数理解析研究所講究録
1501巻 2006年 47-60

超平面配置とLefschetzの超平面切断定理[1]

吉永正彦 (Masahiko Yoshinaga)[2]

1 Introduction

Lefschetzの超平面切断定理は、複素代数多様体のトポロジーに関する最も基本的な定理と言って良いと思います。その主張は一言で言うと「複素代数多様体は、その超平面切断に幾つかセルを貼り付けた空間とホモトピー同値」というものです。しかしこの定理の証明はモース理論によっており、セル分割の存在は示していますが、セルの貼り付き方についてはなにも教えてくれません。

実数係数の(アフィン)一次式で定義された超平面配置の補集合、という非常に特殊な多様体に対して、良いモース関数が作れ、そのモース関数の臨界点に対して、非安定セルの貼り付き方を決定する、という最近の研究を紹介します。Lefschetz の定理を繰り返し使うことにより、多様体のセル分割が得られますが、特に超平面配置の補集合の場合は、このセル分割が極小セル分割となります。極小セル分割はセルの枚数が全ての次元で最小になるという、非常に特殊な性質を持ちますので、その研究は超平面配置のトポロジーに多くの応用を持つと期待されます。例としてGenericな局所系に対して、真ん中次元以外の局所系係数コホモロジーが消える、という消滅定理の別証明が最近得られています。詳しくは[Y1, Y2]を参照ください。

2 Lefschetzの超平面切断定理と極小セル分割

本節ではまず、超曲面補集合に対するレフシェッツの超平面切断定理を復習します。そしてそれを帰納的に使うことにより、複素超平面配置の補集合が極小CW複体とホモトピー同値である、という Dimca-Papadima, Randell [DP1, Ra2] の結果を紹介します。

$g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_\ell]$ を多項式として、$\mathsf{M}(g) := \{x \in \mathbb{C}^\ell \mid g(x) \neq 0\}$ を超曲面 $\{g = 0\}$ の補集合とします。

---

[1]RIMS 研究集会「Recent Topics in Real and Complex Singularities」(2005.11.28–12.1) 報告集

[2]Address: International Centre for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, 34014 Trieste, Italy, email: myoshina@ictp.it

Theorem 2.0.1 (Affine Lefschetz Theorem [Ha, HL]) $F \subset \mathbb{C}^\ell$ を *generic* な超平面とする。この時、超曲面補集合 $\mathsf{M}(g)$ は、その超平面切断 $\mathsf{M}(g) \cap F$ に ℓ 次元セルを幾つか貼り付けた空間とホモトピー同値。

証明のスケッチ：一次式 f を超平面 F の定義式として、次の関数を考えます。

$$\varphi = \left|\frac{f}{g}\right| : \mathsf{M}(g) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

φ に関してモース理論を考えます。まず φ に関して一番低い所は超平面切断 $\varphi^{-1}(0) = \mathsf{M}(g) \cap F$ です。$\varphi \neq 0$ を満たす臨界点の集合を $\mathrm{Crit}(\varphi)$ とおいて、各臨界点 $p \in \mathrm{Crit}(\varphi)$ ごとに、対応する非安定セルを W_p^u とおきます。この時 $\mathsf{M}(g)$ は $\varphi^{-1}(0)$ に非安定セルを貼り付けた空間とホモトピー同値となり、次のホモトピー同値が得られます。

$$\mathsf{M}(g) \approx (\mathsf{M}(g) \cap F) \cup \bigcup_{p \in \mathrm{Crit}(\varphi)} W_p^u.$$

各セルの次元ですが、φ が正則関数の絶対値であるということと、コーシー・リーマンの方程式から、次元（＝モース指数）が ℓ であるということが従います。 **（証明のスケッチ終わり）**

レフシェッツの超平面切断定理は、様々に一般化されていますが [GM]、アフィン多様体の場合に特に重要なポイントは、

$$\text{貼り付けるセルが、全て } \ell \text{ 次元である} \tag{1}$$

という事実です。このことから直ちに次の事実が得られます：

- $\mathsf{M}(g)$ は ℓ 次元 CW 複体とホモトピー同値で、超平面切断 $\mathsf{M}(g) \cap F$ は $(\ell - 1)$-skeleton とホモトピー同値となる。
- ℓ 次元セルの枚数は丁度 $\dim H_\ell(\mathsf{M}(g), \mathsf{M}(g) \cap F)$。
- ℓ 次元セルの枚数は $b_\ell(\mathsf{M}(g))$ 以上。

三つ目の点は、トポロジーの一般論ですが、セルの枚数とベッチ数の間にはもう少し精密に、次の完全系列があります。

$$0 \to H_\ell(\mathsf{M}(g)) \to H_\ell(\mathsf{M}(g), \mathsf{M}(g) \cap F) \to H_{\ell-1}(\mathsf{M}(g) \cap F) \xrightarrow{i_{\ell-1}} H_{\ell-1}(\mathsf{M}(g)).$$

この完全列と、上の事実 (1) から、次の有名な事実もすぐに得られます。

Corollary 2.0.2 $i_p : H_p(\mathsf{M}(g) \cap F, \mathbb{C}) \to H_p(\mathsf{M}(g), \mathbb{C})$ を埋め込み $i : \mathsf{M}(g) \cap F \hookrightarrow \mathsf{M}(g)$ から得られるホモロジーの間の写像とする。この時

$$i_p \text{ は } \begin{cases} \text{同型} & \text{for } p = 0, 1, \ldots, \ell - 2 \\ \text{全射} & \text{for } p = \ell - 1. \end{cases}$$

さて、ここで g が超平面配置の定義式、つまり一次式の積になっている場合を考えます。複素超平面配置の補集合に対しては、ベッチ数やコホモロジー環の組合せ論的な記述が Orlik-Solomon により知られています [OS]。それによると、$i_{\ell-1} : H_{\ell-1}(\mathsf{M}(g) \cap F, \mathbb{C}) \to H_{\ell-1}(\mathsf{M}(g), \mathbb{C})$ が同型であることが分かります。このことと、上の完全系列より、$\mathsf{M}(g)$ が超平面配置の補集合の場合は、ℓ 次元セルの枚数が丁度 ℓ 次元ベッチ数に等しくなることが分かります。つまり貼り付けるセルの枚数が、最小になり、レフシェッツの定理を使う立場から見れば、超平面配置の補集合は超曲面補集合達の中でも、際立った性質を持っていると言えます。次元 ℓ に関する帰納法から直ちに次が得られます：

Theorem 2.0.3 (**[DP1]** **[Ra2]**) $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^\ell$ 内のアフィン超平面配置とする。この時、補集合 $\mathsf{M}(\mathcal{A})$ は極小 CW 複体とホモトピー同値となる。ただし、極小 CW 複体とは、全ての k に対して k 次元セルの枚数が k 次のベッチ数 $b_k(\mathsf{M}(\mathcal{A}))$ に等しくなるような有限 CW 複体のことである。

超曲面補集合は一般には極小 CW 複体とホモトピー同値にはならないことを注意しておきます（例えば $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 - y^3 \neq 0\}$）。

3 Attaching maps

超平面配置補集合 $\mathsf{M}(\mathcal{A})$ が、極小セル複体とホモトピー同値である、という事実は超平面配置のトポロジーに関して多くの応用を持つだろうと考えられています。例えば、$\mathsf{M}(\mathcal{A})$ 上の rank 1 の局所系 $\mathcal{L}$ に対して、$\mathcal{L}$ 係数コホモロジーの次元が、

$$\dim H_k(\mathsf{M}(\mathcal{A}), \mathcal{L}) \leq b_k(\mathsf{M}(\mathcal{A}))$$

を満たすだろう、という青本ー喜多の予想 [AK] は、局所セル分割の存在から直ちに従います[3]。しかし、上の極小セル分割定理は、セル分割が可能であることは示していますが、実際のホモトピー型については、なにも教えてくれません。また極小セル分割に付随して、局所系係数の（コ）チェイン複

[3]予想自体は、極小セル分割が示される以前に解かれています [Co2]。

体が得られますが、その境界写像についても何も教えてくれません。これらを知るには、極小セル分割のセルの貼り付きかた（Attaching maps)、つまりレフシェッツの定理から得られるセルの貼り付きかたを見る必要があります。言い換えると、非安定セル W_p^u のホモトピー型を決定する必要があるのですが、問題が二つはあります：

(1) 臨界点 $\mathrm{Crit}(\varphi)$ の決定、

(2) 臨界点 $p \in \mathrm{Crit}(\varphi)$ に対する非安定セル W_p^u のホモトピー型の決定。

(1) は単純化してしまえば、多項式の零点を求める問題といえるので、場合によっては実行可能かも知れません。しかし、(2) は定義どおりに求めようとすると「勾配流によって生成されるセルの構成」という超越的な操作を含んでおり、一般には大変難しいです。

以下ではこの二つのポイントを、実係数超平面配置の補集合の場合にどのようにして克服できるか、について書きます。

4 実超平面配置とその複素化

4.1 記号の設定

$V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^\ell$ を ℓ 次元実ベクトル空間、$\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を $V_{\mathbb{R}}$ 内の超平面配置とし、$H \in \mathcal{A}$ に対して定義方程式 α_H を固定し、$Q = \prod_{i=1}^n \alpha_i$ と置きます。

実ベクトル空間内での補集合 $V_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ は、有限個の連結開集合の和集合になります。この連結成分を、Chamber と呼び、Chamber 全体の集合を $\mathsf{ch}(\mathcal{A})$ で表します。Chamber の中でも、特に有界な Chamber 全体のなす部分集合を $\mathsf{bch}(\mathcal{A})$ で表します。

実超平面配置は、自然に複素化を考えることが出来ます。複素化した超平面配置の補集合を

$$\mathsf{M}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$$

で表します。

4.2 モース関数と Chamber

実係数一次式 f を定義式とする Generic な超平面 $F = \{f = 0\}$ を固定します。また F の複素化を $F_{\mathbb{C}} = F \otimes \mathbb{C}$ で表します。$\mathsf{M}(\mathcal{A})$ 上のモース関数として次の関数を考えます：

Definition 4.2.1

$$\varphi = \left| \frac{f^{n+1}}{Q} \right| : \mathsf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

分母が n 個の一次式の積 $Q = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ であることに注意します。このことは、F から離れる方向では、φ の分子の方が分母より速く大きくなることを意味しています。

Example 4.2.2 $\ell = 1$ の場合を考えます。$\mathbb{R}$ 上の n 点配置の定義式を $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$、Generic な一次式を $f(x) = x - b$ と置き、モース関数

$$\varphi = \left| \frac{(x-b)^{n+1}}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} \right| : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

を考えます。φ は $\{a_1, \ldots, a_n\}$ に極を持っていて、分母分子の次数の関係から、$|x| \gg 0$ では、勾配流 $-\operatorname{grad}\varphi$ は内側を向いています (Figure 1)。

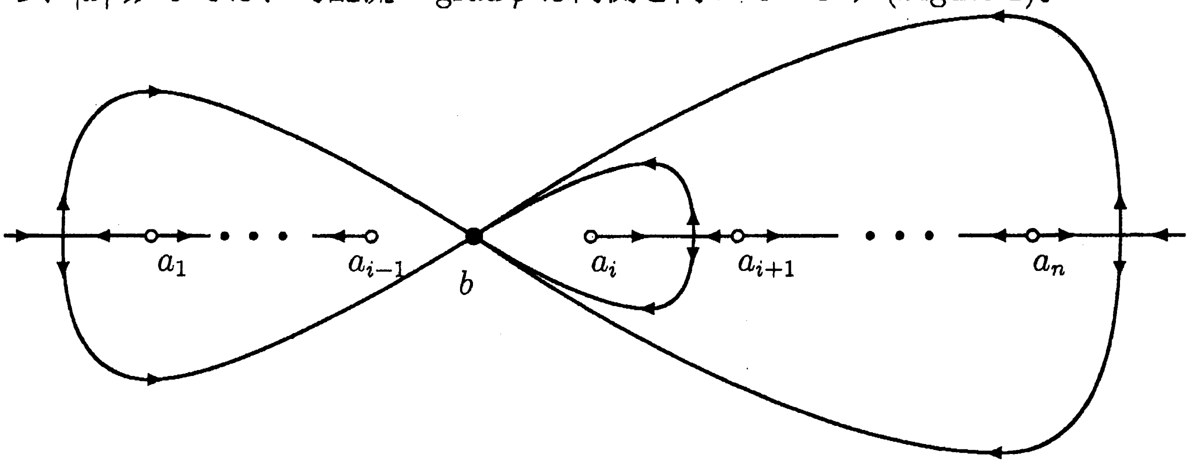

Figure 1: Gradient flow for $\ell = 1$

上の例において、一次元実アレンジメント $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ の Chamber は

$$\mathsf{ch}(\mathcal{A}) = \{(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)\}$$

の $n+1$ 個ですが、そのうち、Generic な超平面 $F = \{b\}$ を含まない n 個の Chamber 達

$$\{(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{i-2}, a_{i-1}), (a_i, a_{i+1}), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)\}$$

を考えると、

各 Chamber の中に丁度一つづつ、Morse 指数 1 の臨界点があり、
それぞれの Chamber は φ の安定多様体となる

ことが観察されます。これを高次元の場合に一般化するために、次の定義をします。

Definition 4.2.3 $\mathbb{R}^\ell$ 内の実超平面配置 $\mathcal{A}$ と、Generic な超平面 F に対して、

$$\mathsf{ch}_F(\mathcal{A}) := \{C \in \mathsf{ch}(\mathcal{A}) |\ C \cap F = \emptyset\}.$$

実超平面配置の Chamber の個数と、$\mathsf{M}(\mathcal{A})$ のトポロジーについては、古典的に次のことが知られています。

Propositon 4.2.4 $b_i = b_i(\mathsf{M}(\mathcal{A}))$ をベッチ数とすると、

(1) $|\mathsf{ch}(\mathcal{A})| = \sum_{i=1}^{\ell} b_i$.

(2) $|\mathsf{bch}(\mathcal{A})| = \left|\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i b_i\right|$.

(3) $|\mathsf{ch}_F(\mathcal{A})| = b_\ell$.

特に (3) により、上で定義した “F に触れない Chamber” の個数が丁度 ℓ 次のベッチ数 $b_\ell(\mathsf{M}(\mathcal{A}))$ に等しいことが分かります。つまり、極小セル分割における ℓ 次元セルの枚数、モース関数 φ の臨界点の個数と等しくなります。

Morse 関数 $\varphi = |f^{n+1}/Q|$ の $C \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A})$ への制限 $\varphi|_C : C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は、構成から、境界では発散しています。よって C の内部に少なくとも一つ臨界点 $p_C \in C$ が存在します。さらにコーシー・リーマンの方程式から、$p_C \in \mathsf{M}(\mathcal{A})$ は $\varphi : \mathsf{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ の臨界点になっていることも分かります。実は $C \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A})$ の中には、臨界点は一点しかないことが分かります。より正確には、次の結果が示されます。これは **Example 4.2.2** の高次元化となっています。

Theorem 4.2.5 次の対応は一対一

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{ch}_F(\mathcal{A}) & \longleftrightarrow & \mathrm{Crit}(\varphi) \\ & & \\ C & & p_C \end{array}$$

さらに、Chamber $C \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A})$ は、臨界点 $p_C \in \mathrm{Crit}(\varphi)$ の安定多様体である[4]。

[4] この辺りは記述を単純にするために、正確でない部分がある。ここで扱っているモース関数 φ の臨界点が非退化とは限らない。それを回避するために [Y1] では、φ を perturb して $\varphi_\lambda = |f^{n+1}/\prod_i \alpha_i^{\lambda_i}|$ $(\lambda \in \mathbb{Q})$ という形のモース関数を考えている。しかし、非安定セルのホモトピー型は、以下に述べる特徴づけより、λ_i に依存しないことが分かるので「φ はモース関数である」と信じて理論展開しても大した影響はない。

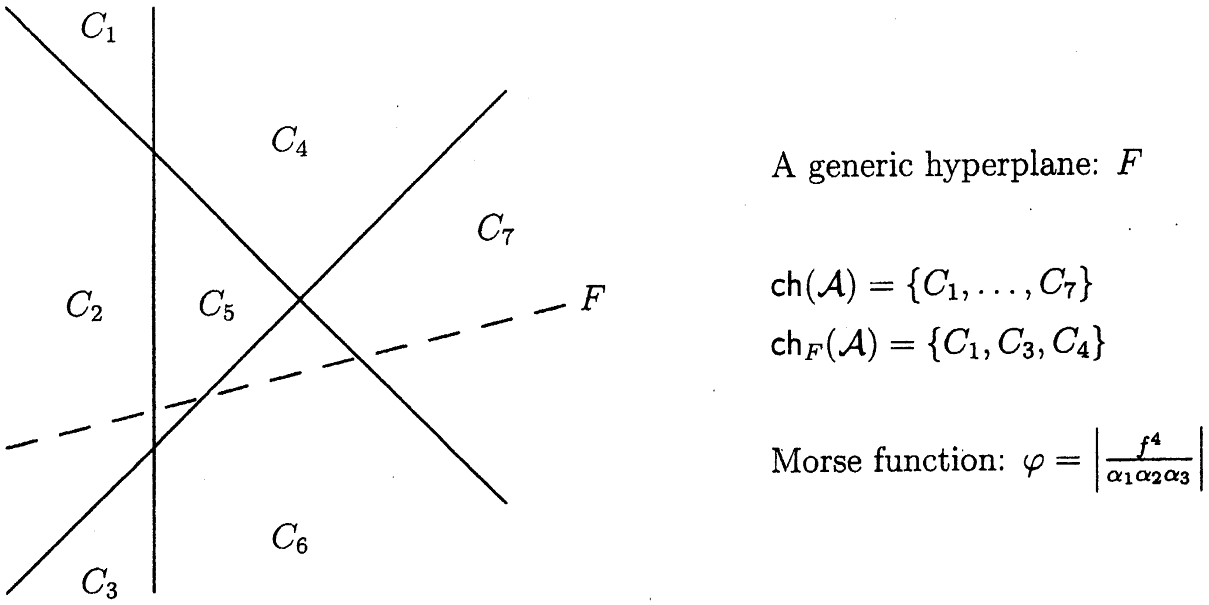

Figure 2: モース関数 φ と安定多様体

5　非安定セルの決定

前節では、モース関数 $\varphi = |f^{n+1}/Q|$ に対して、安定多様体が Chamber として実現されていることを見ました。しかし Lefschetz の切断定理で重要なのは、非安定セルの方です。つまり臨界点 $p_C \in C$ から湧き出る勾配流により生成される ℓ 次元セル、言い換えると円盤 D^ℓ からの写像

$$\sigma_C : (\mathrm{D}^\ell, \partial\mathrm{D}^\ell) \longrightarrow (\mathsf{M}(\mathcal{A}), F_{\mathbb{C}} \cap \mathsf{M}(\mathcal{A}))$$

が知りたいわけです。

既に述べましたが、定義通りに非安定セル σ_C を構成することはまず不可能です。そこで §3 で述べた問題点を解決するために、次のような方針をとります：

(a) Chamber $C \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する非安定セル $\sigma_C : \mathrm{D}^\ell \to \mathsf{M}(\mathcal{A})$ のホモトピー型の特徴付けをする。

(b) 条件を満たす写像 σ_C を具体的に構成する。

5.1　非安定セルのホモトピー型の特徴付け

まず Chamber $C \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A})$ 内の臨界点 $p_C \in C$ によって生成される非安定セル $\sigma_C : (\mathrm{D}^\ell, \partial\mathrm{D}^\ell) \to (\mathsf{M}(\mathcal{A}), F_{\mathbb{C}} \cap \mathsf{M}(\mathcal{A}))$ がどのような性質を持つか考えます。

Propositon 5.1.1 σ_C は次を満たす。

(i) $\sigma_C(\mathrm{D}^\ell)$ は C と横断的に一点だけで交わる。($\sigma_C(\mathrm{D}^\ell) \pitchfork C = \{p_C\}$)

(ii) $C, C' \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A}), C \neq C'$ とすると、$\sigma_C(\mathrm{D}^\ell) \cap C' = \emptyset$.

(i) はモース関数の局所的な性質から明らかです。(ii) も (非) 安定多様体の定義と常微分方程式の解の一意性からただちに分かります。

実はこれらの条件 (i), (ii) は非安定セル σ_C のホモトピー型を特徴付けます。つまり次の定理が成り立ちます。

Theorem 5.1.2 連続写像 $\sigma'_C : (\mathrm{D}^\ell, \partial\mathrm{D}^\ell) \to (\mathsf{M}(\mathcal{A}), F_\mathbb{C} \cap \mathsf{M}(\mathcal{A}))$ が C とは横断的に一点で交わり、$C' \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A}) \setminus \{C\}$ とは交わらないとします。この時 σ'_C と σ_C はホモトピック：$\sigma'_C \approx \sigma_C$

(証明のスケッチ) 勾配流 $-\operatorname{grad}\varphi$ が生成する $\mathsf{M}(\mathcal{A})$ の 1-parameter 微分同相写像族を ϕ_t と起きます。σ'_C が、条件 (i), (ii) を満たしているとすると、σ'_C を勾配流で流して、時間無限大の極限を取ると、

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t \circ \sigma'_C = \sigma_C$$

となることがが分かります。$\phi_0 \circ \sigma'_C = \sigma'_C$ なので、ϕ_t がホモトピーを与えていることが分かります。 **(証明のスケッチ終わり)**

5.2 非安定セルの構成

繰り返しになりますが、前節 **Theorem 5.1.2** によって、とにかく何でも良いので二つの条件：

(i) $\sigma_C(\mathrm{D}^\ell)$ は C と横断的に一点だけで交わる。

(ii) $C, C' \in \mathsf{ch}_F(\mathcal{A}), C \neq C'$ とすると、$\sigma_C(\mathrm{D}^\ell) \cap C' = \emptyset$.

を満たす写像 $\sigma_C : (\mathrm{D}^\ell, \partial\mathrm{D}^\ell) \to (\mathsf{M}(\mathcal{A}), F_\mathbb{C} \cap \mathsf{M}(\mathcal{A}))$ を構成すれば Lefschetz の定理における非安定セルのホモトピー型が分かることになります。

σ_C を構成するための、$\mathsf{M}(\mathcal{A})$ の表示を導入します。まず複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^\ell$ を次の同一視により、$\mathbb{R}^\ell$ の接束の全空間と同一視します。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}\mathbb{R}^\ell & \longrightarrow & \mathbb{C}^\ell \\ & & \\ (x, v) & \longmapsto & x + \sqrt{-1}v, \end{array} \tag{2}$$

ただし、$x \in \mathbb{R}^\ell$, $v \in \mathrm{T}_x\mathbb{R}^\ell$。

実アフィン超平面 $H_\mathbb{R}$ の定義式の内積を使った表示を

$$\alpha(x) = \overrightarrow{a} \cdot x + \overrightarrow{b}$$

と置きます、特に $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^\ell$ です。複素ベクトル $x + \sqrt{-1}v$ が、$H \otimes \mathbb{C}$ に入るかどうかを考えると、

$$\begin{aligned} \alpha(x + \sqrt{-1}v) &= \overrightarrow{a} \cdot (x + \sqrt{-1}v) + \overrightarrow{b} \\ &= \overrightarrow{a} \cdot x + \overrightarrow{b} + \sqrt{-1}(\overrightarrow{a} \cdot v) \\ &= \alpha(x) + \sqrt{-1} \times \overrightarrow{a} \cdot v \end{aligned}$$

となります。つまり、

$$\begin{aligned} \alpha(x + \sqrt{-1}v) = 0 &\iff x \in H_\mathbb{R} \text{ and } \overrightarrow{a} \cdot v = 0 \\ &\iff x \in H_\mathbb{R} \text{ and } v \in \mathrm{T}_x H_\mathbb{R} \end{aligned}$$

となることが分かります。これより次を得ます：

Propositon 5.2.1 上の同一視 (2) において、

$$\mathsf{M}(\mathcal{A}) \cong \{(x, v) \in \mathrm{T}\mathbb{R}^\ell | v \notin \mathrm{T}\mathcal{A}_x\}$$

ただし、$\mathcal{A}_x = \{H \in \mathcal{A} | H \ni x\}$ は x を含む超平面全体からなる部分集合で、$\mathrm{T}\mathcal{A}_x$ はその接錐。

つまり雑に言うと、$(x, v) \in \mathrm{T}\mathbb{R}^\ell$ が $\mathcal{A}$ に対して横断的であることを要請しているわけです (Figure 3)。

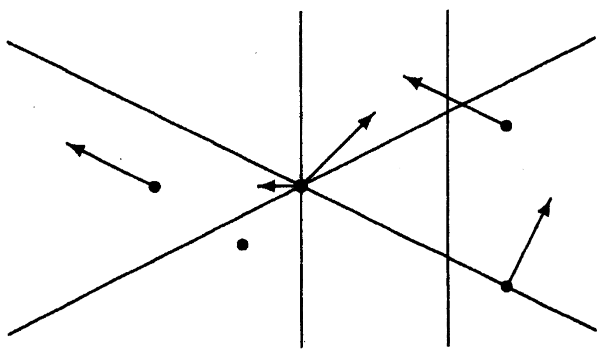

Figure 3: $\mathsf{M}(\mathcal{A})$ の点

この表示を使って、ℓ 次元円盤から $\mathsf{M}(\mathcal{A})$ への写像を具体的に構成することが出来ます。一般次元での構成は煩雑なので、ここでは $\ell=2$ で二本の直線配置 $\mathcal{A}=\{L_1, L_2\}$ の場合を考えます。具体的には次の状況で考えます (Figure 5 の一番上の図参照)：

$$\begin{aligned} L_1 &: \ y = x + \frac{1}{2} \\ L_2 &: \ y = -x + \frac{1}{2} \\ F &: \ y = 0. \end{aligned}$$

$\sigma_C : (\mathrm{D}^2, \partial\mathrm{D}^2) \to (\mathsf{M}(\mathcal{A}), F_{\mathbb{C}} \cap \mathsf{M}(\mathcal{A}))$ を構成するのですが、円盤 D^2 を幾つかの部分に分け、各パーツごとに写像を定義します。円盤内の点を極座標表示 $\mathrm{D}^2 = \{v = (r\cos\theta, r\sin\theta)\}$ しておいて、十分小さな角度 $0 < \theta_0 \ll \pi$ を一つ固定します。

Definition 5.2.2 (Figure 4)

(1) (核): $A_1 = \left\{v \in \mathrm{D}^2 \,\middle|\, r \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(2) (北半球): $A_2 = \left\{v \in \mathrm{D}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0\right\}$.

(3) (南半球): $A_3 = \left\{v \in \mathrm{D}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0\right\}$.

(4) (低緯度地帯)[5]: $A_4 = \mathrm{D}^2 \setminus A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

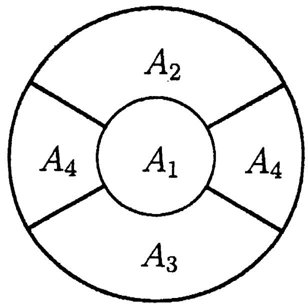

Figure 4: Decomposition of D^2

この D^2 の分割に基づいて、各パーツからの写像 $\sigma_i : A_i \to \mathsf{M}(\mathcal{A})$ を次のように定義します (Figure 5)。

[5] $\ell = 2$ の場合のみ "低緯度地帯" は二つの連結成分に分かれますが、$\ell \geq 3$ では連結になります。

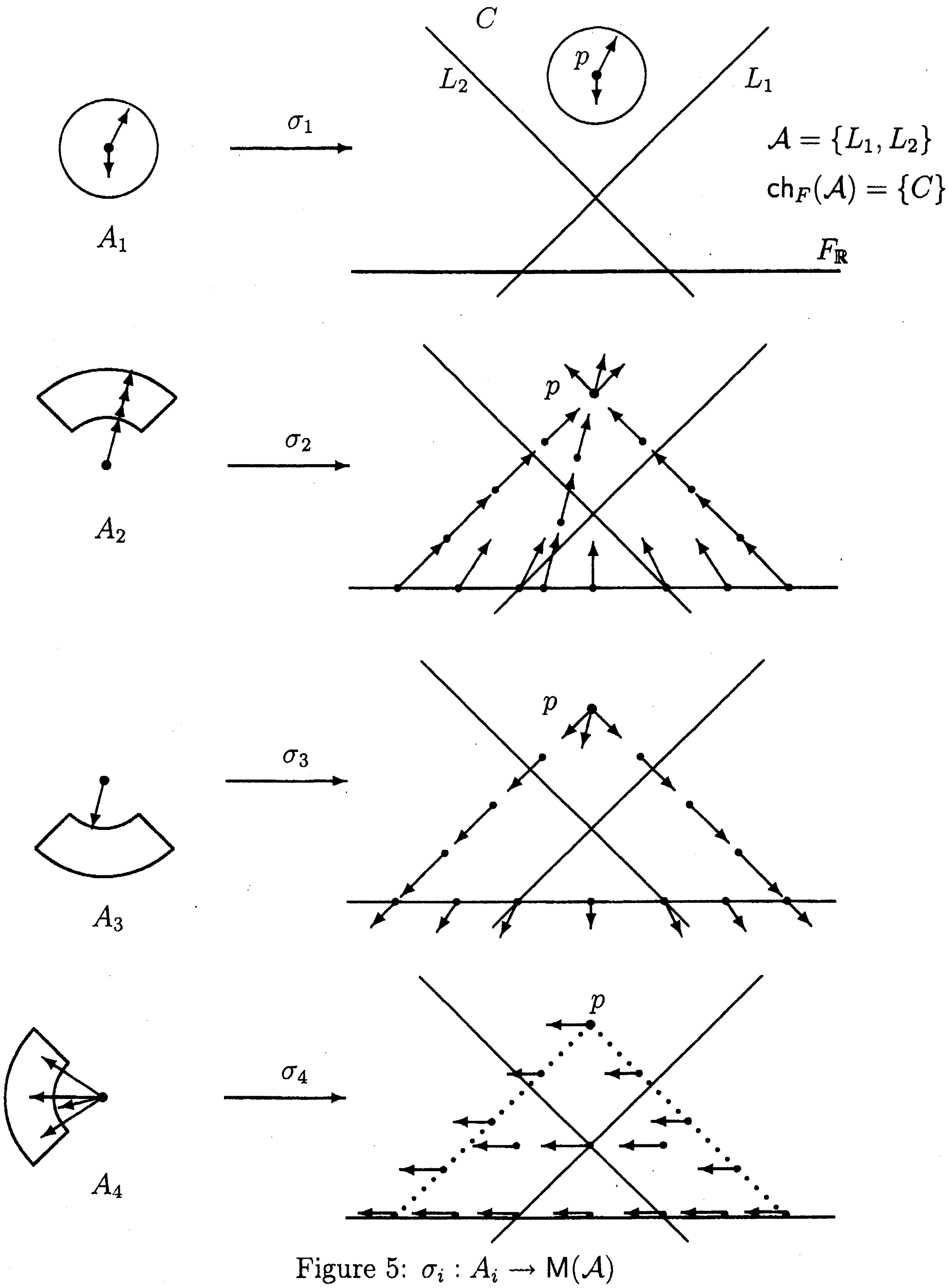

Figure 5: $\sigma_i : A_i \to \mathsf{M}(\mathcal{A})$

詳細は略しますが、全ての接ベクトルが「pの方向を向いている」かまたは「水平」なので、$\mathcal{A}=\{L_1,L_2\}$には横断的な方向です。つまり$\mathsf{M}(\mathcal{A})$に入っています。このままではパーツごとの境界で写像σ_iとσ_jが貼り合っていないのですが、超平面に交わることなく、貼り合わせることが出来ます。

6 応用

§3でも述べましたが、前節で構成したセルの貼り合わせ写像を分析することによって、$\mathsf{M}(\mathcal{A})$上の局所系係数(コ)チェイン複体の境界写像の記述ができます。これは実質的にCohen-Orlik [CO] の "Universal complex" の境界写像の記述になっています。この境界写像の記述の応用として、ごく最近、Kohno ([Ko]) の消滅定理（の Cohen-Dimca-Orlik, Libgober による精密化 [CDO, Li2]）の別証明が得られました [Y2]。

Theorem 6.0.3 ℓ次元実超平面配置$\mathcal{A}$と、複素化補集合$\mathsf{M}(\mathcal{A})$上のrank 1局所系$\mathcal{L}$が与えられたとする。無限遠平面H_∞に含まれるDense edgeの周りのモノドロミーが1でなければ[6]、

$$H^k(\mathsf{M}(\mathcal{A}),\mathcal{L})=\begin{cases}0 & \text{for } k\neq\ell\\ \bigoplus_{C\in\mathsf{bch}(\mathcal{A})}\mathbb{C}[C] & \text{for } k=\ell.\end{cases}$$

が成り立つ。

極小セル分割の貼り合わせ写像の記述は大変複雑ですが、その応用として、これまでに得られているnon-resonanceに関する結果の（実アレンジメントの場合に）別証明を与えるくらいの力があることは分かりました。今後は、より精密なresonance(cohomology jumping)に関する応用を目指したいと思います。

謝辞 研究集会をオーガナイズし、講演の機会を与えて頂いた、大本先生に深く感謝致します。

[6][Ko, CDO]では"Open immersion iに関する二つの関手i_*と$i_!$の同値性"、[Li2]では有限被覆への持ち上げに関する要請、[Y2]では境界写像の具体的な記述からの要請、と全く違う文脈から同じ条件が出てくるという点が個人的には不思議です。

References

[AK] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論、シュプリンガー・フェアラーク東京 (1994).

[Co1] D. Cohen, Cohomology and intersection cohomology of complex hyperplane arrangements. Adv. Math. **97** (1993), no. 2, 231–266.

[Co2] D. Cohen, Morse inequalities for arrangements. Adv. Math. **134** (1998), no. 1, 43–45.

[CDO] D. Cohen, A. Dimca, P. Orlik, Nonresonance conditions for arrangements. Ann. Inst. Fourier **53** (2003), 1883–1896.

[CO] D. Cohen, P. Orlik, Arrangements and local systems. Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 2-3, 299–316.

[DP1] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements. Ann. of Math. (2) **158**(2003), no. 2, 473–507.

[DP2] A. Dimca, S. Papadima, Equivariant chain complexes, twisted homology and relative minimality of arrangements. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 3, 449–467.

[Fa] M. Falk, Homotopy types of line arrangements. Invent. Math. **111** (1993), no. 1, 139–150.

[GM] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 14. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Ha] H. A. Hamm, Lefschetz theorems for singular varieties. Proc. Symp. Pure Math. **40** (1983), 547–557.

[HL] H. A. Hamm, D. T. Lê, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. Ann. Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 317–355.

[Ko] T. Kohno, Homology of a Local System on the Complement of Hyperplanes. Proc. Japan Acad., **62**, Ser. A (1986), 144–147.

[Li1] A. Libgober, On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves. J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 103–114.

[Li2] A. Libgober, Eigenvalues for the monodromy of the Milnor fibers of arrangements. Trends in Singularities (A. Libgober, M. Tibar eds.), Trends Math., Birkhäuser, 2002, 141–150.

[Mi1] J. Milnor, Morse theory. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J.

[Mi2] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces. Annals of Mathematics Studies, No. 61 Princeton University Press, Princeton, N.J.

[OS] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Invent. Math. **56** (1980), 167–189.

[OT1] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[OT2] P. Orlik, H. Terao, The number of critical points of a product of powers of linear functions. Invent. Math. **120** (1995), no. 1, 1–14.

[Ra1] R. Randell, The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes. Invent. Math. **69** (1982), no. 1, 103–108.

[Ra2] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers and minimality of hyperplane arrangements. Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 9, 2737–2743.

[Si] R. Silvotti, On a conjecture of Varchenko. Invent. Math. **126** (1996), no. 2, 235–248.

[Va] A. N. Varchenko, Critical points of the product of powers of linear functions and families of bases of singular vectors. Compositio Math. **97** (1995), no. 3, 385–401.

[Y1] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem. Preprint (math.AG/0507311)

[Y2] M. Yoshinaga, A non-resonance result via minimal CW-decomposition of hyperplane complements. In preparation,

[Za] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Memoirs Amer. Math. Soc. **154** 1975.