数理解析研究所講究録
1500巻 2006年 157-178

ディラック構造と陰的なラグランジュ系

早稲田大学 理工学部　吉村 浩明

Hiroaki Yoshimura
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

本稿では、配位多様体上の拘束ディストリビューションから余接バンドル上に誘導されるディラック構造について述べ，それに付随する陰的なラグランジュ系の理論的な枠組みについて概説する．また，L-C回路や渦点に代表される退化ラグランジュ系や非ホロノミックな拘束を受ける力学系を取り上げ，陰的なラグランジュ系による定式化の応用例を示す．

1　はじめに

ディラック構造は，シンプレクティック構造とポアソン構造を一般化した概念であるが（Courant and Weinstein [1988]），近年，回路やロボットなどの工学系の設計や複雑な物理システムの接続関係の記述を可能とするものとして，その応用的な側面が注目されてきている．ディラック構造の力学への応用としては，正則な場合のハミルトン系を一般化した，陰的なハミルトン系の理論の構築が示された（van der Schaft and Maschke [1995]; Bloch and Crouch [1997]; van der Schaft [1998]; Blankenstein and Ratiu [2004]）．しかし，ディラック構造は，元々，退化ラグランジュ系のためのディラックの拘束理論と関連して考案されたものである（Courant [1990]）．言うまでもなく，ディラックの拘束理論は，退化ラグランジアンを出発点にしていたが（Dirac [1964]），これまで，ディラック構造とラグランジュ系との関連は，退化した場合を含めて，十分に明らかにされていない（Marsden and Ratiu [1999]）．

最近，陰的なハミルトン系とのアナロジーとして，ディラック構造とラグランジュ系の関係が明らかにされた（Yoshimura and Marsden [2006]）．この理論では，多様体上の拘束ディストリビューションから誘導された余接バンドル上のディラック構造と，さらに，ラ

グラシジアン（退化していても良い）のディラック微分という概念を新たに導入することによって，陰的なラグランジュ系の概念が示された．また，L-C 回路と非ホロノミック系へ応用が示された．

本稿では，配位多様体 Q 上の拘束ディストリビューションから T^*Q 上に誘導されたディラック構造について解説し，それに付随して陰的なラグランジュ系がどのように定義できるか，その理論的な枠組みについて概説する．その上で，退化ラグランジュ系として L-C 回路と渦点の系を，また，非ホロノミック系として，床の上を滑らずに転がる垂直ディスクを具体例として取り上げ，陰的なラグランジュ系の定式化を示す．

2 ディラック構造

ベクトル空間上のディラック構造　まず，Courant and Weinstein [1988] に従って，ベクトル空間上のディラック構造の定義を以下に述べる．

V を n 次元のベクトル空間とし，V^* をその双対空間とする．V^* と V の自然なペアリングを $\langle\cdot,\cdot\rangle$ として，次のような，$V \oplus V^*$ 上の対称なペアリング $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ を

$$\langle\!\langle\,(v,\alpha),(\bar{v},\bar{\alpha})\,\rangle\!\rangle = \langle\alpha,\bar{v}\rangle + \langle\bar{\alpha},v\rangle$$

のように定義する．但し，$(v,\alpha),(\bar{v},\bar{\alpha}) \in V \oplus V^*$ である．

定義 2.1.　ベクトル空間 V のディラック構造は，$D = D^{\perp}$ なる部分空間 $D \subset V \oplus V^*$ として定義される．ここに，$D^{\perp}$ はペアリング $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ に関する D の直交補空間である．

上の定義より，ディラック構造 $D \subset V \oplus V^*$ は，

$$\langle\alpha,\bar{v}\rangle + \langle\bar{\alpha},v\rangle = 0$$

が全ての $(v,\alpha),(\bar{v},\bar{\alpha}) \in D$ について成立し，$D = D^{\perp}$ であることから，

$$\dim D = n$$

であり，$\bar{v} = v$ 及び $\bar{\alpha} = \alpha$ と置いて，$\langle\alpha,v\rangle = 0$ を得る．

命題 2.2. $\phi : V \to W$ をベクトル空間 V から W への上への線形写像とすると，$\Delta = \mathrm{Ker}\,\phi$ であり，また，零化元は $\Delta^{\circ} = \mathrm{Im}\,\phi^T$ となる．但し，$\phi^T : W^* \to V^*$ は，写像 ϕ の転置，すなわち，双対写像である．

証明. $\mu \in W^*$ と $\alpha \in V^*$ に対して，$\alpha = \phi^T \mu$ とする．このとき，$v \in \Delta$ に対して，

$$\langle \alpha, v \rangle = \langle \phi^T \mu, v \rangle = \langle \mu, \phi(v) \rangle = 0$$

である．従って，$\mathrm{Im}\,\phi^T \subset \Delta^\circ$ を得る．逆に，$\alpha \in \Delta^\circ$ および $V = \Delta \oplus U$ としよう．このとき，$v \in V$ に対して，$r \in \Delta$，$u \in U$ として，$v = r + u$ と書くことができる．ここで，$\phi|U : U \to W$ は，同型写像であり，$(\phi|U)^T : W^* \to U^*$ も同型写像となる．よって，

$$\begin{aligned}\alpha(v) &= \alpha(r+u) = \langle \alpha,\, u \rangle = \langle \alpha|U,\, u \rangle = \langle (\phi|U)^T \mu,\, u \rangle = \langle \mu,\, (\phi|U)(u) \rangle \\ &= \langle \mu,\, \phi(u) \rangle = \langle \mu,\, \phi(r+u) \rangle = \langle \mu,\, \phi(v) \rangle = \langle \phi^T \mu,\, v \rangle\end{aligned}$$

が全ての $v \in V$ について成立するので，$\alpha = \phi^T \mu$ を得る． □

部分空間 $\Delta \subset V$ を与えよう．上の命題を包含写像 $i : \Delta \to V$ と双対な写像 $\pi : V^* \to \Delta^*$ に適用するために，V を V^* と入れ替え, さらに，ϕ を π と，および，Δ を Δ° と置き替えることによって，$\mathrm{Ker}\,\pi = \Delta^\circ$ となることから $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ を得る．

命題 2.3. V をベクトル空間とする．部分空間 $\Delta \subset V$ の零化空間 $\Delta^\circ \subset V^*$ を

$$\Delta^\circ = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, v \rangle = 0, \quad \forall\, v \in \Delta\}$$

と定義すると，$D = \Delta \times \Delta^\circ$ はベクトル空間 V 上のディラック構造である．

証明. 定義より，直交補空間は

$$D^\perp = \{(w, \beta) \in V \times V^* \mid \langle \alpha, w \rangle + \langle \beta, v \rangle = 0, \quad \forall\, v \in \Delta,\ \alpha \in \Delta^\circ\}$$

と定義される．そこで，$D = D^\perp$ であることを証明するために，まず，$D^\perp \subset D$ を示す．$(w, \beta) \in D^\perp$ とすると，$D^\perp$ の定義において，$\alpha = 0$ と置く．これより，任意の $v \in \Delta$ に対して，$\langle \beta, v \rangle = 0$ が成り立ち，$\beta \in \Delta^\circ$ を得る，同様に，$v = 0$ と置くと，$\langle \alpha, w \rangle = 0$ が任意の $\alpha \in \Delta^\circ$ について成立する．故に，$w \in (\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ である．従って，$(w, \beta) \in D^\perp$ ならば，$(w, \beta) \in D$ である．よって，$D^\perp \subset D$ を得る．逆に，もしも $(w, \beta) \in D$ ならば，$\langle \alpha, w \rangle = 0$ が任意の $\alpha \in \Delta^\circ$ について成り立ち，さらに，$\langle \beta, v \rangle = 0$ が任意の $v \in \Delta$ について成立するから，$D \subset D^\perp$ は自明である．こうして，$D = D^\perp$ が示された． □

回路とテレヘンの定理 電気回路システムでは，要素間の接続は，キルヒホッフの電流則 (KCL) によって与えられる．いま，n 個の接続ポートを有する電気回路を考えると，キルヒホッフの電流則は線形写像

$$\phi : V \to W$$

によって与えられる．$\Delta = \mathrm{Ker}\,\phi \subset V$ はキルヒホッフの電流則によって定まる拘束空間であり，$\Delta^{\circ} = \mathrm{Im}\,\phi^{T} \subset V^{*}$ は，キルヒホッフの電圧則より定まる双対な拘束空間である．従って，n ポートの電気回路システムのキルヒホッフ拘束は，n 次元ベクトル空間 V 上のディラック構造 $D = \Delta \times \Delta^{\circ}$ として表すことができる．$e \in \Delta^{\circ}$ をポート電圧，$f \in \Delta$ をポート電流とすると，$D = D^{\perp}$ より，

$$\langle e, f \rangle = 0$$

を得る．これは，電気回路理論におけるテレヘンの定理を表す (Chua, Desoer and Kuh [1987])．

多様体上のディラック構造　M を滑らかな微分多様体とし，その接バンドルを TM，余接バンドルを $T^{*}M$ とする．また，$TM \oplus T^{*}M$ は M 上のホイットニー・バンドル，すなわち，M を底空間として，各点 $x \in M$ で $T_{x}M \times T_{x}^{*}M$ なるファイバーを有するバンドル構造である．多様体 M 上のディラック構造とは，各点 $x \in M$ でベクトル空間の意味で定義されたディラック構造となる，部分バンドル $D \subset TM \oplus T^{*}M$ として定義される．

幾何学的な力学理論では，概ディラック構造は，2形式（必ずしも閉でもなく，退化していても良い）と概ポアソン構造（付随するポアソン括弧がヤコビの恒等式を必ずしも満たさない）の両者を一般化したものとして定義される．従って，2形式が閉である条件とポアソン括弧がヤコビの恒等式を満たす条件に対応して，積分可能なディラック構造は，条件

$$\langle \pounds_{X_1}\alpha_2, X_3 \rangle + \langle \pounds_{X_2}\alpha_3, X_1 \rangle + \langle \pounds_{X_3}\alpha_1, X_2 \rangle = 0$$

が D で値を持つ全てのベクトル場と1形式 (X_1, α_1), (X_2, α_2), (X_3, α_3) について満足するものとして定義される．ここに，$\pounds_X$ は，M 上のベクトル場 X に沿ったリー微分である．

誘導されたディラック構造　Yoshimura and Marsden [2006] に従って，多様体上の拘束ディストリビューション[1]から誘導されるディラック構造について述べる．Q を n 次元の配位多様体とし，その局所座標を $q = (q^1, \ldots, q^n)$ とする．運動学的な拘束は，ディストリビューション $\Delta_Q \subset TQ$ によって，各点 q において，

$$\Delta_Q(q) = \{ v \in T_qQ \mid \langle \omega^a(q), v \rangle = 0, \;\; a = 1, \ldots, m < n \}$$

として与えられる．ここに，ω^a は m 個の独立した Q 上の1形式である．次に，$T^{*}Q$ 上のディストリビューション $\Delta_{T^{*}Q}$ を

$$\Delta_{T^{*}Q} = (T\pi_Q)^{-1}(\Delta) \subset TT^{*}Q$$

[1]ディストリビューションは，各点で滑らか，かつ一定の次元を有するものとする．

のように定義する．但し，$T\pi_Q : TT^*Q \to TQ$ は，射影 $\pi_Q : T^*Q \to Q$ の微分写像である．一方，Δ_{T^*Q} の零化元 $\Delta^\circ_{T^*Q}$ は，各点 $z=(q,p)\in T^*Q$ に対して，

$$\Delta^\circ_{T^*Q}(z) = \{\alpha_z \in T^*_zT^*Q \mid \langle \alpha_z,\ w_z\rangle = 0,\ \ \forall\, w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)\}$$

と与えられる．

命題 2.4. $\Omega : TT^*Q \times TT^*Q \to \mathbb{R}$ を余接バンドル T^*Q 上の正準シンプレクティック構造としよう．このとき，各点 $z=(q,p)\in T^*Q$ で，ファイバーが

$$\begin{aligned} D_{\Delta_Q}(z) = \{(v_z,\alpha_z) \in T_zT^*Q \times T^*_zT^*Q \mid v_z \in \Delta_{T^*Q}(z),& \\ \alpha_z(w_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z,w_z),\ \ \forall w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)\}& \end{aligned} \tag{1}$$

として与えられる部分バンドル $D_{\Delta_Q} \subset TT^*Q \oplus T^*T^*Q$ は，T^*Q 上のディラック構造である．但し，Ω_{Δ_Q} は，Ω の Δ_{T^*Q} への制限を表す．

証明. $D_{\Delta_Q} \subset TT^*Q \oplus T^*T^*Q$ の直交補空間は，各点 $z \in T^*Q$ で，

$$\begin{aligned} D^\perp_{\Delta_Q}(z) = \{(u_z,\beta_z) \in T_zT^*Q \times T^*_zT^*Q \mid \alpha_z(u_z)+\beta_z(v_z) = 0,\quad \forall v_z \in \Delta_{T^*Q}(z),& \\ \alpha_z(w_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z,w_z),\quad \forall w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)\}& \end{aligned}$$

と定義できる．

D_{Δ_Q} がディラック構造であることを証明するには，$D^\perp_{\Delta_Q} = D_{\Delta_Q}$ を示せば良い．そこで，まず，$D_{\Delta_Q}(z) \subset D^\perp_{\Delta_Q}(z)$ を示す．$(v_z,\alpha_z) \in D_{\Delta_Q}(z)$ および $(v'_z,\alpha'_z) \in D_{\Delta_Q}(z)$ とすると，

$$\alpha_z(v'_z) + \alpha'_z(v_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z,v'_z) + \Omega_{\Delta_Q}(z)(v'_z,v_z) = 0$$

である．よって，$D_{\Delta_Q}(z) \subset D^\perp_{\Delta_Q}(z)$ である．

次に，$D^\perp_{\Delta_Q}(z) \subset D_{\Delta_Q}(z)$ を示す．$(u_z,\beta_z) \in D^\perp_{\Delta_Q}(z)$ としよう．$D^\perp_{\Delta_Q}$ の定義によって，$\alpha_z(u_z)+\beta_z(v_z)=0$ が全ての $v_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成立する．さらに，

$$\alpha_z(w_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z,w_z)$$

が全ての $w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成り立つ．そこで，$v_z = 0$ と置くと，$\alpha_z(w_z) = 0$ が全ての $w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成立することから，$\alpha_z \in \Delta^\circ_{T^*Q}(z)$ である．また，全ての $\alpha_z \in \Delta^\circ_{T^*Q}(z)$ に対して，$(0,\alpha_z) \in D_{\Delta_Q}$ であり，(u_z,β_z) は，そのような全ての要素に対しても直交するので，$\alpha_z(u_z) = 0$ が全ての $\alpha_z \in \Delta^\circ_{T^*Q}(z)$ について成り立つ．よって，$u_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ である．

次に，(u_z, β_z) に関して，$\beta_z(v_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(u_z, v_z)$ が全ての $v_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成り立つことを示す．そのために，$v_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ を任意に選び，また，α_z を $\alpha_z(w_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z, w_z)$ が全ての $w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成立するように選ぶ．$\alpha_z(u_z) + \beta_z(v_z) = 0$ が全ての $v_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成立すること，および，既に証明したように，$u_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ であることから，$\Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z, u_z) + \beta_z(v_z) = 0$ が全ての $v_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について成立する．すなわち，$\beta_z(v_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(u_z, v_z)$ が全ての $v_z \in \Delta_{T^*Q}(z)$ について満たされる．こうして，$(u_z, \beta_z) \in D_{\Delta_Q}(z)$ が成り立つ．以上より，$D_{\Delta_Q}^{\perp} \subset D_{\Delta_Q}$ となり，$D_{\Delta_Q}^{\perp} = D_{\Delta_Q}$ であることが示された．□

D_{Δ_Q} を Δ_Q から誘導される T^*Q 上のディラック構造と呼ぶ．D_{Δ_Q} に関して，式 (1) と等価な表現を下記のように与えることができる．

命題 2.5. 写像 $\Omega^\flat : TT^*Q \to T^*T^*Q$ を余接バンドル T^*Q 上の正準シンプレクティック構造 Ω から誘導されるバンドル写像とすると，T^*Q 上に誘導されたディラック構造は，

$$D_{\Delta_Q}(z) = \{ (w_z, \alpha_z) \in T_zT^*Q \times T_z^*T^*Q \mid w_z \in \Delta_{T^*Q}(z), \\ \alpha_z - \Omega^\flat(z) \cdot w_z \in \Delta^\circ_{T^*Q}(z) \} \tag{2}$$

と表すことができる．

ディラック構造の局所表現　ディラック構造の局所表現について考えよう．n 次元の配位多様体 Q が $\mathbb{R}^n$ の開集合 U によって表されるように，Q の局所座標 $q^1, ..., q^n$ を選ぶ．拘束ディストリビューション Δ_Q は，各点 $q \in U$ で $\Delta(q) \subset \mathbb{R}^n$ となるように，TQ の部分空間を定める．拘束部分空間の次元が $n-m$ とすれば，$\Delta(q)$ の基底として $e_{m+1}(q), e_{m+2}(q), \ldots, e_n(q)$ を選ぶことができる．言い換えれば，拘束空間は，拘束 1 形式 $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m$ の核，すなわち，1 形式 $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m$ で張られる $\Delta(q)$ の零化元 $\Delta^\circ(q)$ によって表すことができる．

いま，正準射影 $\pi_Q : T^*Q \to Q$ を局所座標で $(q, p) \mapsto q$ と表し，その微分写像を $T\pi_Q : (q, p, \dot{q}, \dot{p}) \mapsto (q, \dot{q})$ とすると，Δ_{T^*Q} は，局所座標を用いて，

$$\Delta_{T^*Q} \cong \left\{ v_{(q,p)} = (q, p, \dot{q}, \dot{p}) \mid q \in U,\ \dot{q} \in \Delta(q) \right\}$$

と表すことができる．T^*T^*Q における点を $\alpha_{(q,p)} = (q, p, \alpha, w)$ とする．但し，α はコベクトル で w はベクトルである．Δ_{T^*Q} の零化元は，局所的に，

$$\Delta^\circ_{T^*Q} \cong \left\{ \alpha_{(q,p)} = (q, p, \alpha, w) \mid q \in U,\ \alpha \in \Delta^\circ(q),\ w = 0 \right\}$$

と表される．いま，シンプレクティック形式についての局所表現から

$$\Omega^\flat(z) \cdot v_z = (q, p, -\dot{p}, \dot{q})$$

となり，式 (2) における条件 $\alpha_z - \Omega^\flat(z)\cdot v_z \in \Delta^\circ_{T^*Q}$ より，各点 $z=(q,p)$ で，

$$(q,p,\alpha+\dot{p},w-\dot{q}) \in \Delta^\circ_{T^*Q}$$

となる．すなわち，

$$\alpha+\dot{p}\in\Delta^\circ(q) \quad \text{および} \quad w-\dot{q}=0$$

を得る．従って，命題 2.5 より，

$$\begin{aligned} D_{\Delta_Q}(z) &= \{\,(v_z,\alpha_z)\in T_zT^*Q\times T_z^*T^*Q \mid v_z\in\Delta_{T^*Q}(z),\ \alpha_z-\Omega^\flat(z)\cdot v_z\in\Delta^\circ_{T^*Q}(z)\,\} \\ &= \{((q,p,\dot{q},\dot{p}),(q,p,\alpha,w)) \mid \dot{q}\in\Delta(q),\ w=\dot{q},\ \alpha+\dot{p}\in\Delta^\circ(q)\} \end{aligned} \tag{3}$$

を得る．

正準ポアソン構造を用いた表現　命題 2.5 では，T^*Q 上の正準 2 形式 Ω から誘導されるバンドル写像 $\Omega^\flat: TT^*Q\to T^*T^*Q$ を用いて，余接バンドル T^*Q 上に誘導されたディラック構造 D_{Δ_Q} を定義し，その局所表現として，式 (3) を得た．ここでは，T^*Q 上のディラック構造についてポアソン多様体の立場から考えてみよう．すなわち，T^*Q 上では，正準ポアソン構造 $B: T^*T^*Q\times T^*T^*Q\to\mathbb{R}$ が自然に定義され，さらに B からバンドル写像 $B^\sharp: T^*T^*Q\to TT^*Q$ が誘導される．ハミルトン力学では，T^*Q 上のハミルトニアン H の微分 $\mathbf{d}H$ と T^*Q 上のベクトル場 X の関係として，$X=B^\sharp\,\mathbf{d}H$ が与えられることは言うまでもない．

ここで，配位空間 Q 上の拘束ディストリビューション $\Delta_Q\subset TQ$ を与え，射影 $\pi^2: T^*T^*Q\to TQ$ を $\pi^2=T\pi_Q\circ(\Omega^\flat)^{-1}$ と定義すると，T^*Q 上のコディストリビューション $\Delta^*_{T^*Q}\subset T^*T^*Q$ を

$$\Delta^*_{T^*Q}=\Omega^\flat(\Delta_{T^*Q})=(\pi^2)^{-1}(\Delta_Q)$$

のように定義できる．また，

$$\Delta_{T^*Q}=(T\pi_Q)^{-1}(\Delta_Q)=\{v_{(q,p)}=(q,p,v,\alpha)\mid q\in U,\ v\in\Delta(q)\}$$

であることより，コディストリビューションは，局所座標 $q\in U\subset\mathbb{R}^n$ を用いて，

$$\Delta^*_{T^*Q}=\{\alpha_{(q,p)}=(q,p,-\alpha,v)\mid q\in U,\ v\in\Delta(q)\}$$

によって与えられる．$\Delta^*_{T^*Q}$ の零化元は，各点 $z\in T^*Q$ で，

$$\begin{aligned} (\Delta^*_{T^*Q})^\circ(z) &= \{w_z\in T_zT^*Q \mid \langle w_z,\alpha_z\rangle=0,\ \forall\alpha_z\in\Delta^*_{T^*Q}(z)\} \\ &= \{w_{(q,p)}=(q,p,w,\beta)\mid q\in U,\ w=0,\ \beta\in\Delta^\circ(q)\} \end{aligned}$$

によって定義される．

以上より，T^*Q 上のディラック構造は，バンドル写像 $B^\sharp$ を用いて，次のように与えられる．

命題 2.6. T^*Q 上に誘導されたディラック構造 D_{Δ_Q} は，各点 $z \in T^*Q$ で，

$$D_{\Delta_Q}(z) = \{(v_z, \alpha_z) \in T_zT^*Q \times T_z^*T^*Q \mid \alpha_z \in \Delta^*_{T^*Q}(z),\\ v_z - B^\sharp(z) \cdot \alpha_z \in (\Delta^*_{T^*Q})^\circ(z)\}$$

として与えられ，その局所座標表現は，各点 $z = (q, p)$ で，

$$D_{\Delta_Q}(q, p) = \{((q, p, \dot{q}, \dot{p}), (q, p, \alpha, w)) \mid \dot{q} \in \Delta(q),\ \ w = \dot{q},\ \ \alpha + \dot{p} \in \Delta^\circ(q)\} \tag{4}$$

となる．

3　陰的なラグランジュ系

この節では，余接バンドル T^*Q 上に誘導されたディラック構造 D_{Δ_Q} を用いて，陰的なラグランジュ系の定義を行う．この陰的なラグランジュ系の理論は，運動学的拘束を有する退化ラグランジュ系に適用が可能である．

ルジャンドル変換　Q を配位空間とし，ラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ を与えよう．L のファイバー微分と呼ばれる写像 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ を

$$\mathbb{F}L(v) \cdot w = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(v + sw)$$

によって定義する．但し，$v, w \in T_qQ$ であり，$\mathbb{F}L(v) \cdot w$ は，L の v における w 方向のファイバー T_qQ に沿った微分である．写像 $\mathbb{F}L$ はファイバー保存写像であり，各点 $q \in Q$ で，ファイバー T_qQ からファイバー T_q^*Q へ写像される．TQ の局所座標 (q, v) では，L のファイバー微分は，局所座標で，

$$\mathbb{F}L(q, v) = \left(q, \frac{\partial L}{\partial v}\right)$$

と表される．すなわち，

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

となる．ここに，(q, p) は余接バンドル T^*Q の局所座標である．

ラグランジアンが正則な場合，写像 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ は，逆写像を持ち，いわゆるルジャンドル変換のナイーブな定義を与えるが，ラグランジアン L が退化した場合でも，Δ_Q の像 $\mathbb{F}L(\Delta_Q)$ は，運動量相空間の拘束部分空間として意味を持つ．

以下に，ラグランジアンが退化している場合を含めて，陰的なラグランジュ系の理論的な枠組みを見てみよう．

ディラック微分作用素　陰的なラグランジュ系を定義するための道具として，ラグランジアン（退化していても良い）のディラック微分を定義する．

そのために，まず，T^*TQ と T^*T^*Q の間の微分同相写像

$$\gamma_Q = \Omega^\flat \circ (\kappa_Q)^{-1} : T^*TQ \to T^*T^*Q$$

を考える．上において，$\Omega^\flat : TT^*Q \to T^*T^*Q; (q,p,\delta q,\delta p) \mapsto (q,p,-\delta p,\delta q)$ は Ω から誘導されるバンドル写像である．また， $\kappa_Q : TT^*Q \to T^*TQ$ は，自然に誘導される微分同相写像であり，局所的に，

$$(q,p,\delta q,\delta p) \mapsto (q,\delta q,\delta p,p)$$

と表される．これは，TT^*Q 上のシンプレクティック構造 $\Omega_{TT^*Q} = dq \wedge d\delta p + d\delta q \wedge dp$ を不変に保つシンプレクティック同相写像である（Tulczyjew [1977]）．$\Omega^\flat$ と κ_Q の局所座標表現を用いて，

$$\gamma_Q = \Omega^\flat \circ (\kappa_Q)^{-1} : (q,\delta q,\delta p,p) \mapsto (q,p,-\delta p,\delta q)$$

となる．

次に，$L : TQ \to \mathbb{R}$ をラグランジアンとし，(q,v) を接バンドル TQ の局所座標とする．L の微分は TQ 上の 1 形式であり，写像 $\mathbf{d}L : TQ \to T^*TQ$ として，局所的に，

$$\mathbf{d}L = \left(q, v, \frac{\partial L}{\partial q}, \frac{\partial L}{\partial v}\right)$$

と書ける．

定義 3.1. $L : TQ \to \mathbb{R}$ に作用する，ディラック微分と呼ばれる微分作用素 $\mathfrak{D}$ を

$$\mathfrak{D}L = \gamma_Q \circ \mathbf{d}L \tag{5}$$

として定義する．$\mathfrak{D}L : TQ \to T^*T^*Q$ は，T^*T^*Q 上の局所座標を用いて，

$$\mathfrak{D}L = \left(q, \frac{\partial L}{\partial v}, -\frac{\partial L}{\partial q}, v\right)$$

と表される．但し，$p = \partial L/\partial v$ である．

陰的なラグランジュ系　$L : TQ \to \mathbb{R}$ をラグランジアン（退化していても良い）とし，$\Delta_Q \subset TQ$ を配位空間 Q 上の拘束ディストリビューションとする．T^*Q 上のディラック構造 D_{Δ_Q} を式 (1) で与え，また，L のディラック微分 $\mathfrak{D}L : TQ \to T^*T^*Q$ を式 (5) で定義する．さらに，ルジャンドル変換による Δ_Q の像を $P = \mathbb{F}L(\Delta_Q) \subset T^*Q$ とする．

定義 3.2. 下記の条件を満たす (L, Δ_Q, X) を陰的なラグランジュ系と呼ぶ．

$$(X, \mathfrak{D}L) \in D_{\Delta_Q}. \tag{6}$$

但し，X は P の各点 (q, p) で定義された T^*Q 上のベクトル場である．上式は，各点 $v_q \in \Delta_Q(q)$ で，$(q, p) = \mathbb{F}L(q, v) \in P$ とともに，

$$(X(q,p), \mathfrak{D}L(q,v)) \in D_{\Delta_Q}(q,p)$$

であることを意味する．

上記の定義において，$\Delta_Q = TQ$ の場合，ルジャンドル変換によって定義される P は，ディラックの拘束理論の意味で，1 次拘束の空間と一致する．すなわち，ここで，我々が扱う $P = \mathbb{F}L(\Delta_Q)$ は，拘束ディストリビューション $\Delta_Q \subset TQ$ を含むものであり，ディラックの拘束理論における 1 次拘束を一般化したものである．これを運動量拘束空間と呼ぶことにしよう．また，各点 $z = (q, p) \in P$ で，ルジャンドル変換

$$(q,p) = \left(q, \frac{\partial L}{\partial v}\right)$$

によって，式 (6) においてベース点の一致条件が満たされていることは言うまでもない．

定義 3.3. 陰的なラグランジュ系 (L, Δ_Q, X) の解曲線 $(q(t), v(t)) \in \Delta_Q$, $t_1 \le t \le t_2$ は，$(q(t), p(t)) = \mathbb{F}L(q(t), v(t))$ のもと，$(q(t), p(t))$ がベクトル場 X の積分曲線となるように与えられる．

ベース点の一致条件から，陰的なラグランジュ系 (L, Δ_Q, X) の解曲線は，滑らかな曲線 $(q(t), v(t), p(t))$ と等価である．ここに，$t_1 \le t \le t_2$ であり，その像は，$\Delta_Q \oplus P \subset TQ \oplus T^*Q$ の点であり，さらに，$(q(t), p(t))$ がベクトル場 X の積分曲線であり，かつ

$$(X(q(t),p(t)), \mathfrak{D}L(q(t),v(t))) \in D_{\Delta_Q}(q(t),p(t))$$

を満たす．

具体例：$\Delta_Q = TQ$ の場合　この場合は，運動学的拘束がない最も簡単な例であるが，ラグランジアンは退化していてもよい．そこで，ラグランジアンの退化性によって，ディラックの意味の 1 次拘束を含む場合を考える．このとき，ディラック構造 D_{Δ_Q} は，各点 $z \in T^*Q$ で，

$$D_{\Delta_Q}(z) = \{(v_z, \alpha_z) \in T_zT^*Q \times T_z^*T^*Q \mid \alpha_z(w_z) = \Omega_z(v_z, w_z),\ \forall w_z \in T_zT^*Q\}$$

と与えられる．T^*Q の局所座標として，$z = (q, p)$ を用いて，$P \subset T^*Q$ で定義される T^*Q 上のベクトル場を $X = (q, p, \dot{q}, \dot{p})$ と書き，さらに，正準シンプレクティック構造の座標表現

$$\Omega\left((q, p, u_1, \alpha_1), (q, p, u_2, \alpha_2)\right) = \langle \alpha_2, u_1 \rangle - \langle \alpha_1, u_2 \rangle$$

と L のディラック微分の局所表現

$$\mathfrak{D}L = \left(q, \frac{\partial L}{\partial v}, -\frac{\partial L}{\partial q}, v\right)$$

を用いると，陰的なラグランジュ系 $(X, \mathfrak{D}L) \in D_{\Delta_Q}$ の座標表現は，

$$\left\langle -\frac{\partial L}{\partial q}, u \right\rangle + \langle v, \alpha \rangle = \langle \alpha, \dot{q} \rangle - \langle \dot{p}, u \rangle$$

が全ての u と α について成立する条件として与えられる．但し，(u, α) は，$T_{(q,p)}T^*Q$ の点の局所表現である．上記の条件が全ての (u, α) で成立することから，

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{7}$$

とともに，

$$\dot{q} = v \tag{8}$$

が導かれる．さらに，ベース点が一致する条件，すなわち，ルジャンドル変換

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} \tag{9}$$

を伴うことから，これら 3 つの式がオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

と等価であることは明らかである．このように，$(L, \Delta_Q = TQ, X)$ が，陰に，オイラー・ラグランジュ方程式を含むことから，式 (7)–(9) を陰的なオイラー・ラグランジュ方程式と呼ぶことにする．

上の関係を一般化して，非自明な拘束ディストリビューション Δ_Q が与えられた場合の陰的なラグランジュ系の局所表現について，次の命題が成立する．

命題 3.4. 陰的なラグランジュ系に関する条件 $(X, \mathfrak{D}L) \in D_{\Delta_Q}$ より，その局所表現は，

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \dot{q} \in \Delta(q), \quad v = \dot{q}, \qquad \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q} \in \Delta^\circ(q) \tag{10}$$

によって与えられる．

証明. 陰的なラグランジュ系 $(X, \mathfrak{D}L) \in D_{\Delta_Q}$ の条件は，局所的に，

$$\left\langle -\frac{\partial L}{\partial q}, u \right\rangle + \langle v, \alpha \rangle = \langle \alpha, \dot{q} \rangle - \langle \dot{p}, u \rangle$$

が全ての $u \in \Delta_Q$ と α について成立することから，式 (10) が得られる． □

具体例：非ホロノミック系 Q を配位多様体とする．Q 上のディストリビューション Δ_Q を与え，Q が開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ によって表されるように，Q の局所座標 q^i をとる．拘束空間 Δ_Q は，接バンドル TQ の部分空間であり，各点 $q \in U$ で，$\Delta(q) \subset \mathbb{R}^n$ と表すことができる．この拘束空間 $\Delta(q)$ の次元が各点 q で $n-m$ であるとき，$\Delta(q)$ のベースとして，$e_{m+1}(q), e_{m+2}(q), \ldots, e_n(q)$ を選ぶことができる．また，零化元 $\Delta^\circ(q)$ は 1 形式 $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m$ によって張られるとすると，

$$\Delta(q) = \{v^i \in \mathbb{R}^n \mid \omega_i^a(q)\, v^i = 0, \ \ a = 1, \ldots, m\}$$

となる．ここに，$\omega^a = \omega_i^a(q)\, dq^i$，$a = 1, \ldots, m$ である．ラグランジュの未定乗数 μ_a，$a = 1, \ldots, m$ を用いて，非ホロノミック系は，陰的なラグランジュ系 (L, Δ_Q, X) として，式 (10) の局所表現によって

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial L}{\partial q^i} \\ v^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_a\, \omega_i^a(q) \end{pmatrix}, \\
p_i &= \frac{\partial L}{\partial v^i}, \\
0 &= \omega_i^a(q)\, v^i
\end{aligned}$$

と表すことができる．

2階のベクトル場の条件 陰的なオイラー・ラグランジュ方程式の導出では，

$$v = \dot{q}$$

の条件式を含むが，この式は，ラグランジュ力学において，運動方程式とは別に要請される，いわゆる 2 階のベクトル場の条件である（Abraham and Marsden [1978]）．

系 3.5. $(q(t), v(t))$ を陰的なラグランジュ系 (L, Δ_Q, X) の解曲線とすると，$v(t) = \dot{q}(t) \in \Delta_Q$ となる．

証明. これは，式 (10) からの直接の帰結として明らか． □

エネルギーの保存　以下のように，一般化エネルギー $E : TQ \oplus T^*Q \to \mathbb{R}$ を

$$E(q,v,p) = p \cdot v - L(q,v)$$

のように定義する．ここに，$(q,v) \in \Delta_Q$ および $(q,p) \in P$ である．ポントリヤーギンの最大原理 (Bloch2003 [2003]) より，一般化エネルギー $E(q,v,p) = p \cdot v - L(q,v)$ の v に関する停留条件から，ルジャンドル変換 $p = \partial L/\partial v$ が導かれる．そこで，部分多様体 $\mathcal{K}$ を

$$\mathcal{K} = \left\{ (q,v,p) \in TQ \oplus T^*Q \;\middle|\; v \in \Delta_Q(q),\ p = \frac{\partial L}{\partial v} \right\}$$

として定義する．

陰的なラグランジュ系は，次のように，エネルギー保存が成立する．

命題 3.6. $(q(t), v(t), p(t)) \in \mathcal{K}$ を陰的なラグランジュ系 (L, Δ_Q, X) の解曲線とする．このとき，エネルギー $E(q(t), v(t), p(t))$ は，時間 t に関して一定である．

証明. 式 (10) と一般化エネルギー E の定義より，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E &= \langle \dot{p}, v \rangle + \langle p, \dot{v} \rangle - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial v}\dot{v} \\ &= \left\langle \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q}, v \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

が成立する．但し，$v = \dot{q} \in \Delta(q)$ および $\dot{p} - \partial L/\partial q \in \Delta^\circ(q)$ であり，ルジャンドル変換 $p = \partial L/\partial v$ を用いた． □

一般化エネルギーと陰的なラグランジュ系　陰的なラグランジュ系の条件

$$(X, \mathfrak{D}L) \in D_{\Delta_Q}$$

は，一般化エネルギー $E(q,v,p) = p \cdot v - L(q,v)$ を用いて，各点 $(q,v) \in \Delta_Q$ について，

$$\left(X(q,p), \mathbf{d}E(q,v,p)|_{T_{(q,p)}T^*Q} \right) \in D_{\Delta_Q}(q,p)$$

が成立する条件によって言い換えられる．但し，$(q,p) = \mathbb{F}L(q,v) \in P$ であり，一般化エネルギー $E(q,v,p) = p \cdot v - L(q,v)$ は，ポントリヤーギンバンドル $TQ \oplus T^*Q$ 上の関数であるので，その微分は，写像 $\mathbf{d}E : TQ \oplus T^*Q \to T^*(TQ \oplus T^*Q)$ で与えられる．さらに，局所的には，

$$\begin{aligned}\mathbf{d}E &= \left(q, v, p, \frac{\partial E}{\partial q}, \frac{\partial E}{\partial v}, \frac{\partial E}{\partial p} \right) \\ &= \left(q, v, p, -\frac{\partial L}{\partial q}, p - \frac{\partial L}{\partial v}, v \right)\end{aligned}$$

と表され，ポントリヤーギン・バンドル$TQ\oplus T^*Q$の各点(q,v,p)における接空間$T_{(q,v,p)}(TQ\oplus T^*Q)$上の関数，すなわち，

$$\mathbf{d}E(q,v,p):T_{(q,v,p)}(TQ\oplus T^*Q)\to\mathbb{R}$$

と考えることができる．先述の通り，ルジャンドル変換$P=\mathbb{F}L(\Delta_Q)$が，一般化エネルギーのvに関する停留条件

$$\frac{\partial E}{\partial v}=p-\frac{\partial L}{\partial v}=0$$

から導かれることに留意して，$\mathbf{d}E$を$T_{(q,p)}T^*Q$に制限して，

$$\mathbf{d}E(q,v,p)|_{T_{(q,p)}T^*Q}:T_{(q,p)}T^*Q\to\mathbb{R}$$

なる関数を考える．局所座標を用いて表すと，

$$\mathbf{d}E(q,v,p)|_{T_{(q,p)}T^*Q}=\left(q,p,-\frac{\partial L}{\partial q},v\right)$$

となる．但し，

$$(q,p)=\left(q,\frac{\partial L}{\partial v}\right)$$

である．こうして，陰的なラグランジュ系(L,Δ_Q,X)に関する条件，すなわち，

$$(X,\mathfrak{D}L)\in D_{\Delta_Q}$$

は，ルジャンドル変換$P=\mathbb{F}L(\Delta_Q)$とともに，

$$(X,\mathbf{d}E|_{T_PT^*Q})\in D_{\Delta_Q}$$

なる条件として言い換えることができる．

4 応用例

例1：床の上を滑らずに転がる垂直ディスク（非ホロノミック系） 陰的なラグランジアン系の例として，xy平面上を垂直に滑らずに転がるディスクを考えよう．xy平面上を垂直に運動するディスクの接地点の座標をxとyとしよう．また，ディスクの中心軸周りの回転角をθとし，xz平面に対するディスクの向きをφとする．この垂直ディスクの配位空間は，$Q=\mathbf{R}^2\times S^1\times S^1$であり，局所座標は$q=(x,y,\theta,\varphi)\in U\subset\mathbb{R}^4$と表される．さらに，接地点で滑らずに転がる拘束は，$\Delta_Q\subset TQ$によって，各点$q\in U$に対して，局所座標$v_q=(v_x,v_y,v_\theta,v_\varphi)\in\mathbb{R}^4$を用いて，

$$\Delta(q)=\{v^i\in\mathbb{R}^4\mid\langle\omega^r(q),v_q\rangle=0,\quad r=1,2\}$$

として与えられる．1形式ω^rは，局所的に，

$$\omega^1 = dx - R(\cos\varphi)\,d\theta, \quad \omega^2 = dy - R(\sin\varphi)\,d\theta$$

と表され，完全積分可能でないことから，この拘束は非ホロノミックである．また，$\omega^r(q)$はΔの零化元Δ°を張っている．$\Delta_Q \subset TQ$を$\Delta_{T^*Q} = (T\pi_Q)^{-1}(\Delta_Q)$のようにリフトすることによって$T^*Q$上のディストリビューションを定義し，局所座標を用いて，

$$\Delta_{T^*Q} \cong \left\{v_{(q,p)} = (q,p,\dot{q},\dot{p}) \mid q \in U,\ \dot{q} \in \Delta(q)\right\}$$

と表す．T^*T^*Qにおける点の局所座標を$\alpha_{(q,p)} = (q,p,\alpha,w)$とすると，$\Delta_{T^*Q}$の零化元は，局所的に，

$$\Delta^\circ_{T^*Q} \cong \left\{\alpha_{(q,p)} = (q,p,\alpha,w) \mid q \in U,\ \alpha \in \Delta^\circ(q),\ w = 0\right\}$$

と表される．これより，T^*Q上に誘導されるディラック構造$D_{\Delta_Q} \subset TT^*Q \oplus T^*T^*Q$は，各点$(q,p)$に対して，

$$D_{\Delta_Q}(q,p) = \{((q,p,\dot{q},\dot{p}),(q,p,\alpha,w)) \mid \dot{q} \in \Delta(q),\ w = \dot{q},\ \alpha + \dot{p} \in \Delta^\circ(q)\}$$

と定義できる．

この系のラグランジアン$L : TQ \to \mathbb{R}$は，

$$L(q,v) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}Iv_\theta^2 + \frac{1}{2}Jv_\varphi^2$$

と与えられる．ここに，mはディスクの質量，IとJはディスクの慣性モーメントである．よって，ラグランジアンの微分は

$$\begin{aligned}\mathbf{d}L(q,v) &= \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \theta}, \frac{\partial L}{\partial \varphi}, \frac{\partial L}{\partial v_x}, \frac{\partial L}{\partial v_y}, \frac{\partial L}{\partial v_\theta}, \frac{\partial L}{\partial v_\varphi}\right) \\ &= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ mv_x,\ mv_y,\ Iv_\theta,\ Jv_\varphi)\end{aligned}$$

であり，さらに，ラグランジアンのディラック微分は，微分同相写像$\gamma_Q = \Omega^\flat \circ (\kappa_Q)^{-1} : T^*TQ \to T^*T^*Q$を用いて

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}L(q,v) &= \left(-\frac{\partial L}{\partial x}, -\frac{\partial L}{\partial y}, -\frac{\partial L}{\partial \theta}, -\frac{\partial L}{\partial \varphi},\ v_x,\ v_y,\ v_\theta,\ v_\varphi\right) \\ &= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ v_x,\ v_y,\ v_\theta,\ v_\varphi)\end{aligned}$$

となる．

次に，T^*Q上のベクトル場Xを，局所座標$(q,p) = (x,y,\theta,\varphi,\ p_x,p_y,p_\theta,p_\varphi) \in T^*Q$を用いて，$X(q,p) = (\dot{q},\dot{p}) = (\dot{x},\dot{y},\dot{\theta},\dot{\varphi},\ \dot{p}_x,\dot{p}_y,\dot{p}_\theta,\dot{p}_\varphi)$と表す．

陰的なラグランジュ系の条件は，$(X, \mathfrak{D}L)$ は，ディラック構造 D_{Δ_Q} の切断となること，すなわち，各点 $(q, p) \in T^*Q$ で，$(q, p) = \mathbf{F}L(q, v)$ とともに，

$$(X(q, p), \mathfrak{D}L(q, v)) \in D_{\Delta_Q}(q, p)$$

が成立することから，以下の，陰的なラグランジュ系の運動方程式を得る．

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \hline \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_\theta \\ \dot{p}_\varphi \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline v_x \\ v_y \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -R\cos\varphi & -R\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

但し，上記の運動方程式に対して，ルジャンドル変換として

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m v_x \\ m v_y \\ I v_\theta \\ J v_\varphi \end{pmatrix}$$

と非ホロノミック拘束

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 & -R\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{pmatrix}$$

を伴う．

例２：渦点（退化したラグランジュ系）　渦点 (Rowley and Marsden [2002]) や KdV 方程式 (Marsden and Ratiu [1999]) に現れるラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ は，次に示す形で与えられる．

$$L(q^i, v^i) = \langle \alpha_i(q^j), v^i \rangle - h(q^i),\ i, j = 1, \ldots, n.$$

但し，α は Q 上の 1 形式であり，h は Q 上のポテンシャルである．この系には，運動学的な拘束はないが，上記のラグランジアンは，速度に関して 1 次であり，明らかに退化している．

このタイプの退化ラグランジュ系の運動方程式は，陰的なラグランジュ系 $(L, \Delta_Q = TQ, X)$ として，下記のように表される．

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= v^i, \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial \alpha_j(q)}{\partial q^i} v^j - \frac{\partial h(q)}{\partial q^i}, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial v^i} = \alpha_i(q). \end{aligned}$$

但し，$X = (q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ は T^*Q 上のベクトル場である．

例3：L-C回路（運動学的拘束を持つ退化ラグランジュ系）　ここでは，運動学的拘束を有する退化ラグランジュ系として，L-C直列回路を考える．L-C回路については，陰的なハミルトン系の枠組みでも考察されているが (Bloch and Crouch [1997]; van der Schaft [1998])，そこでは，ポアソン多様体上のディラック構造を用いて定式化が行われており，回路を退化ラグランジュ系としては取り扱っていない．

回路システムを考察するにあたり，力学とのアナロジーを考える．すなわち，力学における配位空間は，物体（質点）の位置を定める空間として考えるが，力学に置ける『位置』と回路における『電荷』の間のアナロジーをとって，回路システムの配位空間として電荷の空間を考える．回路システムの電荷の配位空間 Q では，局所座標 q^i が各ポート（回路の枝）に接続する構成要素の電荷を表す．Q の接バンドル TQ は，電流相空間と考えることができ，その局所座標 $f \in T_qQ$ は各ポートの電流（枝電流）を表す．一方，余接バンドル T^*Q は，磁束相空間であり，その局所座標 $p \in T_q^*Q$ は各ポートの磁束（枝磁束）を表す．

いま，1つのインダクター L と2つのキャパシター C_1 と C_2 から構成される3ポートのL-C直列回路を考える．電荷配位空間 Q は，3次元のユークリッド空間 $E = \mathbb{R}^3$ であり，すなわち，$Q \cong E$ である．電流相空間は $TQ \cong TE$ であり，磁束相空間は $T^*Q \cong T^*E$ と表される．ここで，局所座標を，$q = (q_L, q_{C_1}, q_{C_2}) \in E$ および $f = (f_L, f_{C_1}, f_{C_2}) \in T_qE$ と置き，力学における運動エネルギーとのアナロジーで，L-C回路におけるインダクター L に関する磁束エネルギー $T : TE \to \mathbb{R}$ を

$$T_q(f) = \frac{1}{2} L \, (f_L)^2$$

と定義する．また，キャパシター C_1, C_2 による静電ポテンシャルエネルギー $V : E \to \mathbb{R}$ を

$$V(q) = \frac{1}{2} \frac{(q_{C_1})^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{(q_{C_2})^2}{C_2}$$

と定義する．従って，L-C 回路のラグランジアン $\mathcal{L}: TE \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q,f) &= T_q(f) - V(q) \\ &= \frac{1}{2}L\,(f_L)^2 - \frac{1}{2}\frac{(q_{C_1})^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{(q_{C_2})^2}{C_2}\end{aligned} \tag{11}$$

と定義できる．キルヒホッフの電流則によって与えられる，L-C 直列回路の各ポート電流に関する KCL 拘束は，力学に置ける運動学的拘束に相当し，各点 $q \in E$ で，

$$\Delta_q = \{f \in T_qE \mid \langle \omega^a, f \rangle = 0,\ a = 1, 2\}$$

のように表される．但し，$f = (f_1, f_2, f_3) = (f_L, f_{C_1}, f_{C_2}) \in T_qE$ であり，ω^a は 2 つの独立した 1 形式（またはコベクトル）であり，局所座標を用いて，

$$\omega^a = \omega^a_k\, dq^k, \quad a = 1, 2;\ k = 1, 2, 3$$

と書ける．ここに，$q = (q^1, q^2, q^3) = (q_L, q_{C_1}, q_{C_2})$ であり，係数 ω^a_k は，

$$\omega^a_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である[2]．キルヒホッフの電流則は，各点 $q \in E$ で，KCL 拘束部分空間 $\Delta_q \subset T_qE$ を定め，局所座標を用いて，

$$\begin{aligned} -f_L + f_{C_1} &= 0, \\ -f_L + f_{C_2} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

と与えられる．

一方，Δ の零化元 Δ° は，キルヒホッフの電圧則による KVL 拘束部分空間を定める．すなわち，各点 $q \in E$ で，

$$\Delta^\circ_q = \{e \in T^*_qE \mid \langle e, f \rangle = 0,\ \forall\, f \in \Delta_q\}$$

として与えられる．ここで，$e \in \Delta^\circ_q$ は，KVL 拘束空間におけるコベクトルを表し，未定乗数 μ_a によって

$$e_k = \mu_a\, \omega^a_k, \quad a = 1, 2,\ k = 1, 2, 3$$

と書くことができる．但し，$e = (e_1, e_2, e_3) = (e_L, e_{C_1}, e_{C_2})$ である．

いま，式 (11) で与えられたラグランジアン $\mathcal{L}: TE \to \mathbb{R}$ について，

$$\det \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial f^i \partial f^j} \right] = 0$$

[2] 1 形式 ω^a は完全積分可能であり，KCL 拘束はホロノミック拘束である．

となることから，このL-C直列回路が退化ラグランジュ系であることは明らかである．

そこで，ルジャンドル変換の$\Delta \subset TE$の像として，磁束拘束相空間

$$P = \mathbb{F}\mathcal{L}(\Delta) \subset T^*E$$

を定義する．局所座標$(q, f) = (q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, f_L, f_{C_1}, f_{C_2}) \in \Delta \subset TE$を用いて，ルジャンドル変換$(q, p) = \mathbb{F}\mathcal{L}(q, f) \in T^*E$を計算すると，

$$\begin{aligned}(q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, p_L, p_{C_1}, p_{C_2}) &= \left(q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_L}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{C_1}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{C_2}}\right) \\ &= (q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, L f_L, 0, 0)\end{aligned}$$

となる．よって，

$$p_L = L f_L, \quad p_{C_1} = p_{C_2} = 0$$

であり，$p_{C_1} = 0, p_{C_2} = 0$は，ディラックの意味での1次拘束に相当する．

Pの各点で定義されるT^*E上のベクトル場Xを

$$X(q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, p_L, 0, 0) = (\dot{q}_L, \dot{q}_{C_1}, \dot{q}_{C_2}, \dot{p}_L, 0, 0) \tag{13}$$

と書く[3]．また，ラグランジアンの微分$\mathbf{d}\mathcal{L} = (q, f, \partial\mathcal{L}/\partial q, \partial\mathcal{L}/\partial f)$は，

$$\mathbf{d}\mathcal{L}(q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, f_L, f_{C_1}, f_{C_2}) = \left(0, -\frac{q_{C_1}}{C_1}, -\frac{q_{C_2}}{C_2}, L f_L, 0, 0\right)$$

となることから，ラグランジアンのディラック微分$\mathfrak{D}\mathcal{L} = (q, \partial\mathcal{L}/\partial f, -\partial\mathcal{L}/\partial q, f)$は，

$$\mathfrak{D}\mathcal{L}(q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, f_L, f_{C_1}, f_{C_2}) = \left(0, \frac{q_{C_1}}{C_1}, \frac{q_{C_2}}{C_2}, f_L, f_{C_1}, f_{C_2}\right) \tag{14}$$

となる．

KCL拘束ディストリビューション$\Delta \subset TE$から誘導されるT^*E上のディストリビューションΔ_{T^*E}は，局所的に，

$$\Delta_{T^*E} \cong \{v_{(q,p)} = (q, p, \dot{q}, \dot{p}) \mid q \in U, \ \dot{q} \in \Delta(q)\}$$

と定義できる．T^*T^*Eの点を$\alpha_{(q,p)} = (q, p, \alpha, w)$と表すと，$\Delta_{T^*E}$の零化元は，局所的に，

$$\Delta^{\circ}_{T^*E} \cong \{\alpha_{(q,p)} = (q, p, \alpha, w) \mid q \in U, \ \alpha \in \Delta^{\circ}(q), \ w = 0\}$$

と表される．これより，T^*E上に誘導されるディラック構造$D_\Delta \subset TT^*E \oplus T^*T^*E$は，各点$(q, p) \in T^*E$に対して，

$$D_\Delta(q, p) = \{((q, p, \dot{q}, \dot{p}), (q, p, \alpha, w)) \mid \dot{q} \in \Delta(q), \ w = \dot{q}, \ \alpha + \dot{p} \in \Delta^{\circ}(q)\} \tag{15}$$

[3]ディラックの意味での整合性の条件から2次拘束$\dot{p}_{C_1} = 0, \dot{p}_{C_2} = 0$が課されていることに注意せよ．

として定義できる.

よって，式 (13)，(14) および (15) より，ルジャンドル変換 $(q,p)=\mathbb{F}\mathcal{L}(q,f)$ とともに，各点 (q,p) で

$$(X(q,p),\mathfrak{D}\mathcal{L}(q,f))\in D_{\Delta}(q,p)$$

が全ての $(q,f)\in\Delta\subset TE$ について成立することから，L-C 直列回路は，陰的なラグランジュ系 $(\mathcal{L},\Delta,X)$ として，局所座標を用いて，以下のように表される.

$$\begin{pmatrix}\dot{q}_L\\ \dot{q}_{C_1}\\ \dot{q}_{C_2}\\ \hline \dot{p}_L\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\ \hline -1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{q_{C_1}}{C_1}\\ \frac{q_{C_2}}{C_2}\\ \hline f_L\\ f_{C_1}\\ f_{C_2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\ \hline 0&1\\1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}.$$

但し，上式は，ルジャンドル変換

$$p_L=L\,f_L$$

とキルヒホッフ電流則

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_L\\ f_{C_1}\\ f_{C_2}\end{pmatrix}$$

を随伴する.

最終的に，L-C 直列回路のダイナミクスは，以下の，微分代数方程式によって与えられる.

$$\begin{aligned}&\dot{q}_L=f_L,\ \dot{q}_{C_1}=f_{C_1},\ \dot{q}_{C_2}=f_{C_2},\\ &\dot{p}_L=\mu_2,\ \mu_1=\frac{q_{C_1}}{C_1},\ \mu_2=-\mu_1-\frac{q_{C_2}}{C_2},\\ &p_L=L\,f_L,\ f_L=f_{C_1},\ f_L=f_{C_2}.\end{aligned}$$

5 おわりに

本稿では，シンプレクティック構造とポアソン構造の両者を一般化したディラック構造に関連して，特に，物理学や工学上の応用として重要となる余接バンドル上に誘導されるディラック構造について述べた．その上で，ディラック構造を基にして定義される陰的なラグランジュ力学の理論的な枠組みについて概説した．この理論では，非ホロノミックな運動学的拘束を有する，退化ラグランジアン系について扱うことが可能となる．応用例として，最も簡単な非ホロノミック系である，床の上を滑らずに転がる垂直ディスクの系，退

化ラグランジュ系の例として渦点の系とL-C直列回路を示し，これらがディラック構造と陰的なラグランジュ系の枠組みで定式化できることを示した．

なお，ディラック構造と陰的なラグランジュ系の理論に関する詳細，および，本稿では触れなかった，陰的ラグランジュ系の変分構造や陰的な拘束ラグランジュ系などについては，Yoshimura and Marsden [2006] を参照されたい．

6 謝 辞

本研究は，カリフォルニア工科大学の Jerrold E. Marsden 教授との共同研究の成果に基づいている．ここに同教授に感謝の意を表します．また，本研究の一部は，日本学術振興会・科学研究費基盤 (C) 課題番号 1650216 の支援を受けている．

参考文献

Abraham, R. and J. E. Marsden (1978). *Foundations of Mechanics.* Benjamin-Cummings Publ. Co, Updated 1985 version, reprinted by Persius Publishing, second edition.

Blankenstein, G. and T. S. Ratiu (2004). Singular reduction of implicit Hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.* **53**, 211–260.

Bloch, A. M. and P. E. Crouch (1997). Representations of Dirac structures on vector spaces and nonlinear L–C circuits. In: *Differential Geometry and Control (Boulder, CO, 1997).* Vol. 64. pp. 103–117. Amer. Math. Soc. Providence, RI.

Bloch, A. M. (2003). *Nonholonomic Mechanics and Control,* volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics.* Springer-Verlag, New York. With the collaboration of J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden, and with scientific input from P. S. Krishnaprasad, R. M. Murray and D. Zenkov.

Chua, L. O., Desoer, C. A. and Kuh, D. A. (1987). *Linear and Nonlinear Circuits.* McGraw-Hill Inc.

Courant, T. J. (1990). Dirac manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **319**, 631–661.

Courant, T. and A. Weinstein (1988). Beyond Poisson structures. In: *Action hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie (Lyon, 1986).* Vol. 27. pp. 39–49. Hermann. Paris.

Dirac, P. A. M. (1950). Generalized Hamiltonian dynamics. *Canadian J. Math.* **2**, 129–148.

Dirac, P. A. M. (1964). *Lectures on Quantum Mechanics.* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University. New York.

Marsden, J. E. and T. S. Ratiu (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry.* 2nd ed.. Springer-Verlag, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics.*

Rowley, C. W. and J. E. Marsden (2002). Variational integrators for degenerate Lagrangians, with application to point vortices. *41st IEEE Conference on Decision and Control,* pp. 1521–1527.

Tulczyjew, W. M. (1977). The Legendre transformation. *Ann. Inst. H. Poincaré* **Sect. A 27 (1)**, 101–114.

van der Schaft, A. J. (1998). Implicit Hamiltonian systems with symmetry. *Rep. Math. Phys.* **41**, 203–221.

van der Schaft, A. J. and B. M. Maschke (1995). The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik* **49**, 362–371.

Yoshimura, H. and J. E. Marsden (2006). Dirac structures in mechanics. Part I: Implicit Lagrangian systems, Part II: Variational structures. *Journal of Geometry and Physics,* published online, April, 2006.