)$ は W^k から W^k の線形作用素の空間 $L(W^k)$ への写像である。ここで $\hat{d}u$ が trace 級であれば

$$du(x;x_2,\ldots,x_p)=\mathrm{tr}\hat{d}u(x,x;x_2,\ldots,x_p), \tag{38}$$

は $(\infty-p+1)$-次形式になる。これを u の外微分と定義する。座標表示をつかえば

$$d(\sum_I f_I d^{\infty-I}x)=\sum_J(\sum_{I\setminus\{i\}=J}(-1)^{i_1-1}\frac{\partial f_I}{\partial x_i})d^{\infty-J}x,$$

である。$d^{\infty-J}x$ の係数が無限和になり、この和が収束する条件が trace 級の条件になる。

$(\infty-p)$-次形式の外微分可能性は強い条件である。 たとえば

$$\omega=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}x_n d^{\infty-\{n\}}x,$$

は 外微分可能ではない。また 外微分可能な $(\infty-p)$-次形式は（大域的に）完全形式になる。従って $(\infty-p)$-次形式の空間では 外微分は冪零ではない ([3], 形式的には $(\infty-p)$-形式の積分はいつでも構成できる。外微分可能であれば 形式的積分が収束する)。なお $(\infty-p)$-次形式にたいする微分 d^{2n} は 関数 f にたいいし

$$d^{2n}(f\phi)=fd^{2n}\phi$$

となる。

定義　$(\infty-p)$-形式 u の正則化外微分 $:d:u=:d:_G u$ を

$$:d:u(x;x_1,\ldots,x_{p-1})=\mathrm{tr}(G^s\hat{d}u)(x,x;x_1,\ldots,x_{p-1})|_{s=0}, \tag{39}$$

で定義する。

座標系表示では

$$:d:(\sum_I f_I d^{\infty-I}x)=\sum_J(\sum_{I\setminus\{i\}=J}(-1)^{i_1-1}\mu_{i_1}^s\frac{\partial f_I}{\partial x_i})d^{\infty-J}x|_{s=0},$$

となる。

例　ω は　外微分できないが

$$:d:\omega=(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s)d^\infty x|_{s=0}=\zeta(G,s)d^\infty x|_{s=0}=\nu d^\infty x,$$

だから　正則化外微分可能である。また $r=\sqrt{\sum_n x_n^2}$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s\frac{\partial r}{\partial x_n}dx_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s\frac{x_n dx_n}{r},$$

だから

$$\begin{aligned}:d:r^c\omega &= cr^{c-1}\big((\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s x_n dx_n)\wedge\omega+r^c\zeta(G,s)d^\infty x\big)|_{s=0}\\ &= (c+\nu)r^c d^\infty x,\end{aligned}$$

となる。特に $:d:r^{-\nu}\omega=0$ である。

$*d^I x=(-1)^{i_1+\cdots+i_p-p(p-1)/2}detGd^{\infty-I}x$ とすれば

$$:d:*df=(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2})|_{s=0}d^\infty x=:\triangle:fd^\infty x,$$

である。従って正則化 Lpalacian は正則化外微分を使って表される ([3])。Hodge $*$-作用素を使って外微分 d の adjoint δ を定義すれば　$:d:$ と同様に $:\delta:$ が定義でき

$$:\triangle:f=:\delta:df$$

である。一般に　微分形式 ϕ にたいしても

$$:\triangle:\phi=\begin{cases}:\delta:d\phi+:d:\delta\phi, & \phi \text{ is a finite degree form,}\\ \delta:d:\phi+d:\delta:\phi, & \phi \text{ is an infinite degree form.}\end{cases}$$

と定義できる。これについては調べるのは今後の課題である。

$G=G_+-G_-$ のときには外微分は d_++d_- とわけられ $(\infty/2-p,\pm)$-形式にたいしては　正則化外微分：$d_\pm$ ：が　同様に定義される。また $Gr_J^\infty(W^{-k,\natural})$ では $\partial,\bar\partial$ が定義され：∂ :, : $\bar\partial$: も定義できる。

10　Soborev 多様体上の無限次形式

$M=\{U,h_U\}$ を　Soborev 多様体とする。$h_U\to W^k$, $W^k=\{W^k,G\}$ とし、$\{G_U\}$, $G_U=G+H_U$ があって、

$$g_{UV}G_V=G_Ug_{UV},\quad g_{UV}=h_Uh_V^{-1}:W^k\to W^k,$$

$G^{-1}L_U\in\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ は compact 作用素の ideal 、と仮定する。さらに M を拡大して $W^{k,\natural}$ を model にした空間 $M^\natural$ が構成できることを仮定する。

例　M を写像空間 $Map(X,N)$（の可縮写像の作る連結成分）とする。X は compact Riemann 多様体、N は paracompact 多様体である。写像を　Soborev -k-級とすれば M は $W^k(X)$ を　model とする　Soborev 多様体になる。G を質量項 mI を適当に選んで $D=\triangle+mI$ の Green 作用素とする。D は接続 $\{A_U\}$;

$$(D+A_U)g_{UV}=g_{UV}(D+A_V), \tag{40}$$

をもち、m を適当に選べば $D+A_U$ が Green 作用素 G_U を持つよう出来るから $W^k=\{W^k,G\}$ とすればよい。$Map(X,M)$ の写像の微分可能性は任意だから Soborev k-級の写像空間を $Map^k(X,M)$ とすれば $Map^k(X,M)\subset Map^{k-1}(X,M)$ では $e_{\infty,k}$（の像）をふくむ。これから $Map^{k-1}(X,M)$ の部分集合として $Map^{k,\natural}(X,M)$ が（位相を入れ替えて）構成出来る。

この例では G が正だが $G=G_+-G_-$ となる例は X を spin 多様体とし $D=\not{D}+mI$ をとればよい。しかし　こう取ると　model は X 上の spinor 場の Soborev 空間 $W^k(X,E)$ になるから $Map(X,N)$ を拡大する必要がある。この拡大は $X=S^1$ のときは $Map(X,M)$ の複素化だから N を（実）代数多様体と仮定すれば難しく無い。　一般の場合は Clifford 代数の非可換性に注意する必要がある ([2])。

また　この場合　接続は存在するが $D+A_U$ が常に Green 作用素を持てば M の接 bundle TM は自明になる ([2])。しかし（N が実代数的なことを仮定すれば）M の因子 Y があって、$M\setminus Y$ では接 bundle は　自明になる。従って Y から決まる　複素直線 bundle λ_Y として $TM\otimes\lambda_Y$ を考えて　議論を進めることが出来る。

一般に N の接 bundle が自明なら $Map(X,N)$ の接 bundle も自明になる。M が $\{W^k(X,E),\not{D}\}$ を model に出来るとき $M, M^\natural$ には Fredholm 構造や Cuntz 構造が定義できる。逆に $M^\natural$ が Fredholm 構造や Cuntz 構造をもてば $M^\natural$ は平坦になる。$M^\natural$ が平坦なとき、あるいは $M=Map(X,N)$ で N が平坦なとき、Fredholm 構造や Cuntz 構造から $M^\natural$　や N の幾何学的情報を得るのは今後の問題である (cf.[1])。

$M^\natural$ の接 bundel $TM^\natural=\{g_{UV}\}$ は $W^{k,\natural}$ を fibre とする。微分形式は $Gr^\infty(W^{-k,\natural})$ への可微分写像である。無限次形式（「体積要素」）は U では $det(D+A_U)^{-k/2}$ と見られる。これから $\dfrac{det(D+A_U)^{-k/2}}{det(D+A_V)^{-k/2}}$ によって直線 bundel $det(M^\natural)$ がえられる。$x\in U\cap V$ のとき $D+A_U(x)$ と $D+A_V(x)$ は同じ固有値をもつから

$$\begin{aligned}\zeta(D+A_U(x),s) &= \zeta(D+A_V(x),s)\\ \eta(D+A_U(x),s) &= \eta(D+A_V(x),s),\end{aligned}$$

となって、D が正なら　$det(D+A_U(x))=det(D+A_V(x))$ だから自明だが　Dirac 作用素のときは $detD$ が一意でなく $det(D+A_U(x))=e^{\pm\nu_-(x)\pi i}det|D+A_U(x)|$ だから

$$\frac{det(D+A_U(x))}{det(D+A_V(x))}=e^{\pm 2\nu_-(x)\pi i},$$

となって　自明とは限らない。この bundle の同値類は　接続 $\{A_U\}$ のとり方によらない。

Hodge $*$-作用素は $D+A_U$ の Green 作用素 G_U を用いて定義できるから $M^\natural$ の上でも定義できる。従って $M^\natural$ の上でも　正則化外微分が定義できる。また $*$-作用素が定義できるから $M^\natural$ に Poincaré 双対が　存在する　de Rham 型 cohomology（位相不変ではない！）が定義できる。例えば M を $W^{k,\natural}$ の torus $T^\infty=\{\sum_n z_{n,k}e_{n,k}||z_{n,k}|=\mu_n^{d/2}\}$ とすれば、この cohomology　は $Gr^\infty(W^{k,\natural}$ と同型になる ([6] cf.[11])。

参考文献

[1] Abe,M. Kawamura,K.:Recursive fermion system in Cuntz algebra, I - Embeddings of fermion algebra into Cuntz algebra, Commun. Math. Phys.,228(2002), 85-101.

[2] Asada, A.:Spectral invariants and geometry of mapping spaces, Geometric Aspects of Partial Differential Equations, Contemporary Math. 242 (1999), 189-202.

[3] Asada,A.:Regularized Calculus:An application of zeta regularization forinfinite dimensional geometry and analysis, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 1(2004), 107-157.

[4] Asada,A.:Zeta regularization and calculus on infinite dimensional space, Global Analysis and Applied Mathematics, 71-83, AIP Proc.729(2005).

[5] Asada,A.:Regularized volume form of the sphere of a Hilbert space with the determinant bundle, DGA 2004, Differential Geometry and Its Applications, 397-409, Prague, 2005.

[6] Asada,A.:Regularized volume forms on infinite dimensional manifolds and de Rham type cohomology with infinite degree elements, preprint.

[7] Cardona,A. Decourtioux,C. Paycha,S.: From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory, Commun. Math. Phys.,242(2002), 31-65.

[8] Connes,A.:Noncommutative Geometry-Year 2000, GAFA, Geome. funct. anal. GAFA2000, 481-559, (2000).

[9] Cuntz,J.:Simple C^*-algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys.,57(1977), 173-185.

[10] Fujii,K.:Standard and non-standard quantum models:A non-commutative version of the classical system of SU(2) and SU(1,1) arising from quantum optics, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.,2(2005), 783-821.

[11] Meyer,R.:Excision in entire cyclic cohomology, J. Eur. Math. Soc.3(2001), 269-286.

[12] Paycha,S.:Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry, Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top. 4(2001), 221-266.

[13] Simon, B.:Trace Ideals and Their Applications, Cambridge, 1979