数理解析研究所講究録
1500 巻 2006 年 26-45

非可換行列式とその応用

早稲田大学理工学部　鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)*
School of Science and Engineering, Waseda Univ.

概要

線形代数において，行列式の概念は必要不可欠なものである．そして，通常の行列式は成分が可換な元からなる行列に対して定義されている．しかしながら，最近では数学や数理物理の様々な場面で，非可換成分行列の線形代数が必要となっている．そこで扱われているものは，例えば四元数行列の場合，Study 行列式，Moore 行列式，…，不変式論では Capelli 行列式，…，数理物理では超行列式，量子行列式など，各対象ごとに様々な非可換行列式が研究されている．このような状況の下，それらを統一的に扱うものとして，'91 年に I.M.Gelfand と V.S.Retakh によって導入された quasideterminant がある．これについていくつかの例を計算してみたので，ここに報告する．

1 Introduction

非可換掃き出し法

R: (可換とは限らない) 結合代数

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in R$

の逆行列を「非可換掃き出し法」により，適当な仮定の下で求めることを考えると，自然に **quasideterminant** が登場する．

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{22}^{-1}a_{21} & 1 & 0 & a_{22}^{-1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} & 0 & 1 & -a_{12}a_{22}^{-1} \\ a_{22}^{-1}a_{21} & 1 & 0 & a_{22}^{-1} \end{array}\right)$$

ここで　$|A|_{11} := a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}$　とおき，この $|A|_{11}$ を A の **(1,1)-quasideterminant** という．さらに続けると，

**E-mail address*: suzukita@gm.math.waseda.ac.jp

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & |A|_{11}^{-1} & -|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\ a_{22}^{-1}a_{21} & 1 & 0 & a_{22}^{-1} \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & |A|_{11}^{-1} & -|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\ 0 & 1 & -a_{22}^{-1}a_{21}|A|_{11}^{-1} & a_{22}^{-1}+a_{22}^{-1}a_{21}|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \end{array}\right)$$

つまり $|A|_{11}^{-1}$, a_{22}^{-1} が存在すれば逆行列が求まる.
大切なことは, R が可換のとき,

$$|A|_{11}a_{22} = (a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$$

となっていることである.

さらに a_{11}^{-1} の存在を仮定すれば,

$$\begin{aligned}
& a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1}a_{21}|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\
= \ & a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1}a_{21}(a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\
= \ & a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}(1 - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1})^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\
= \ & a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}(1 - a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1}a_{22}^{-1} \quad (\text{“玉突き補題”}) \\
= \ & a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1} \\
= \ & a_{22}^{-1}\{(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}) + a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}\}(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1} \\
= \ & (a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1} =: |A|_{22}^{-1} \quad \text{とおく.}
\end{aligned}$$

Lemma 1. $\exists a^{-1}, d^{-1}, (a-bd^{-1}c)^{-1}, (d-ca^{-1}b)^{-1}$ のとき,

$$a^{-1}b(d-ca^{-1}b)^{-1} = (a-bd^{-1}c)^{-1}bd^{-1}$$

を使うと $|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} = a_{11}^{-1}a_{12}|A|_{22}^{-1}$ が成り立つので, 結局

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} |A|_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}a_{12}|A|_{22}^{-1} \\ -a_{22}^{-1}a_{21}|A|_{11}^{-1} & |A|_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |A|_{11}^{-1} & -|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\ -|A|_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1} & |A|_{22}^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書けて, $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ もすぐわかる.

Remark. さらに$\exists a_{12}^{-1}, a_{21}^{-1}$なら

$$\begin{aligned}
(A^{-1}\text{の}\ (1,2)\ \text{成分}) &= -a_{11}^{-1}a_{12}|A|_{22}^{-1} \\
&= -a_{11}^{-1}a_{12}(a_{22}-a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1} \\
&= -a_{11}^{-1}(a_{22}a_{12}^{-1}-a_{21}a_{11}^{-1})^{-1} \\
&= -(a_{22}a_{12}^{-1}a_{11}-a_{21})^{-1} \\
&= (a_{21}-a_{22}a_{12}^{-1}a_{11})^{-1} =: |A|_{21}^{-1} \quad \text{とおく.}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
(A^{-1}\text{の}\ (2,1)\ \text{成分}) &= -a_{22}^{-1}a_{21}|A|_{11}^{-1} \\
&= (\text{上の計算で}\ 1 \leftrightarrow 2) \\
&= (a_{12}-a_{11}a_{21}^{-1}a_{22})^{-1} =: |A|_{12}^{-1} \quad \text{とおくと}
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} |A|_{11}^{-1} & |A|_{21}^{-1} \\ |A|_{12}^{-1} & |A|_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

と書ける．この記号の下で

$$|A|_{21}^{-1} = -a_{11}^{-1}a_{12}|A|_{22}^{-1} \qquad \text{(row homological relation という)}$$

また次のようにも書ける;

$$|A|_{21}^{-1} = -|A|_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \qquad \text{(column homological relation という)}$$

2 Quasideterminantの定義

R: 結合代数
$A=(a_{rs})_{1\le r,s\le n}\in M_n(R)$ とその中のある成分の位置 (i,j) に対して,
$\mathrm{r}_i{}^j$: A の i 行から a_{ij} を除いた行ベクトル
$\mathrm{c}_j{}^i$: A の j 列から a_{ij} を除いた列ベクトル
A^{ij}: A から i 行と j 列を取り除いてできる $(n-1)\times(n-1)$ 行列
とする.

Definition 1. [GR] (i,j) に対して $(A^{ij})^{-1}$ が存在するとする．A の (i,j)-quasideterminant を次式で定義する；

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \mathrm{r}_i{}^j \cdot (A^{ij})^{-1} \cdot \mathrm{c}_j{}^i.$$

Example 1.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し,

$$|A|_{11} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}, \quad |A|_{12} = a_{12} - a_{11}a_{21}^{-1}a_{22},$$

$$|A|_{21} = a_{21} - a_{22}a_{12}^{-1}a_{11}, \quad |A|_{22} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}.$$

Remark. R が可換な場合, quasideterminant たちは $\det A$ に一致するのではなく,

$$|A|_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det A}{\det A^{ij}}$$

となる.

Definition 2. A^{-1} が存在するとき, $|A|_{ij}$ を次式で定義する.

$$A^{-1} = (|A|_{ji}^{-1})_{1\le i,j\le n}$$

Example 2. 四元数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$ に対し,

$$\begin{aligned}
|A|_{11}^{-1} &= (1 - i\cdot k^{-1}j)^{-1} = (1+ikj)^{-1} = \frac{1}{2} \\
|A|_{21}^{-1} &= (j - k\cdot i^{-1}1)^{-1} = (j+ki)^{-1} = (2j)^{-1} = -\frac{j}{2} \\
|A|_{12}^{-1} &= (i - 1\cdot j^{-1}k)^{-1} = (i+jk)^{-1} = (2i)^{-1} = -\frac{i}{2} \\
|A|_{22}^{-1} &= (k - j\cdot 1^{-1}i)^{-1} = (k-ji)^{-1} = (2k)^{-1} = -\frac{k}{2}
\end{aligned}$$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -j \\ -i & -k \end{pmatrix}$$

Definition 3. $|A|_{ij}$ は帰納的に定義できる.
まず $n=1$ のとき, $|A|_{ij} = a_{ij}$　(ただし $A = (a_{rs})_{r=i,s=j}$ とする)
次に $n \geq 2$ のとき,

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \sum_{i'\in I\setminus\{i\},j'\in J\setminus\{j\}} a_{ii'}|A^{ij}|_{j'i'}^{-1}a_{j'j} \quad \text{ここで } I = J = \{1,2,\cdots,n\}.$$

Example 3. 3次の正方行列に対する quasideterminant たちは，上記の2次のものを利用して，次のように書ける：

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする．

$$A^{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{2\le i,j\le 3},$$

$$\begin{aligned}(A^{11})^{-1} &= \begin{pmatrix} |A^{11}|_{22}^{-1} & |A^{11}|_{32}^{-1} \\ |A^{11}|_{23}^{-1} & |A^{11}|_{33}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{22}-a_{23}a_{33}^{-1}a_{32})^{-1} & (a_{32}-a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1} \\ (a_{23}-a_{22}a_{32}^{-1}a_{33})^{-1} & (a_{33}-a_{32}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}|A|_{11} &= a_{11}-(a_{12}\ a_{13})\begin{pmatrix} |A^{11}|_{22}^{-1} & |A^{11}|_{32}^{-1} \\ |A^{11}|_{23}^{-1} & |A^{11}|_{33}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}-a_{12}|A^{11}|_{22}^{-1}a_{21}-a_{12}|A^{11}|_{32}^{-1}a_{31} \\ &\quad -a_{13}|A^{11}|_{23}^{-1}a_{21}-a_{13}|A^{11}|_{33}^{-1}a_{31} \\ &= a_{11}-a_{12}(a_{22}-a_{23}a_{33}^{-1}a_{32})^{-1}a_{21}-a_{12}(a_{32}-a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}a_{31} \\ &\quad -a_{13}(a_{23}-a_{22}a_{32}^{-1}a_{33})^{-1}a_{21}-a_{13}(a_{33}-a_{32}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1}a_{31}.\end{aligned}$$

Remark.

$$\begin{aligned}|A|_{11} &= a_{11}-a_{12}(a_{22}-a_{23}a_{33}^{-1}a_{32})^{-1}a_{21}-a_{12}(a_{32}-a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}a_{31} \\ &\quad -a_{13}(a_{23}-a_{22}a_{32}^{-1}a_{33})^{-1}a_{21}-a_{13}(a_{33}-a_{32}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1}a_{31}\end{aligned}$$

において例えば a_{23}^{-1} が存在しないとき，$|A^{11}|_{32}^{-1}=(a_{32}-a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}$ をこのまま計算することはできないので，intro で述べた "homological relations" の一つを用いて，

$$|A^{11}|_{32}^{-1}=-a_{22}^{-1}a_{23}|A^{11}|_{33}^{-1}$$

つまり

$$(a_{32}-a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}=-a_{22}^{-1}a_{23}(a_{33}-a_{32}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1}$$

などと計算することにする．

3 Quasideterminantの性質

3.1 行，列の定数倍

Aのi行目を左からλ倍した行列をBとすると，

$$|B|_{kj} = \begin{cases} \lambda |A|_{ij} & \text{for} \quad k = i \\ |A|_{kj} & \text{for} \quad k \neq i \end{cases}$$

Example 4.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{11} = \lambda a_{11} - \lambda a_{12} a_{22}^{-1} a_{21} = \lambda |A|_{11}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{22} = a_{22} - a_{21}(\lambda a_{11})^{-1} \lambda a_{12} = |A|_{22}$$

同様に，Aのj列目を右からμ倍した行列をCとすると，

$$|C|_{il} = \begin{cases} |A|_{ij}\mu & \text{for} \quad l = j \\ |A|_{il} & \text{for} \quad l \neq j \end{cases}$$

Example 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\mu & a_{12} \\ a_{21}\mu & a_{22} \end{vmatrix}_{11} = a_{11}\mu - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21}\mu = |A|_{11}\mu$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\mu & a_{12} \\ a_{21}\mu & a_{22} \end{vmatrix}_{22} = a_{22} - a_{21}\mu(a_{11}\mu)^{-1} a_{12} = |A|_{22}$$

3.2 行や列を加えること

Aのk行目をある行に加えた行列をBとすると，

$$|B|_{ij} = |A|_{ij} \quad \text{for } i \neq k, \quad j = 1, \cdots, n$$

Example 6.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{11} &= a_{11} + a_{21} - (a_{12} + a_{22}) a_{22}^{-1} a_{21} \\ &= a_{11} + a_{21} - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21} - a_{21} \\ &= |A|_{11} \end{aligned}$$

同様に，A の l 列目をある列に加えた行列を C とすると，

$$|C|_{ij} = |A|_{ij} \quad \text{for } j \neq l, \quad i = 1, \cdots, n$$

Example 7.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}_{11} &= a_{11}+a_{12}-a_{12}a_{22}^{-1}(a_{21}+a_{22}) \\
&= a_{11}+a_{12}-a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}-a_{12} \\
&= |A|_{11}
\end{aligned}$$

3.3 Homological Relations

異なった (i,j) に対する quasideterminant たちの間には関係がある．例えば，

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{21} a_{11}^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{22} a_{12}^{-1}.$$

一般には *homological relations* と呼ばれる次の関係式が成り立つ．

Theorem 8. *[GR]*

1. *Row homological relations:*

$$-|A|_{ij} \cdot |A^{il}|_{sj}^{-1} = |A|_{il} \cdot |A^{ij}|_{sl}^{-1}, \qquad s \neq i$$

2. *Column homological relations:*

$$-|A^{kj}|_{it}^{-1} \cdot |A|_{ij} = |A^{ij}|_{kt}^{-1} \cdot |A|_{kj}, \qquad t \neq j$$

Remark. この定理より，$|A^{ij}|_{sl}^{-1}|A^{il}|_{sj}$ は s によらない．
同様に，$|A^{kj}|_{it}|A^{ij}|_{kt}^{-1}$ は t によらない．

さらにこの定理から，次の展開公式が得られる．

Corollary 1. 任意の $s \neq i$ と任意の $t \neq j$ に対して，

$$\begin{aligned}
|A|_{ij} &= a_{ij} - \sum_{l \neq j} a_{il}|A^{ij}|_{sl}^{-1}|A^{il}|_{sj} \qquad (\text{行展開}), \\
|A|_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k \neq i} |A^{kj}|_{it}|A^{ij}|_{kt}^{-1}a_{kj} \qquad (\text{列展開})
\end{aligned}$$

3.4 行列の積に対する quasideterminant

まず $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ より次の命題を得る.

Proposition 9.

$$|AB|_{ik}^{-1} = \sum_{p=1}^{n} |B|_{pk}^{-1}|A|_{ip}^{-1}$$

これと homological relation を用いて，次の定理を得る.

Theorem 10. $\varphi_{j,k}$: B の j 行から b_{jk} を除いた行ベクトル
$\psi_{i,j}$: A の j 列から a_{ij} を除いた列ベクトル
$\alpha_j := \varphi_{j,k}(B^{jk})^{-1}(A^{ij})^{-1}\psi_{i,j}$ とする.
quasideterminant $|AB|_{ik}$ は $(1+\alpha_j)^{-1}$ が存在するときに定義され,

$$|AB|_{ik} = |A|_{ij}(1+\alpha_j)^{-1}|B|_{jk}$$

Example 11. $n=2$ の場合,

$$|AB|_{11} = |A|_{11}(1 + b_{12}b_{22}^{-1}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1}|B|_{11}$$

3.5 tensor 積の quasideterminant

Proposition 12. $|A|_{ij}$ と $|B|_{\alpha,\beta}$ が定義されるとき, $|A\otimes B|_{i\alpha,j\beta}$ が定義され，次が成り立つ.

$$|A\otimes B|_{i\alpha,j\beta} = |A|_{ij}|B|_{\alpha,\beta}$$

Remark. これは可換な場合の行列式に対する公式

$$\det(A\otimes B) = (\det A)^n(\det B)^m \qquad A:\ m\times m \text{ 行列}, B:\ n\times n \text{ 行列}$$

と異なっている.

3.6 1次従属性

Proposition 13. $|A|_{ij}$ が定義されるとき，次の3つは同値.

1. $|A|_{ij} = 0$
2. 行列 A の第 i 行は A の他の行の左1次結合
3. 行列 A の第 j 列は A の他の列の右1次結合

例えば, $|A|_{11} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} = 0$ とすると,
$a_{11} = \lambda a_{21}$, $\lambda = a_{12}a_{22}^{-1}$. このとき, $a_{12} = (a_{12}a_{22}^{-1})a_{22} = \lambda a_{22}$.

4 応用

4.1 Mooreの四元数行列式

n 次対称群 S_n の元を disjoint cycle の積に分解しておく.

$$\sigma = (k_{11}\cdots k_{1j_1})(k_{21}\cdots k_{2j_2})\cdots(k_{m1}\cdots k_{mj_m})$$

ただし

$$\forall i \text{ に対し, } k_{i1} < k_{ij} \quad \text{for all } j > 1$$
$$k_{11} > k_{21} > \cdots > k_{m1}$$

この表示は unique.

四元数を成分とする n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し, Moore行列式Mdet(A) を次のように定義する;

$$\mathrm{Mdet}(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{k_{11},k_{12}}\cdots a_{k_{1j_1},k_{11}} a_{k_{21},k_{22}}\cdots\cdots a_{k_{mj_m},k_{m1}}$$

Remark. A が自己双対四元数行列, つまり $a_{ji}=\bar{a}_{ij}$ なら

$$\mathrm{Mdet}(A)\in\mathbf{R}.$$

Remark. Moore行列式は良い性質を持っており, 広く応用されている. [Dy], [永尾]

Example 14. 以後, A は自己双対, つまり $a_{ii}\in\mathbf{R}, a_{ji}=\bar{a}_{ij}$ とする.

$$n=2, \qquad \mathrm{Mdet}(A) = a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2$$

$n=3$,

$$\mathrm{Mdet}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}\bar{a}_{13} + a_{13}\bar{a}_{23}\bar{a}_{12} - |a_{12}|^2 a_{33} - |a_{13}|^2 a_{22} - |a_{23}|^2 a_{11}.$$

Remark. 先ほど, 四元数行列の逆行列を quasideterminant を用いて計算したが, それを書き直してみる.

四元数行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ に対し,

$$\begin{aligned} |A|_{11}^{-1} &= (a-bd^{-1}c)^{-1} = \left(a - b\frac{\bar{d}}{|d|^2}c\right)^{-1} \\ &= |d|^2(|d|^2a - b\bar{d}c)^{-1} = |d|^2\frac{|d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b}}{||d|^2a - b\bar{d}c|^2} \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}||d|^2a - b\bar{d}c|^2 \ / \ |d|^2 &= (|d|^2a - b\bar{d}c)(|d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b}) \ / \ |d|^2 \\ &= |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - a\bar{c}d\bar{b} - b\bar{d}c\bar{a} \\ &=: \mathrm{Sdet}(A)\end{aligned}$$

はStudy 行列式である．他の成分も同様に書き直すと，古典的に知られた次の公式を得る．

$$\mathrm{Sdet}(A) \neq 0 \text{ のとき}, A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Sdet}(A)} \begin{pmatrix} |d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b} & |b|^2\bar{c} - \bar{a}b\bar{d} \\ |c|^2\bar{b} - \bar{d}c\bar{a} & |a|^2\bar{d} - \bar{b}a\bar{c} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sdet}(A)$ は n 次正方行列でも定義され，次が成り立つことが知られている．[As]

1. 四元数行列 A が正則 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sdet}(A) \neq 0$
2. $\mathrm{Sdet}(A) = \mathrm{Mdet}(AA^*)$

Moore 行列式の quasideterminant 表示

Theorem 15. *[GGRW]*

$$Mdet(A) = |A|_{11}|A^{11}|_{22}|A^{12,12}|_{33} \cdots a_{nn}$$

ただし，$A^{12\cdots k,12\cdots k}$ は A から $1,2,\cdots k$ 行，$1,2,\cdots k$ 列を除いた $(n-k)$ 次正方行列とする．また，任意の k に対し，

$$|A^{12\cdots k,12\cdots k}|_{k+1,k+1} \in \mathbf{R}$$

が成り立ち，これらの積として $Mdet(A) \in \mathbf{R}$.

Example 16. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Mdet}(A) &= |A|_{11}|A^{11}|_{22}a_{33} \\ &= \{a_{11} - a_{12}(a_{22} - a_{23}a_{33}^{-1}\bar{a}_{23})^{-1}\bar{a}_{12} - a_{12}(\bar{a}_{23} - a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}\bar{a}_{13} \\ &\quad -a_{13}(a_{23} - a_{22}\bar{a}_{23}^{-1}a_{33})^{-1}\bar{a}_{12} - a_{13}(a_{33} - \bar{a}_{23}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1}\bar{a}_{13}\} \\ &\quad \times(a_{22} - a_{23}a_{33}^{-1}\bar{a}_{23})^{-1}a_{33} \\ \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - |a_{23}|^2) - |a_{12}|^2a_{33} + a_{12}a_{23}\bar{a}_{13} \\ &\quad +a_{13}\bar{a}_{23}\bar{a}_{12} - |a_{13}|^2a_{22}.\end{aligned}$$

また，quasideterminant の行展開 (列展開) 公式から，Moore 行列式の行展開 (列展開) 公式が得られることもわかる．

4.2 Capelli 行列式

$X = (x_{ij})$: 可換変数の行列, X^T: その転置行列
$D = (\partial_{ij})$, $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$: 対応する微分作用素の行列
とする. X, D は可換成分の行列なので $\det X$, $\det D$ には意味がある.

$X^T D = (f_{ij})$ とおくと $f_{ij} = \sum_k x_{ki}\partial_{kj}$ であり, 次が成り立つ.

$$[f_{ij}, f_{kl}] = \delta_{jk} f_{il} - \delta_{li} f_{kj}$$

これは普遍包絡環 $U(gl_n)$ の生成元 E_{ij} の満たす関係式と全く同じであることに注意しておく.

n 次正方行列 $\Phi = (\Phi_{ij})$ に対し, Capelli 行列式 (または, 列-行列式) を次のように定義する.

$$\det{}_{Cap}(\Phi) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)1} \cdots \Phi_{\sigma(n)n}$$

Capelli 行列式は $U(gl_n)$ の中心元を構成するのに用いられる. [W]
このとき, 次が成り立つ.

$$\det{}_{Cap}(X^T D + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \cdots, 0)) = \det X \det D \quad (\textit{Capelli}\ \text{恒等式})$$

Example 17. $n = 2$ の場合,

$$\begin{aligned} X^T D + \mathrm{diag}(1,0) &= \begin{pmatrix} f_{11}+1 & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11}\partial_{11} + x_{21}\partial_{21} + 1 & x_{11}\partial_{12} + x_{21}\partial_{22} \\ x_{12}\partial_{11} + x_{22}\partial_{21} & x_{12}\partial_{12} + x_{22}\partial_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり,

$$x_{12}\partial_{11}(x_{11}\partial_{12}) = x_{12}x_{11}\partial_{11}\partial_{12} + x_{12}\partial_{12}$$

などに注意すると,

$$\begin{aligned} \det{}_{Cap}(X^T D + \mathrm{diag}(1,0)) &= (f_{11}+1)f_{22} - f_{21}f_{12} \\ &= (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})(\partial_{11}\partial_{22} - \partial_{12}\partial_{21}) \\ &= \det X \det D \end{aligned}$$

Capelli 行列式の quasideterminant 表示

$I = \{i_1, \cdots, i_n\}, J = \{j_1, \cdots, j_n\}$ を $1, \cdots, n$ の順列とし,

$$z_{IJ}^{(k)} := |(X^T D)_{IJ}^{(k)} + kE_{n-k}|_{i_{k+1}, j_{k+1}} \quad (k = 0, \cdots, n-1)$$

とおく. ただし, $(X^T D)_{IJ}^{(k)}$ は $X^T D$ から $i_1 \cdots i_k$ 行, $j_1 \cdots j_k$ 列を取り除いた行列, E_{n-k} は $(n-k)$ 次単位行列とする.

Theorem 18. *[GR]*

$$sgn(I) sgn(J) \prod_{k=0}^{n-1} z_{IJ}^{(k)} = \det X \det D$$

が成り立ち, $z_{IJ}^{(k)}$ たちは互いに可換である.

Example 19. $n = 2$, $i_1 = j_1 = 2$, $i_2 = j_2 = 1$ の場合,
まず $[f_{22}, f_{11} + 1] = 0$ であり, $[f_{12}, f_{11} + 1] = -f_{12}$ より,

$$f_{12}(f_{11} + 1) = (f_{11} + 1) f_{12} - f_{12} = f_{11} f_{12}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
z_{IJ}^{(0)} z_{IJ}^{(1)} &= |(X^T D)_{IJ}^{(0)}|_{22} |(X^T D)_{IJ}^{(1)} + 1|_{11} \\
&= |X^T D|_{22} \; |f_{11} + 1|_{11} \\
&= (f_{22} - f_{21} f_{11}^{-1} f_{12})(f_{11} + 1) \\
&= f_{22}(f_{11} + 1) - f_{21} f_{11}^{-1} f_{12}(f_{11} + 1) \\
&= (f_{11} + 1) f_{22} - f_{21} f_{12} \\
&= \det X \det D
\end{aligned}$$

4.3 非可換 Gauss 分解

intro で述べた非可換掃き出し法を書き直すと，非可換 Gauss 分解が得られる．
$a_{22} \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}a_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A|_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^{-1}a_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem 20. *[GGRW] (非可換 Gauss 分解)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & x_{\alpha\beta} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ y_{\beta\alpha} & & 1 \end{pmatrix}$$

ここで $y_k = |A_k|_{kk}, \quad A_k = (a_{ij}),\ i,j = k,\cdots,n$ であり，A の (principal) **quasi-minor** と呼ばれる．また,
$x_{\alpha\beta}$: A のある submatrix の **right quasi-Plücker coodinate**,
$y_{\beta\alpha}$: A のある submatrix の **left quasi-Plücker coodinate**

Remark. R が可換な場合，$y_1y_2\cdots y_n = \det A$ が成り立つ．例えば $n=3$ のとき,

$$y_1y_2y_3 = \frac{\det A}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \cdot \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}{a_{33}} \cdot a_{33} = \det A \quad \text{である．}$$

R が非可換な場合でも，前述の Moore 行列式や Capelli 行列式のように，**多くの有名な非可換行列式は quasi-minor の積で表される**ことが知られている．

また $a_{22} = 0$ で A が正則のときは $a_{12} \neq 0$ であり,
非可換 Bruhat 分解が得られる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{12}^{-1}a_{11} & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem 21. *[GGRW] (非可換 Bruhat 分解)*
結合代数上の正則行列 A に対して，上冪等行列 X，下冪等行列 Y，対角行列 D，置換行列 P が存在して

$$A = XPDY.$$

$P^{-1}XP$ が上冪等行列という条件の下で，X, P, D, Y は A によって一意的に定まる．

right quasi-Plücker coodinate の例

例えば，$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$ の right quasi-Plücker coodinate の 1 つは

$$r_{12}^3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}_{11} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}_{21}^{-1}$$

であり，**right quasi-Plücker relation**

$$r_{12}^3 r_{21}^4 + r_{13}^2 r_{31}^4 = 1$$

が成り立つ．R が可換な場合，

$$r_{12}^3 = \frac{b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}}{b_{32}} \cdot \frac{b_{32}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} =: \frac{p_{13}}{p_{23}}$$

となり，同様にして

$$\frac{p_{13}}{p_{23}}\frac{p_{24}}{p_{14}} + \frac{p_{12}}{-p_{23}}\frac{p_{34}}{p_{14}} = 1$$

より，有名な Plücker relation

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

を得る．

4.4 調和振動子を成分にもつ行列の Gauss 分解

$a, a^\dagger$ を調和振動子とする．関係式は $[a, a^\dagger] = 1$.
また，number operator N を $N = a^\dagger a$ とする．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

に対して，次が成り立つ．

$$X=(x_{ij})=\mathrm{e}^{-itgA_1}=\begin{pmatrix}\cos\left(tg\sqrt{N+1}\right) & -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{N+1}\right)}{\sqrt{N+1}}a\\ -ia^\dagger\frac{\sin\left(tg\sqrt{N+1}\right)}{\sqrt{N+1}} & \cos\left(tg\sqrt{N}\right)\end{pmatrix}.$$

このとき，先ほどの非可換 Gauss 分解の公式を用いると，関係式

$$af(N)=f(N+1)a,\qquad aa^\dagger=N+1$$

を用いて，

$$x_{12}x_{22}^{-1}=-i\frac{\tan\left(tg\sqrt{N+1}\right)}{\sqrt{N+1}}a,\quad x_{22}^{-1}x_{21}=-ia^\dagger\frac{\tan\left(tg\sqrt{N+1}\right)}{\sqrt{N+1}}$$

$$\begin{aligned}|X|_{11}&=x_{11}-x_{12}x_{22}^{-1}x_{21}\\
&=\cos(tg\sqrt{N+1})\\
&\quad-(-i)^2\frac{\sin(tg\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}}a\frac{1}{\cos(tg\sqrt{N})}a^\dagger\frac{\sin(tg\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}}\\
&=\cos(tg\sqrt{N+1})\\
&\quad+\frac{\sin(tg\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}}\frac{1}{\cos(tg\sqrt{N+1})}aa^\dagger\frac{\sin(tg\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}}\\
&=\cos(tg\sqrt{N+1})\\
&\quad+\frac{\sin(tg\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}}\frac{1}{\cos(tg\sqrt{N+1})}(N+1)\frac{\sin(tg\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}}\\
&=\cos(tg\sqrt{N+1})+\frac{\sin^2(tg\sqrt{N+1})}{\cos(tg\sqrt{N+1})}\\
&=\frac{1}{\cos(tg\sqrt{N+1})}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-itgA_1}\\
=&\begin{pmatrix}1 & -i\frac{\tan\left(tg\sqrt{N+1}\right)}{\sqrt{N+1}}a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos\left(tg\sqrt{N+1}\right)} & 0\\ 0 & \cos\left(tg\sqrt{N}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -ia^\dagger\frac{\tan\left(tg\sqrt{N+1}\right)}{\sqrt{N+1}} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

同様に，下三角・対角・上三角の非可換 Gauss 分解を計算すると [FHKSW] の結果を再現する．

4.5 非可換可積分系への応用 [EGR]

まず最初に佐藤理論を簡単に復習しておく ([Di] などを参照).

N 階のモニックな擬微分作用素

$$A = \partial_x^N + a_{N-1}\partial_x^{N-1} + \cdots + a_0 + a_{-1}\partial_x^{-1} + a_{-2}\partial_x^{-2} + \cdots$$

作用素 ∂_x^n と掛け算作用素 f との積

$$\partial_x^n \cdot f := \sum_{i\geq 0} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (\partial_x^i f)\partial_x^{n-i}$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} := \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}$$

この公式の n をマイナスの整数にも適用すると, 例えば

$$\begin{aligned} \partial_x^{-1} \cdot f &= f\partial_x^{-1} - f'\partial_x^{-2} + f''\partial_x^{-3} - \cdots \\ \partial_x^{-2} \cdot f &= f\partial_x^{-2} - 2f'\partial_x^{-3} + 3f''\partial_x^{-4} - \cdots \quad \text{ここで} \quad f' = \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

これらの公式を用いて擬微分作用素の積を定義すると, 擬微分作用素の全体は結合代数をなす.

$A = \sum_{i=-\infty}^{N} a_i\partial_x^i$ に対して,

$$A_+ := \sum_{i\geq 0} a_i\partial_x^i, \quad A_- := \sum_{i<0} a_i\partial_x^i$$

とおく.

KP 階層

Lax 作用素

$$L = \partial_x + u_0\partial_x^{-1} + u_1\partial_x^{-2} + \cdots, \qquad u_i = u_i(x_1, x_2, \cdots), \quad x_1 = x$$

に対し, 方程式系

$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = [B_m, L], \quad B_m := (L^m)_+ \tag{1}$$

を KP 階層という.

KP 階層のソリトン解

相異なる定数 α_k, β_k, a_k $(k = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$y_k(x) = \exp\xi(x, \alpha_k) + a_k \exp\xi(x, \beta_k),$$

$$\xi(x,\alpha) = x_1\alpha + x_2\alpha^2 + x_3\alpha^3 + \cdots$$

とおき，次の N 階のモニックな微分作用素を導入する：

$$\phi = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N & 1 \\ y_1' & \cdots & y_N' & \partial_x \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} & \partial_x^N \end{vmatrix} \qquad \Delta:\ y_1,\cdots,y_N \text{ のロンスキアン}$$

(この行列式の意味は，最後の列に関して展開し，∂_x^i を各項の一番右に書くものとする)

$\phi y_k = 0\ (k=1,\cdots,N)$ 　が成り立つことに注意する．

Proposition 22. $L = \phi\partial_x\phi^{-1}$ *は KP 階層 (1) の解である．*

この解を KP 階層の N ソリトン解という．

非可換 KP 階層[EGR]

R を結合代数とし，次の Lax 作用素を考える：

$$L = \partial_x + w_0\partial_x^{-1} + w_1\partial_x^{-2} + \cdots,$$

$$w_i = w_i(x,t_1,t_2,\cdots) \quad R \text{ に値を持つ関数}$$

に対し，方程式系

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [B_m, L], \quad B_m := (L^m)_+ \tag{2}$$

を非可換 KP 階層という．(非可換可積分系については，[H] などを参照)

KP 階層のソリトン解

相異なる $\alpha_k, \beta_k, a_k \in R\ (k=1,\cdots,N)$ に対し，

$$y_k(x,t) = \exp\xi(x,t,\alpha_k) + a_k\exp\xi(x,t,\beta_k),$$

$$\xi(x,t,\alpha) = (x+t_1)\alpha + t_2\alpha^2 + t_3\alpha^3 + \cdots$$

とおく．次式で N 階のモニックな微分作用素 Φ が定義される：

$$\Phi f = |W(y_1,\cdots,y_N,f)|_{N+1,N+1}$$

$$\text{ここで，}\quad W(y_1,\cdots,y_N,f) := \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_N & f \\ y_1' & \cdots & y_N' & f' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} & f^{(N)} \end{pmatrix}$$

$\Phi y_k = 0\ (k=1,\cdots,N)$ 　が成り立つことに注意する．

Proposition 23. $L = \Phi\partial_x\Phi^{-1}$ は非可換 *KP* 階層 *(2)* の解である.

この解を非可換 KP 階層の N ソリトン解という.

微分作用素の因数分解

D: R 上の微分
$R_n(D) := \{L \in R[D];\ n\ 階,\ モニック\}$
とする.

Definition 4. $f_1, \cdots, f_n \in R$: nondegenerate set とは, ロンスキー行列 $W(f_1, \cdots, f_n)$ が正則であることとする.

Theorem 24. *[EGR] (i)* $f_1, \cdots, f_n \in R$*: nondegenerate set*
このとき $Lf_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$ を満たす $L \in R_n(D)$ が唯一つ存在し, 具体的には次の式で与えられる:

$$Lf = |W(f_1, \cdots, f_n, f)|_{n+1,n+1}$$

(ii) $L \in R_n(D)$,
$f_1, \cdots, f_n$: $Lf = 0$ の解で $\forall m \leq n$ に対し $f_1, \cdots, f_m$*: nondegenerate set*
このとき L は次の因数分解をもつ;

$$L = (D - b_n) \cdots (D - b_1)$$

$$\textit{where} \qquad b_i = (DW_i)W_i^{-1}, \quad W_i = |W(f_1, \cdots, f_i)|_{ii}$$

これより, $L = D^n + v_1 D^{n-1} + \cdots, \quad v_1 = -\sum_{i=1}^{n} b_i$ もわかる.

非可換 KdV 階層

佐藤理論で良く知られているのと同様に, 非可換 KP 階層において $L_-^2 = 0$ の条件をおき, $M = L^2 = \partial_x^2 + u$ とすると非可換 KdV 階層が得られる:

$$\frac{\partial M}{\partial t_m} = [M_+^{m/2}, M]$$

特に $m = 3$ のとき

$$u_{t_3} = \frac{1}{4}(u_{xxx} + 3u_x u + 3uu_x) \qquad (\text{非可換 KdV 方程式})$$

非可換 KP 階層の N ソリトン解において $\beta_k = -\alpha_k,\ t_{2k} = 0$ とおくと, 非可換 KdV 階層の N ソリトン解 $M = L^2 = \Phi\partial_x^2\Phi^{-1}$ が得られる. それを (R に値を持つ) 関数の形で書くと次のようになる:

$$y_k = e^{\xi(x,t,\alpha_k)} + a_k e^{-\xi(x,t,\alpha_k)},$$

$$b_i = (\partial_x W_i)W_i^{-1}, \quad W_i := |W(y_1, \cdots, y_i)|_{ii} \qquad \text{とおく.}$$

Proposition 25. $u(x,t) = 2\partial_x(\sum_{i=1}^{N} b_i)$ は非可換 KdV 階層の解.

特に $t_i = 0$ $(i \neq 3)$, $t = t_3$ とし $y_k = e^{\alpha_k x + \alpha_k^3 t} + a_k e^{-\alpha_k x - \alpha_k^3 t}$ とすれば非可換 KdV 方程式 $u_t = \frac{1}{4}(u_{xxx} + 3u_x u + 3uu_x)$ の N ソリトン解が得られる.

例: 1-ソリトン解 $u = 2\dfrac{\partial}{\partial x}[(e^{\alpha x+\alpha^3 t} - ae^{-\alpha x-\alpha^3 t})\alpha(e^{\alpha x+\alpha^3 t} + ae^{-\alpha x-\alpha^3 t})]$

可換な場合は有名な解

$u = \dfrac{2\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x + \alpha^3 t - c)}$, $c = \dfrac{1}{2}\log a$ に一致する.

5 まとめと展望

1. quasideterminant は, 非可換成分行列に対する逆行列や種々の行列式を統一的に扱う道具として有用である.

2. 今回紹介した他に, 量子旗多様体への応用 [L1],[L2], 超 Lie 代数のカシミール元の構成 [MR] などにも用いられており, 今後の発展が期待できる.

参考文献

[As] H. Aslaksen, *Quaternionic Determinants*, The Mathematical Intelligencer 18, (1996) 57-65.

[Di] L. Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, World Scientific, London, 1991.

[Dy] F.J.Dyson, Helv.Phys.Acta 45 (1972), 289.

[永尾] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会, 2005.

[GR] I. Gelfand and V. Retakh, *Determinants of matrices over noncommutative rings*, Funct. Anal. Appl. 25 (1991), no.2, 91-102.

[GGRW] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson, *Quasideterminants*, Adv. in Math 193 (2005) no.1, 56-141, math.QA/0208146.

[EGR] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, *Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations*, Math. Res. Letters 4 (1997), no.2-3, 413-425, q-alg/9701008.

[FHKSW] K.Fujii, K.Higashida, R.Kato, T.Suzuki, Y.Wada, *Explicit Form of Evolution Operator of Three Atoms Tavis-Cummings Model*, quant-ph/0404034.

[H] M. Hamanaka, *Noncommutative Solitons and Integrable Systems*, hep-th/0504001.

[L1] A. Lauve, *A Quasideterminantal approach to quantized flag varieties*, dissertation submitted to the Graduate School, New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey, 2005.

[L2] A. Lauve, *Flag varieties for the Yangian* $Y(gl_n)$, math.QA/0601056.

[MR] A. Molev, V. Retakh, *Quasideterminants and Casimir elements for the general Lie superalgebra*, math.QA/0309461.

[W] H. Weyl, *The classical groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Priceton, 1946.