数理解析研究所講究録
1503巻 2006年 106-109

On complemented graphs and characteristic polynomials of zero-divisor graphs

愛知教育大学教育学部　金光　三男 (Mitsuo Kanemitsu)
Aichi University of Education

§1. Introduction

$\mathbf{Z}_n=\{0,1,2,3,\cdots,n-2,n-1\}$ を整数環 $\mathbf{Z}$ の n による剰余環とする. I. Beck は1988年に, 単位元1を持つ可換環 R に頂点集合 $V(G)$ として R の各元を, また異なる二つの頂点 a,b が $ab=0$ を満たすときに辺であるとする. そして辺全体を辺集合 $E(G)$ とした単純グラフ $G=(V(G),E(G))$ を付随させた. このように定義されたグラフ G を, ここでは**I. Beckの零因子グラフ**とよび $\Gamma_0(R)$ とも記す.

また, D.F. Anderson とP.S. Livingston は1999年に, $\Gamma_0(R)$ の誘導部分グラフ $\Gamma(R)$ を定義した. 詳しく述べると, 単位元1を持つ可換環 R の零因子全体を $Z(R)$, そして $Z(R)^*=Z(R)-\{0\}$ とおく. $V(\Gamma(R))=Z(R)^*$ とし, 異なる二つの頂点 a,b が $ab=0$ のときを辺 $\{a,b\}$ と定義する. このグラフ $\Gamma(R)$ を R に付随した**零因子グラフ**という.

次にR. Levy とJ.S. Shapiro は単純グラフ $G=(V(G),E(G))$ の二つの頂点 $a,b\in V(G)$ に対して, $a\leq b$ とは, a と b は隣接していなくて b に隣接している頂点 c は a に隣接しているときとする. また a と b が**直交する**とは, a と b は隣接しているが a と b を結ぶ辺を含む三角形は存在しないときをいい, $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ とかく.

G が **complemented graph** とは, $\forall x\in V(G)$ に対して, $x\perp y$ となる $\exists y\in V(G)$ が存在するときをいう. また G が **uniquely complemented graph** とは, G が complemented graph かつ $x\perp y$, $x\perp z$ なら $Ann(y)=Ann(z)$ のときをいう.

次に辺イデアルやコーエン・マコーレーグラフの定義をする ([5, pp.167-168]). $G=(V(G),E(G))$ をグラフで, $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ とし, k を体とする. 各頂点 v_i に対して X_i として, $R=k[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ を体 k 上の多項式環とする. v_i と v_j が隣接しているとき辺といい, $\{v_i,v_j\}$ と記す. これに平方因子を持たない単項式 X_iX_j 全体の集合によって生成される R のイデアル $I(G)$ をグラフ G に付随した**辺イデアル**という. 式で書くと

$$I(G) = (\{X_iX_j \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\}).$$

もし G が空グラフなら $I(G) = (0)$ とおく.

グラフ G が体 k 上の**コーエン・マコーレーグラフ**とは, $R/I(G)$ がコーエン・マコーレー環 (depth $R/I(G) = dim(R/I(G)))$ のときをいう.

この小論では, complemented graph や complemented graph だが uniquely complemented でないような零因子グラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ の固有多項式 $f(\lambda)$, 異なる 4-サイクルの個数などを計算して求める. またコーエン・マコーレーかどうかにも触れる.

§2. 零因子グラフの例

例 1. $R = \mathbf{Z}_3[X]/(X^4) = \mathbf{Z}_3[x] = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d, d \in \mathbf{Z}_3\}$. この環の零因子は 27 個の元からなり, $Z(R) = \{bx + cx^2 + dx^3 \mid b, c, d = 0, 1, 2\}$ で $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ だから, I.Beck の零因子グラフは $\Gamma_0(R) = (\mathbf{Z}_3[x], E(\Gamma_0(R)))$ であり, 零因子グラフは $\Gamma(R) = (Z(R)^*, E(\Gamma(R)))$ となる.

例 2. I.Beck の零因子グラフ $\Gamma_0(\mathbf{Z}_n)$ に関して次の 3 つは同値である.
(1) 彩色数 $\chi(\Gamma_0(\mathbf{Z}_n)) = 2$.
(2) $n = p$ (p は素数) 又は 4.
(3) グラフ $\Gamma_0(\mathbf{Z}_n)$ の固有多項式 $f(\lambda)$ は $f(\lambda) = \lambda^n - (n-1)\lambda^{n-2}$.

例 3. I.Beck の零因子グラフ $\Gamma_0(\mathbf{Z}_n)$ に関して次の 2 つは同値である.
(1) 彩色数 $\chi(\Gamma_0(\mathbf{Z}_n)) = 3$.
(2) (i) $n = pq$ (p, q は異なる素数), (ii) $4p$, または (iii) 9.
この条件が成立するときは, [3] より,
(3) グラフ $\Gamma_0(\mathbf{Z}_n)$ の固有多項式 $f(\lambda)$ は次のようになる.
(i) の場合 : $f(\lambda) =$

$$\lambda^n - (2pq - p - q)\lambda^{n-2} - 2(p-1)(q-1)\lambda^{n-3} + (p-1)^2(q-1)^2\lambda^{n-4}.$$

(ii) の場合 : もし $p \neq 2$ の場合なら, $f(\lambda) =$

$$\lambda^n - (8p-5)\lambda^{n-2} - 8(p-1)\lambda^{n-3} + 2(p-1)(6p-5)\lambda^{n-4} + 4(p-1)^2\lambda^2\lambda^{n-5} - 4(p-1)^3\lambda^{n-6}.$$

もし $n = 8$(即ち $p = 2$) の場合なら,

$$f(\lambda) = \lambda^9 - 9\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4.$$

(iii) の場合：

$$f(\lambda) = \lambda^9 - 9\lambda^7 - 2\lambda^6 + 6\lambda^5.$$

例 4. $\mathbf{Z}_{33}$ の単元の個数は

$$\varphi(33) = 33(1 - \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{1}{11}) = 20$$

となり, $33 - 20 - 1 = 12$ が零因子グラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{33})$ の位数となる. 固有多項式 $f(\lambda, \mathbf{Z}_{33})$ は,

$$f(\lambda, \mathbf{Z}_{33}) = \lambda^{12} - 20\lambda^{10}$$

となる. 次数列は $(10, 10, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ だから, [3] より 2-マッチングの個数 $n_M = 90$ となる. また異なる 4-サイクルの個数 $n_C = 45$ である. このグラフの彩色数 $\chi(\Gamma(\mathbf{Z}_{33}))$ は 3 である. またこのグラフは三角形は持たず, 四角形をもち, complemented graph の例になっている. さらに uniquely complemented graph でもある. 五角形以上のサイクルは持たない.

この零因子グラフはペンダントを持たない二部グラフだから, コーエン・マコーレーグラフではない.

§3. Complemented graphs である零因子グラフの固有多項式

Complemented であるが unique complemented graphs でないグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{4p})$ に対しては次のことが成立する.

定理 1. $p \neq 2$ **なる素数に対して, 零因子グラフ** $\Gamma(\mathbf{Z}_{4p})$ **の固有多項式** $f(\lambda, \mathbf{Z}_{4p}))$ **は,**

$$f(\lambda, \mathbf{Z}_{4p}) = \lambda^{2p+1} - 4(p-1)\lambda^{2p-1} + 2(p-1)^2\lambda^{2p-3}$$

となる.

Uniquely complemented graphs の固有多項式 $\Gamma(\mathbf{Z}_{pq})$(但し, p と q は異なる素数) については, 次のことが成立する.

定理 2. p, q **を相異なる素数とし,** $n = pq$ **とおく.** $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ **を零因子グラフとする. この零因子グラフの固有多項式を** $f(\lambda, \mathbf{Z}_{pq})$ **とすると, 次のことな成立する.**

(1) $f(\lambda, \mathbf{Z}_{pq}) = \lambda^{p+q-2} - (p-1)(q-1)\lambda^{p+q-4}$.

(2) 2-マッチングの個数は, $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)(pq-2p-2q+4)$ **となる.**

(3) 異なる４－サイクルの個数は, $\frac{1}{4}(p-1)(q-1)(pq-2p-2q+4)$ **である.**

例 5. $n = 44$ の場合, $\mathbf{Z}_{44}$ の単元の個数はオイラー関数 $\varphi(m)$ を使用すると $\varphi(44) = 20$ となる. 従って, グラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{44})$ の固有多項式 $f(\lambda, \mathbf{Z}_{44})$ は,

$$f(\lambda, \mathbf{Z}_{44}) = \lambda^{23} - 40\lambda^{21} + 200\lambda^{19}$$

となる. Mathematica でも計算してみると, 計算結果は一致する.

例 6. $n = 18$ の場合, 零因子グラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{18})$ は, 位数 11 である. $9 \perp 8$ であるが, $6 \perp 15$ でないから, この零因子グラフは, complemented graph ではない. 2-マッチイングの個数は 36, 異なる４－サイクルの個数は 3 である. また, このグラフの固有多項式 $f(\lambda, \mathbf{Z}_{18})$ は次のようになる.

$$f(\lambda, \mathbf{Z}_{18}) = \lambda^{11} - 13\lambda^{9} - 6\lambda^{8} + 30\lambda^{7} + 24\lambda^{6}.$$

また $\Gamma(\mathbf{Z}_{18})$ は Cohen-Maculay graph ではない.

参考文献

[1] D.F.Anderson and P.S.Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999), 434-447.

[2] I.Beck, Coloring of commutative ring, *J. Algebra* **116** (1988), 208-226.

[3] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with $\mathbf{Z}_n$ and their characteristic polynomials, *to appear.*

[4] R.Levy and J.Shapiro, The zero-divisor graphs of von Neumann regular rings, *Communications in Algebra*, **30** (2002), 745-750.

[5] R.H.Villarreal, *Monomial Algebras* (Pure and Applied Mathematics 238), 2001, Dekker.