数理解析研究所講究録
1501巻 2006年 195-208

On the de Rham cohomology associated with the general hypergeometric integrals

Hironobu Kimura
Graduate school of Science and Technology,
Kumamoto University

1 はじめに

Grassmann 多様体上で定義された多変数特殊関数として一般超幾何関数というものがある. これは、古典的な特殊関数である Gauss の超幾何関数やその合流型関数の積分表示を Radon 変換の視点から解釈し直すことによって得られたものである. このような視点を確保することによって、我々は、古典特殊関数の多変数への一般化を得るだけでなく、それまで個別に確立されてきた様々な公式等の背後に隠れていた原理を統一的に理解することができるようになったのである. その意味で一般超幾何関数は重要である. しかしながら、一般超幾何関数を特殊関数として確立できたかというとそうではなく、その大域的な構造である monodromy 群や Stokes 現象等が良く分かっていないという点で不満足な状況にある. ここではそのようなことを調べる以前の段階であるが、積分表示に付随する de Rham コホモロジー群の具体的計算について論じてみたい.

2 一般超幾何関数とは何か

Gauss の超幾何関数やその合流型関数は射影空間 $\mathbb{P}^1$ で定義された 2 階常微分方程式の解として特徴づけられ、次のような積分表示を持つことが知られている ([3]).

(Gauss) $\quad {}_2F_1(a,b,c;x) = C\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du$

(Kummer) $\quad {}_1F_1(a,c;x) = C\int_0^1 e^{xu}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du$

(Bessel) $\quad J_a(x) = C\int_\gamma e^{x(u-1/u)}u^{-a-1}du$

(Hermite) $\quad H_a(x) = C\int_\gamma e^{xu-\frac{1}{2}u^2}u^{-a-1}du$

(Airy) $\quad \mathrm{Ai}(x) = C\int_\gamma e^{xu-\frac{1}{3}u^3}du$

ここで C は x に依らない定数を、γ は関数ごとにとる u 平面内の適当な積分路を表す．これらの積分表示を Radon 変換の視点から発見的に理解してみよう．まず，標語的に上記の特殊関数を次のように図式に並べる．

$$
(1) \qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Bessel} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
\text{Gauss} \longrightarrow \text{Kummer} & & & & \text{Airy} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \text{Hermite} & &
\end{array}
$$

これらの関数に 4 の分割（weight 4 の Young diagram) を

$$
(2) \qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2+2 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
1{+}1{+}1{+}1 \longrightarrow 2+1+1 & & & & 4 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 3+1 & &
\end{array}
$$

と並べたものを対応させる．この Young diagram が何を指定しているかというと，GL(4)（あるいは $\mathfrak{gl}(4)$）の正則元のタイプを指定している．ここで，

$a \in \mathrm{GL}(4)$ が正則元

$\Leftrightarrow$ $O(a) = \{gag^{-1} \mid g \in \mathrm{GL}(4)\}$ の次元が最大．

$\Leftrightarrow$ a の Jordan 標準形の Jordan 細胞の固有値がすべて異なる．

もちろん正則元の定義は, GL(N) でも同様である. $a \in \mathrm{GL}(4)$ が正則元であるとすると, a は次の形の Jordan 標準形に相似であり, その Jordan 細胞のサイズのデータが 4 の分割で表わされる.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (1+1+1+1)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ & a_1 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (2+1+1)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ & a_1 & & \\ & & a_3 & 1 \\ & & & a_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (2+2)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ & a_1 & 1 & \\ & & a_1 & 1 \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (3+1)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ & a_1 & 1 & \\ & & a_1 & 1 \\ & & & a_1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (4)$$

ここで、 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ である. 重要なのはこれらの中心化部分群で, 上に述べた Gauss の超幾何関数やその合流型関数は, "正則元の中心化部分群の指標の Radon 変換" と理解されるのである.

Gauss の場合

分割 $(1,1,1,1)$ に対応する正則元 $a \in \mathrm{GL}(4)$ が既に Jordan 標準形の形になっているとする. このとき a の中心化群 $H = H_{(1,1,1,1)}$ は対角行列からなる可換部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & h_3 & \\ & & & h_4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}(4),$$

すなわち GL(4) の Cartan 部分群である．$\tilde{H}$ を H 普遍被覆群とし，その指標 $\chi : \tilde{H} \to \mathbb{C}^\times$ を考える．これは $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$ を用いて

$$\chi(h;\alpha) = h_1^{\alpha_1} \cdots h_4^{\alpha_4} \tag{3}$$

で与えられる．これと Gauss の超幾何関数の積分表示を結び付けるには，χ に積分変数 u の次のような一次式を代入する：

$$h_1(u) = 1, \quad h_2(u) = u, \quad h_3(u) = 1 - u, \quad h_4(u) = 1 - xu. \tag{4}$$

実際，$\alpha = (\alpha_1, a-1, c-a-1, -b)$ と定めると

$$ {}_2F_1(a,b,c;x) = \int \chi(h(u);\alpha)\, du$$

と表わすことができる．ここではパラメータ α_1 の定め方については何も言っていないが，被積分関数のもう一つの分岐点 $u = \infty$ も平等に扱うために積分変数 $u \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ の斉次座標 $t = (t_0, t_1)$ によって $u = t_1/t_0$ と射影化すると

$$\begin{aligned}\chi(h(u);\alpha) &= \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\alpha_2} \left(1 - \frac{t_1}{t_0}\right)^{\alpha_3} \left(1 - x\frac{t_1}{t_0}\right)^{\alpha_4}. \\ &= t_0^{-2-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} t_1^{\alpha_2} (t_0 - t_1)^{\alpha_3} (t_0 - xt_1)^{\alpha_4} (t_0 dt_1 - t_1 dt_0)\end{aligned}$$

となる．そこで $\alpha_1 = -2 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = b - c$ と定める．$t_0^{\alpha_1}$ の部分が被積分関数の $u = \infty$ における挙動を担う部分である．代入する一次式 h_i の係数を縦に並べてベクトルをつくり，それを横に並べることによって行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -x \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow t_0 \text{ の係数} \\ \leftarrow t_1 \text{ の係数} \end{array} \tag{5}$$

が得られる．さて、$x = 0, 1$ は Gauss の超幾何微分方程式の特異点であることに注意しよう．x が特異点でないという条件は，「この行列のすべての 2 次小行列式が 0 でない」と表わされる．以上のように χ に積分変数 u の一次式を代入して積分することによって Gauss の超幾何関数が得られるというのが Radon 変換からの理解である．そして行列 (5) の代わりに，すべての 2 次小行列式が消えないような、より一般の行列 $z \in M(2,4)$ を用いて"Radon" 変換を行い z の関数を得るというのが，1986 年に I.M.Gelfand によって導入された Grassmann 多様体上の超幾何関数のアイデアである．

Airyの場合 4 の分割 (4) で指定される正則元 a が既に Jordan 標準形の場合，その中心化群は

$$H_{(4)} = \left\{ h = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & h_0 & h_1 & h_2 \\ & & h_0 & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}(4)$$

である．シフト行列 $\Lambda = (\delta_{i+1,j})$ を用いると $h = h_0 I + h_1\Lambda + h_2\Lambda^2 + h_3\Lambda^3$ と書けることに注意しよう．$\tilde{H}_{(4)}$ の指標 $\chi : \tilde{H}_{(4)} \to \mathbb{C}^\times$ を考えよう．まず h の有理関数 $\theta_m(h)$ を

$$\log(h_0 I + h_1\Lambda + h_2\Lambda^2 + h_3\Lambda^3) = (\log h_0)I + \theta_1(h)\Lambda + \theta_2(h)\Lambda^2 + \theta_3(h)\Lambda^3$$

により導入する． log の Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned}
\theta_1(h) &= \frac{h_1}{h_0}, \\
\theta_2(h) &= \frac{h_2}{h_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2, \\
\theta_3(h) &= \frac{h_3}{h_0} - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)\left(\frac{h_2}{h_0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3.
\end{aligned}$$

が分かる．

補題 1 対応 $h \mapsto (h_0, \theta_1(h), \ldots, \theta_3(h))$ は群同型 $H_{(4)} \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^3$ を与える．

この補題によって，$\tilde{H}_{(4)}$ の指標は，適当な $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ によって

$$\chi(h;\alpha) = h_0^{\alpha_0} \exp(\alpha_1\theta_1(h) + \alpha_2\theta_2(h) + \alpha_3\theta_3(h))$$

で与えられることが分かる．この χ の Radon 変換と Airy 積分と結び付けるには，

$$\alpha = (-2, 0, 0, -1) \tag{6}$$

とし，χ に代入する積分変数 u の一次式を

$$h(u) = (1, u, 0, -xu) = (1, u)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

と選べば良い．実際 $\chi(h(u);\alpha)=e^{xu-\frac{1}{3}u^3}$ となり，

$$\mathrm{Ai}(x)=\mathrm{Const.}\int_\gamma \chi(h(u);\alpha)du$$

である．また χ に代入する u の一次式を，より一般の $z\in M(2,4)$ を用いて定めたものが一般化された Airy 積分である．

3　一般超幾何積分

群： 自然数 N の分割 $\lambda=(n_1,\dots,n_\ell)$ に対して

$$H_\lambda=J(n_1)\times\cdots\times J(n_\ell)\subset \mathrm{GL}(N)$$

を考える．ここで

$$J(n)=\left\{h=\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1}\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & h_1\\ & & & h_0\end{pmatrix}\right\}\subset \mathrm{GL}(n)$$

は $\mathrm{GL}(n)$ の極大可換部分群で n 次 Jordan 群と呼ばれ，その元 h は principal upper diagonal が 1 で他の成分は 0 であるシフト行列 $\Lambda=(\delta_{i+1,j})\in M(n)$ を用いて $h=h_0I+h_1\Lambda+\cdots+h_{n-1}\Lambda^{n-1}$ と表わされる．また H_λ は分割 λ によって指定される Jordan 標準形の正則元の中心化群として得られる $\mathrm{GL}(N)$ の極大可換部分群で，その元は $\mathrm{diag}(h^{(1)},\dots,h^{(\ell)})$, $h^{(k)}\in J(n_k)$ と表わされる．

指標: Airy の場合と同様に $J(n)$ 上の有理関数の系列 $\theta_m(h)$ $(m=1,2,\dots)$ を

$$\log h=\log(h_0I+h_1\Lambda+\cdots+h_{n-1}\Lambda^{n-1})=(\log h_0)I+\sum_{m=1}^{n-1}\theta_m(h)\Lambda^m$$

によって定義する．また $\theta_0(h)=\log h_0$ とおく．具体的には

(7)

$\theta_m(h)$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+m\lambda_m=m}(-1)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_m-1}\frac{(\lambda_1+\cdots+\lambda_m)!}{\lambda_1!\cdots\lambda_m!}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\lambda_1}\cdots\left(\frac{h_m}{h_0}\right)^{\lambda_m}.$$

補題 2 対応

$$h \mapsto (h_0, \theta_1(h), \ldots, \theta_{n-1}(h))$$

によって、同型 $J(n) \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^{n-1}$ が得られる.

このことを用いると，指標 $\chi : \tilde{H}_\lambda \to \mathbb{C}^\times$ は

$$\chi(h;\alpha) = \prod_{k=1}^{\ell} \chi_{n_k}(h^{(k)};\alpha^{(k)}) = \prod_{k=1}^{\ell} \exp\left(\sum_{m=0}^{n_k-1} \alpha_m^{(k)} \theta_m(h^{(k)})\right)$$

で与えられる．ここで $\alpha^{(k)} \in \mathbb{C}^{n_k}$ であるが、$J(n_k)$ の Lie 環 $\mathrm{j}(n_k)$ の weight とも見なせる. この α に次の条件を課す.

$$\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_0^{(k)} = -r-1, \quad \alpha_{n_k-1}^{(k)} \neq 0 \ (\forall k).$$

Radon 変換 指標 χ に代入する積分変数 $\vec{u} = (1, u_1, \ldots, u_r)$ の一次式の係数を与える空間を準備する.

$$Z_{r,N} = \{z = (z^{(1)}, \ldots, z^{(\ell)}) \in M(r+1, N) \mid \text{条件 } (*) \text{ を満たす}\}$$

ここで $z^{(k)} = (z_0^{(k)}, \ldots, z_{n_k-1}^{(k)}) \in M(r+1, n_k)$ で条件 $(*)$ は、weight $r+1$ の任意の subdiagram $\mu = (m_1, \ldots, m_\ell), 0 \le m_k \le n_k$ に対して

$$\det(z_0^{(1)}, \ldots, z_{m_1-1}^{(1)}, \ldots, z_0^{(\ell)}, \ldots, z_{m_\ell-1}^{(\ell)}) \neq 0. \tag{8}$$

このとき、一般超幾何積分は $z \in Z_{r,N}$ に対して $\vec{u}z$ を $\tilde{H}_\lambda$ の元と見なして $\chi(\cdot;\alpha)$ に代入することによって得られる：

$$I(z,\alpha,c) = \int_c \chi(\vec{u}z;\alpha)du.$$

ここで、$du = du_1 \wedge \cdots \wedge du_r$、$c$ は $\chi(\vec{u}z;\alpha)$ により定まるある homology 群の r-次元サイクルである．また θ_m の具体的な形 (7) より、被積分関数 $\chi(\vec{u}z;\alpha)$ は、$\mathbb{C}^r$ における超平面達 $H_k = \{u \in \mathbb{C}^r \mid \vec{u} \cdot z_0^{(k)} = 0\}$ によって定義される超平面配置 $\mathcal{A}$ に特異性をもつ多価正則関数である.

4 捩れ de Rham コホモロジー

de Rham コホモロジー群を定義するためにいくつか記号を用意しよう.

- $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_\ell\}$: $\mathbb{C}^r$ における超平面配置.
- $N(\mathcal{A}) = \bigcup_{k=1}^{\ell} H_k$.
- $\Omega^p(*\mathcal{A})$: 高々$N(\mathcal{A})$ に極を持つ $\mathbb{C}^r$ 上の p 次有理微分形式全体.

このとき，ねじれ外微分： $\nabla : \Omega^p(*\mathcal{A}) \to \Omega^{p+1}(*\mathcal{A})$ が

$$\nabla(\eta) = (\chi^{-1} \cdot d \cdot \chi)(\eta) = d\eta + \Big(d \log \chi(\vec{u}z; \alpha)\Big) \wedge \eta$$

で定義される. $d\log\chi(\vec{u}z;\alpha)$ は高々 H_k に n_k 位の極を持つ有理 1-形式なので、∇ は well-defined である. また $\nabla \circ \nabla = 0$ であることが容易に分かるので 捩れ有理 de Rham 複体:

$$C(*\mathcal{A}) : \Omega^0(*\mathcal{A}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(*\mathcal{A}) \xrightarrow{\nabla} \cdots \xrightarrow{\nabla} \Omega^r(*\mathcal{A}) \to 0$$

が得られる. この複体のコホモロジー群を 捩れ de Rham コホモロジー群 という.

$$H^p(C(*\mathcal{A})) := \frac{\mathrm{Ker}\,\{\nabla : \Omega^p(*\mathcal{A}) \to \Omega^{p+1}(*\mathcal{A})\}}{\mathrm{Im}\,\{\nabla : \Omega^{p-1}(*\mathcal{A}) \to \Omega^p(*\mathcal{A})\}}.$$

我々は，**超幾何積分に付随した de Rham コホモロジー群を具体的に決定することに興味がある．この問題は，次の場合には既に解決されている．**

1) $r = 1$ のとき. つまり一重積分の場合.

2) r が一般で，N の分割$= (1, \ldots, 1)$ の場合. つまり Aomoto-Gelfand の場合.

3) r が一般で，N の分割$= (N)$ の場合. つまり一般化された Airy 積分の場合 ([4]).

4) r が一般で、 N の分割が $(q, 1, \ldots, 1)$ の場合 ([5]).

5 一般 Airy 積分の場合

特異点論との関係で、特に一般 Airy 積分の場合について見てみよう. つまり一般超幾何積分で N の分割が (N) の場合である. $z = (z_0, \ldots, z_{N-1}) \in Z_{r,N}$ が $z_0 = {}^t(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{r+1}$ を満たすと仮定すると、

$$\chi(\vec{u}z; \alpha) = e^{f(u)} du, \quad f(u) = \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_m \theta_m(\vec{u}z) \tag{9}$$

と表したとき、 $f(u)$ は u の $N-1$ 次多項式で、孤立特異点を持ち、その Milnor 数は $\binom{N-2}{r}$ である. もちろん 1 変数の時は A_{N-2} 型単純特異点の deformation になっている. この事実から次が示せる.

命題 3 一般 *Airy* 積分に対する捩れ *de Rham* コホモロジーについて

1) $H^p(C(*\mathcal{A}))=0$ *for* $p\neq r$,

2) $\dim_{\mathbb{C}} H^r(C(*\mathcal{A}))=\binom{N-2}{r}$

更にその基底の取り方について述べよう. $\mathcal{Y}(r,l)$ で size が $r\times l$ のボックスに含まれる Young 図形の集合を表す. すなわち $Y\in\mathcal{Y}(r,l)$ であれば、その length が $\ell(Y)\leq r$ で各 parts が l 以下である. また $Y\in\mathcal{Y}(r,l)$ に対応する $v_1,\dots,v_r$ の Schur 多項式 $s_Y(v)$ に対してその基本対称式 $e_1(v),\dots,e_r(v)$ を用いて

$$s_Y(v)=S_Y(e(v))$$

となる多項式 $S_Y(u)$ を考える.

命題 4 一般 *Airy* 積分に対する $H^r(C(*\mathcal{A}))$ の基底として

$$S_Y(u)du,\quad Y\in\mathcal{Y}(r,N-r-2). \tag{10}$$

が取れる.

この命題は、$r=1$ のとき $H^1(C(*\mathcal{A}))$ の基底として

$$du, udu,\dots,u^{N-3}du$$

が取れることを主張している. しかしこの場合には、我々にとってもっと重要な基底が存在する. それは

$$d(\theta_1(\vec{u}z)),\dots,d(\theta_{N-2}(\vec{u}z)) \tag{11}$$

である. これは A 型特異点における flat basis の類似である. flat basis の類似といっている理由を説明しよう. 一般 Airy 積分の定義における $z\in Z_{1,N}$ を

$$z=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&x_1&x_2&\dots&x_{N-1}\end{pmatrix},\quad x_1=1$$

とおくと、(9) における f は

$$f(u)=\sum_{m=1}^{N-1}\alpha_m\theta_m(1,x_1u,\dots,x_{N-1}u)$$

であるが、この和における各項は次のように書ける.

補題 5 ある $g = -u(1 + y_1 u^{-1} + y_2 u^{-2} + \cdots)$ が存在して

$$\theta_m(1, x_1 u, \ldots, x_{N-1} u) = -\frac{1}{m}(g^m)_+, \quad 1 \le m \le N-1.$$

ここで、$(g^m)_+$ は g^m の $\deg \ge 1$ の部分を表す.

一般超幾何関数については、それをまた同じタイプの一般超幾何関数に移す変換の群というものがあって、その群の作用を用いると一般 Airy 関数のパラメータ α を $(-2, 0, \ldots, 0, -1)$ に持っていくことができる. (実は古典的な Airy 積分との関連をつけるときにこのようなものを天下りで取っていた.) すると

$$f(u) = -\theta_{N-1}(1, x_1 u, \ldots, x_{N-1} u)$$

となる. このときコホモロジーの基底 (11) は、Noumi-Ishiura ([?] の f に対する Jacobi 環の A 型 flat basis と同じものである.

6 外積構造について

一般 Airy 積分に付随する de Rham コホモロジー群の基底を命題 4 において Schur 関数を用いて与えたが、このことは $Z_{r,N}$ の Veronese 点と呼ばれる特別な点におけるコホモロジー群の外積構造と関係がある.

Veronese 写像 $\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^r$ に埋め込む写像

$$\mathbb{P}^1 \ni [v_0, v_1] \mapsto [v_0^r, v_0^{r-1} v_1, \ldots, v_1^r] \in \mathbb{P}^r \tag{12}$$

は Veronese 写像と呼ばれるが、これは次のように記述することもできる. V を 2 次元複素ベクトル空間とし、 $S^r V$ をその r 次対称テンソル積とする. 写像 $\psi : V \to S^r V$ を

$$v \mapsto v^{\otimes n} := \overbrace{v \otimes \cdots \otimes v}^{r}$$

により定義すると、ここから誘導される写像 $\bar{\psi} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^r V)$ が Veronese 写像である. 実際、V の基底 e_0, e_1 をとり、 $S^r V$ の基底として

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_r = k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, \quad 0 \le k \le r$$

をとる. これらの基底によって写像 ψ を表現すると

$$(v_0e_0+v_1e_1)^{\otimes r}=\sum_{k=0}^{r}v_0^{r-k}v_1^k\mathbf{e}_k$$

より $\bar{\psi}$ の表現として (12) を得るからである. さて、我々が必要なのは、このVeronese写像を少し一般化したものである.

T についての多項式環の T^n の生成するイデアル (T^n) による剰余環 $\mathbb{C}[T]/(T^n)$ を R_n と表すことにする. $V_n:=V\otimes_{\mathbb{C}}R_n$ は、rank 2 の自由 R_n 加群である. S^rV_n を R_n 加群としての r 次対称テンソル積として写像

$$\psi_n:V_n\to S^rV_n,\quad v\mapsto v^{\otimes r}$$

を考える. これらを基底を用いて表現してみよう. まず、V_n を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と思ったときの基底として

(13) $$e_i\otimes T^j,\quad (i=0,1;j=0,\dots,n-1)$$

をとり、S^rV_n のそれとして

(14) $$\mathbf{e}_i\otimes T^j,\quad (i=0,\dots,r;j=0,\dots,n-1)$$

をとる. これらの基底を用いて V_n と S^rV_n をそれぞれベクトル空間 $M(2,n)$ と $M(r+1,n)$ と同一視する. すなわち

$$v=\sum_{i,j}v_{ij}e_i\otimes T^j\leftrightarrow\begin{pmatrix}v_{00}&v_{01}&\cdots&v_{0,n-1}\\v_{10}&v_{11}&\cdots&v_{1,n-1}\end{pmatrix}$$

と

$$w=\sum_{i,j}v_{ij}\mathbf{e}_i\otimes T^j\leftrightarrow\begin{pmatrix}w_{00}&w_{01}&\cdots&w_{0,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\w_{r0}&w_{r1}&\cdots&w_{r,n-1}\end{pmatrix}$$

である. このような基底による表現を用いれば、写像 ψ_n は $\psi_n:M(2,n)\to M(r+1,n)$ を引き起こす. この写像も同じ記号 ψ_n で表した.

例 6 $r=2$ として、写像 $\psi_3:M(2,3)\to M(3,3)$ を具体的に表すと以下のようになる.

$$v\mapsto\begin{pmatrix}v_{00}^2&2v_{00}v_{01}&2v_{00}v_{02}+v_{01}^2\\v_{00}v_{01}&v_{00}v_{11}+v_{01}v_{10}&v_{00}v_{12}+v_{02}v_{10}+v_{01}v_{11}\\v_{01}^2&2v_{01}v_{11}&2v_{10}v_{12}+v_{11}^2\end{pmatrix}$$

外積構造 さて、ここで N の分割が $(n_1,\dots,n_\ell)$ の場合の一般超幾何積分の状況に戻ろう.

補題 7 写像 $\Psi : M(2,N)\to M(r+1,N)$ を

$$z=(z^{(1)},\dots,z^{(\ell)})\mapsto(\psi_{n_1}(z^{(1)}),\dots,\psi_{n_\ell}(z^{(\ell)}))$$

で定義すると、 $\Psi : Z_{1,N}\to Z_{r,N}$ が誘導される.

この写像 Ψ も（一般化された）Veronese 写像と呼ぶことにする.

定理 8 $z_0^{(1)}={}^t(1,0)$ を満たす $z\in Z_{1,N}$ に対して

$$\tilde{z}=\Psi(z)\in Z_{r,N},\quad \tilde{\alpha}=\alpha+(-r+1,0,\dots,0) \tag{15}$$

とおく. このとき

$$H^r(C_{\tilde{z},\tilde{\alpha}})\simeq\bigwedge^r H^1(C_{z,\alpha})$$

が成り立つ. 従って $\dim_{\mathbb{C}}H^r(C_{\tilde{z},\tilde{\alpha}})=\binom{N-2}{r}$ である.

例 9 一般 *Airy* 積分の場合 $z\in Z_{1,N}$ に対する $H^1(C_{z,\alpha})$ の基底として

$$\varphi_i=u^i du,\quad (0\le i\le N-3)$$

を取ったとする. このとき $i_1>i_2>\dots>i_r\ge 0$ に対して $Y=(i_1-r+1,i_2-r+2,\dots,i_r)$ と定めると定理 *8* の対応は

$$\varphi_{i_1}\square\cdots\square\varphi_{i_r}\mapsto S_Y(v)dv$$

となる. ここで $v=(v_1,\dots,v_r)$ および $dv=dv_1\wedge\dots\wedge dv_r$ である.

例 10 一般 *Airy* 積分の場合 $z\in Z_{1,N}$ に対する $H^1(C_{z,\alpha})$ の基底として

$$\varphi_i=d\theta_i(\vec{u}z),\quad (1\le i\le N-3)$$

を取ったとする. このとき定理 *8* の対応によって

$$\varphi_{i_1}\square\cdots\square\varphi_{i_r}\mapsto d\theta_{i_1}(\vec{v}\tilde{z})\wedge\dots\wedge d\theta_{i_r}(\vec{v}\tilde{z})$$

となる.

例 11 N の分割が $(n_1, \ldots, n_\ell)$ のとき $z \in Z_{1,N}$ に対するコホモロジー群 $H^1(C_{z,\alpha})$ の基底として

$$d\theta_1(\vec{u}z^{(1)}), \ldots, d\theta_{n_1-2}(\vec{u}z^{(1)})$$
$$d\theta_0(\vec{u}z^{(k)}), d\theta_1(\vec{u}z^{(k)}), \ldots, d\theta_{n_k-1}(\vec{u}z^{(k)}), \quad (2 \leq k \leq \ell)$$

が取れる. このとき *(15)* に対する $\tilde{z}, \tilde{\alpha}$ に対するコホモロジー群 $H^r(C_{\tilde{z},\tilde{\alpha}})$ の基底として $H^1(C_{z,\alpha})$ の基底において $\vec{u}z$ を $\vec{v}\tilde{z}$ で置き換えたものの r 個の外積として得られる r-形式が取れる.

最後に予想を述べて本稿を終えることにする.

予想 N の分割が $(n_1, \ldots, n_\ell)$ の場合に、任意の $z \in Z_{r,N}$ に対して $H^r(C_{z,\alpha})$ の基底として例 11 に述べた r-形式が取れる.

最後に、今回の特異点理論の研究会で門外漢である筆者に講演の機会を与えてくださった研究代表者に感謝したい.

参考文献

[1] I. M. Gelfand: General theory of hypergeometric functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **288** (1986) 14–18,
English translation: Soviet Math. Dokl. **33** (1986) 9–13.

[2] I. M. Gelfand, V. S. Retahk, and V. V. Serganova: Generalized Airy functions, Schubert cells, and Jordan groups. Dokl. Akad. Nauk. SSSR , **298** (1988) 17–21.
English transl.: Soviet Math. Dokl. **37** (1988) 8–12.

[3] T. Inui: Special functions, Iwanami Shoten, (1962).

[4] H. Kimura: On rational de Rham cohomology associated with the generalized Airy functions. Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa **24** (1997) 351–366.

[5] H. Kimura: On rational de Rham cohomology associated with the general hypergeometric integrals of type $(q+1, 1^{N-q})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **12** (2005).

[6] H. Kimura and T. Koitabashi: Normalizer of maximal abelian subgroups of $GL(n)$ and the general hypergeometric functions. Kumamoto J. Math. **9** (1996) 13–43.