数理解析研究所講究録
1504巻 2006年 1-14

搜索資源特性を考慮した捜索割当ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

目標は移動戦略をとり，捜索者は捜索資源投入戦略をとる２人ゼロ和の捜索ゲームとして，捜索割当ゲームと呼ばれる問題を考える．古典的な捜索割当ゲームでは，目標移動や捜索資源に対し一般的ではあるが現実的でない制約しか課していなかったため，その解は分かり易いが現実問題には適用が難しい研究が多かった [1, 2]．その後，目標移動の現実的特性としてエネルギー制約を課した研究等がなされてきた [6, 4, 5, 3]．一方，捜索資源の特性としては，いわば使い捨ての資源特性，すなわち資源投入時のみ，投入地点のみで効力のある資源のみが一貫して考慮されるばかりであった．実際には，その効力に時間持続性や遠隔作用性のある捜索資源も多い．水中で用いられる音響センサーを例に引くまでもなく，電気的動力をもつ多くの探知センサーは，そのエネルギー源が切れるまでは効力が持続し，またセンサー設置場所から遠く離れた場所でのシグナルをも探知すると考えることが自然である．この論文では，これまでの研究で見逃されてきたこのような捜索資源特性を考慮した捜索割当ゲームを考え，ゲームを解くための解法を提案する．

2 モデルと定式化

捜索者と目標が２人のプレイヤーとして参加し，時間的経過を伴う次のような捜索ゲームを考える．捜索者は目標を発見すべく手持ちの捜索資源を捜索地理空間に投入し，目標は地理空間上を時間とともに移動することにより捜索者から逃避しようと図る．捜索資源の投入戦略をとる捜索者と移動戦略をとる目標が参加するゲームは，捜索割当ゲームと呼ばれる．ここでは，次のように捜索資源の効果に時間持続性と遠隔作用性のある場合の捜索ゲームを考えよう．

(A1) 捜索空間を，離散地理空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ と離散時間空間 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ から成る集合 $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{T}$ とする．

(A2) 目標は時間とともに移動する１つのパスを選択する．パス ω の時点 t での通過地点を $\omega(t)\in\boldsymbol{K}$ とする．また，目標の取り得る実行可能パス全体を Ω とする．

(A3) 捜索者のとる戦略は捜索資源投入計画 $\varphi=\{\varphi(i,t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\boldsymbol{T}\}$ で表される．ただし，$\varphi(i,t)\in\boldsymbol{R}$ は時点 t において地点 i へ投入する非負の捜索資源量である．この捜索資源は投入時点 t 以降 t_c の期間その効力が持続するものとする．また，複数のセルから成る地域 $A(i)\subseteq\boldsymbol{K}$ に対しても効果が及ぶものの，その効果は地点に依存して減衰し，地点 $j\in A(i)$ での減衰率を $\beta(i,j)$ で表す．一般的には $i\in A(i)$ であり，$\beta(i,i)=1$ であるが，他の $j\in A(i)$ に対しては $\beta(i,j)\leq 1$ である．
搜索資源の投入を開始できる捜索開始時点は τ であるとし，τ 以降の捜索可能時点集合を $\widehat{\boldsymbol{T}}=\{\tau,\tau+1,\cdots,T\}$ で表す．また，投入資源量に対する制約として，各時点ごとの総量制約と捜索全体における総量制約を表す次の２つの制約を考える．

$$(a)\ \text{各時点における総量制約：}\ \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\leq\Phi(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}} \quad (1)$$

(*b*) 全時点における総量制約： $\displaystyle\sum_{t=\tau}^{T}\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\le M$ (2)

(A4) 目標のパス ω と捜索者の資源投入戦略 φ により，目標パス上に効果を及ぼす捜索資源の重み付き総量 $g(\varphi,\omega)$ に対し単調増加で狭義凹な関数 $f(g(\varphi,\omega))$ の目標探知確率が得られるものとする．目標を探知した場合捜索者は利得1を得，目標は1を失う．地点 i に投入された単位捜索資源量の効果を重み α_i で表現するが，これは探知確率に対する資源の有効性を示す特性値である．

ここでいくつかの記号を定義しよう．前提 (A3) から，地点 i へ影響を及ぼすことのできる資源の投入地点は $A^*(i)\equiv\{j\in\boldsymbol{K}\mid i\in A(j)\}$ で与えられる．同じく前提 (A3) から，捜索資源の実行可能領域 Ψ は次のようになる．

$$\Psi\;=\;\{\varphi\mid\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\le M,\;\;\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\le\Phi(t),\;t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\;\varphi(i,t)\ge0,\;i\in\boldsymbol{K},\;t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$$

さて，目標，捜索者の純粋戦略を ω, φ とする．時点 t において目標は地点 $\omega(t)$ に存在し，そこに影響を及ぼす投入資源は，時点 $\max\{\tau,t-t_c\}$ から時点 t までの間に地点 $j\in A^*(\omega(t))$ に投入されたものであり，前提 (A3) の減衰率 $\beta(j,\omega(t))$ を考慮すると，捜索資源の重み付き総量 $g(\varphi,\omega)$ 及び支払関数は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}g(\varphi,\omega)\;&=\;\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\sum_{\xi=\max\{\tau,t-t_c\}}^{t}\;\sum_{j\in A^*(\omega(t))}\beta(j,\omega(t))\varphi(j,\xi)\\&=\;\sum_{\xi=\tau}^{T}\;\sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}}\;\sum_{j\in A^*(\omega(t))}\alpha_{\omega(t)}\beta(j,\omega(t))\varphi(j,\xi)\qquad(3)\end{aligned}$$

$$R(\varphi,\omega)\;=\;f(\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\sum_{\xi=\max\{\tau,t-t_c\}}^{t}\;\sum_{j\in A^*(\omega(t))}\beta(j,\omega(t))\varphi(j,\xi))\qquad(4)$$

ここで，目標に関しては混合戦略 $\pi=\{\pi(\omega),\;\omega\in\Omega\}$ を考えよう．$\pi(\omega)$ はパス ω を選択する確率を示す．π の実行可能領域は次式で与えられる．

$$\Pi=\{\pi(\omega)\mid\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1,\;\pi(\omega)\ge0,\;\omega\in\Omega\}\qquad(5)$$

捜索者の純粋戦略 φ と目標の混合戦略 π による期待支払は $R(\varphi,\pi)=\sum_\omega\pi(\omega)R(\varphi,\omega)$ と書け，π に関しては線形，φ に関しては狭義凹となっているが，そのミニマックス値とマックスミニ値が一致することはすでに知られており，以後我々は目標の混合戦略，捜索者の純粋戦略の範囲内で均衡解を導出することにする．

3 均衡解の導出

前節で明らかにしたように，取り扱うゲームは捜索者の純粋戦略と目標の混合戦略により均衡解が得られる．また，期待利得 $R(\varphi,\pi)$ のマックスミニ値，及びミニマックス値によりゲームの値が得られる．ここでは，そのマックスミニ問題及びミニマックス問題を解くことにより，ゲームの値及びプレイヤーの最適戦略を具体的に導出する．

まずマックスミニ問題を考えるが，実行可能領域 Π の制約式に注意すれば，期待利得は次の変形を許す．

$$\max_{\varphi\in\Psi}\;\min_{\pi\in\Pi}\;R(\varphi,\pi)=\max_{\varphi\in\Psi}\;\min_{\pi\in\Pi}\;\sum_{\omega}\pi(\omega)R(\varphi,\omega)=\max_{\varphi\in\Psi}\;\min_{\omega\in\Omega}\;R(\varphi,\omega)=\max_{\varphi,\zeta}\;\{\zeta\mid f(g(\varphi,\omega))\ge\zeta,\;\omega\in\Omega\}$$

ここで関数 $f(\cdot)$ の単調性を利用した変換 $\eta = f^{-1}(\zeta)$ を行うと，さらに次のような変形ができる．

$$\text{上式} = \max_{\varphi,\eta}\ \{f(\eta) \mid g(\varphi,\omega) \geq \eta,\ \omega \in \Omega\} = f(\max_{\varphi,\eta}\ \{\eta \mid g(\varphi,\omega) \geq \eta,\ \omega \in \Omega\})$$

結局，マックスミニ問題は線形計画問題 $\max_{\varphi,\eta}\ \{\eta \mid g(\varphi,\omega) \geq \eta,\ \omega \in \Omega\}$ を解くことと同値であることが分かるが，(3) 式から，この線形計画問題は次のようになる．

$$P^S\ :\ \max_{\varphi,\eta}\ \eta$$

$$s.t.\ \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\ \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \alpha_{\omega(t)} \sum_{j\in A^*(\omega(t))} \beta(j,\omega(t))\varphi(j,\xi) \geq \eta,\ \omega \in \Omega \tag{6}$$

$$\varphi \in \Psi \tag{7}$$

この最適値 η^* を用いれば，元のゲームのマックスミニ値は $f(\eta^*)$ で計算できる．また，問題の最適解 φ^* が捜索者の最適戦略を与える．ところで，線形計画問題 (P^S) は期待利得を $R(\varphi,\pi) = \sum_\omega \pi(\omega)g(\varphi,\omega)$ と考えた場合のマックスミニ問題そのものであるから，期待利得が変数 π と φ に対し双線形なこの式で与えられると仮定して，以後の議論を行うことにしよう．

次に，ミニマックス問題を考える．期待利得 $R(\varphi,\pi) = \sum_\omega \pi(\omega)g(\varphi,\omega)$ は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
R(\varphi,\pi) &= \sum_\omega \pi(\omega) \sum_{\xi=\tau}^{T} \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \alpha_{\omega(t)} \sum_{j\in A^*(\omega(t))} \beta(j,\omega(t))\varphi(j,\xi) \\
&= \sum_{\xi=\tau}^{T} \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \sum_\omega \pi(\omega)\alpha_{\omega(t)} \sum_{j\in A^*(\omega(t))} \beta(j,\omega(t))\varphi(j,\xi) \\
&= \sum_{\xi=\tau}^{T} \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \sum_{i\in\boldsymbol{K}} \sum_\omega \delta_{i\omega(t)}\pi(\omega)\ \alpha_i \sum_{j\in A^*(i)} \beta(j,i)\varphi(j,\xi) \\
&= \sum_{\xi=\tau}^{T} \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \sum_{i\in\boldsymbol{K}} \left(\sum_{\omega\in\Omega_{it}} \pi(\omega)\right) \alpha_i \sum_{j\in A^*(i)} \beta(j,i)\varphi(j,\xi)
\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．また，Ω_{it} は時点 t において地点 i を通過するすべてのパスの集合であり，$\Omega_{it} \equiv \{\omega \in \Omega \mid \omega(t) = i\}$ で与えられる．上式中の数え上げ $\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\sum_{j\in A^*(i)}$ では，捜索資源の影響のあるすべての地点の組合せを網羅していることになるから，これを $\sum_{j\in\boldsymbol{K}}\sum_{i\in A(j)}$ の数え上げに置き換えてもよい．したがって，(8) 式はさらに次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
R(\varphi,\pi) &= \sum_{\xi=\tau}^{T} \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \sum_{j\in\boldsymbol{K}} \sum_{i\in A(j)} \left(\sum_{\omega\in\Omega_{it}} \pi(\omega)\right) \alpha_i\ \beta(j,i)\varphi(j,\xi) \\
&= \sum_{\xi=\tau}^{T} \sum_{j\in\boldsymbol{K}} \varphi(j,\xi) \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \sum_{i\in A(j)} \left(\sum_{\omega\in\Omega_{it}} \pi(\omega)\right) \alpha_i\ \beta(j,i)
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで φ の実行可能領域 Ψ を形成する制約条件 (1), (2) を具体的に考慮しよう．

$\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(t) \leq M$ ならば M による総量制約は何の意味もなさないから，$\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(t) > M$ を仮定する．いま，(9) 式において

$$\gamma_{j\xi}(\pi) \equiv \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}} \sum_{i\in A(j)} \left(\sum_{\omega\in\Omega_{it}} \pi(\omega)\right) \alpha_i\ \beta(j,i) \tag{10}$$

での置き換えを行えば，$R(\varphi,\pi)$ のマックス問題は次式で書ける．

$$\max_{\varphi} R(\varphi,\pi) = \max_{\varphi} \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \sum_{j\in\boldsymbol{K}} \varphi(j,\xi)\ \gamma_{j\xi}(\pi) \tag{11}$$

資源の全体量 M による制限のおかげで，時点 t ではその使用可能量 $\Phi(t)$ のすべてを使えるわけではないから，実際の使用量を $\Phi(t)-\sigma_t$ だとしよう．このとき，$\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}(\Phi(t)-\sigma_t)\le M$ であるから，σ_t は次式を満たす．

$$\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \sigma_t \ge \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(t) - M,\ \ 0\le\sigma_t\le\Phi(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{12}$$

さて，各時点での資源量制約 $\sum_j \varphi(j,\xi)=\Phi(\xi)-\sigma_\xi,\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}$ から，問題 (11) 式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\max_{\varphi} R(\varphi,\pi) &= \max_{\sigma_\xi}\left[\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}(\Phi(\xi)-\sigma_\xi)\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi)\right]\\ &= \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi) - \min_{\sigma_\xi}\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sigma_\xi\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi)\end{aligned}$$

２項目の最小化において，σ_ξ の制約条件 (12) 式を考慮すれば，さらに次のように変形できる．

$$\text{上式} = \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi) - \left(\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)-M\right)\min_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi) \tag{13}$$

故に，ミニマックス値は以下の問題を解けば得られるが，$\gamma_{j\xi}(\pi)$ が $\pi(\omega)$ の線形式であることに注意する必要がある．

$$P_1\ :\ \ v_2 = \min_{\pi}\left[\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi) - \left(\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)-M\right)\min_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\ \max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi)\right] \tag{14}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1\\ & \pi(\omega)\ge 0,\ \omega\in\Omega\end{aligned}$$

ここで，次の置き換えをしよう．

$$\rho\equiv\min_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\max_{j\in\boldsymbol{K}}\ \gamma_{j\xi}(\pi),\ \ \nu(\xi)\equiv\max_{j\in\boldsymbol{K}}\gamma_{j\xi}(\pi)-\rho,\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{15}$$

このとき目的関数 (14) 式の [ ] 内は，$\sum_\xi \Phi(\xi)\nu(\xi)+M\rho$ となり，問題 (P_1) は次の問題と同値となる．

$$P^T\ :\ \ v_3 = \min_{\pi,\nu,\rho}\ \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)\nu(\xi)+M\rho$$

$$s.t.\quad \gamma_{j\xi}(\pi)\le\rho+\nu(\xi),\ j\in\boldsymbol{K},\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{16}$$

$$\nu(\xi)\ge 0,\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{17}$$

$$\rho\ge 0 \tag{18}$$

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1 \tag{19}$$

$$\pi(\omega)\ge 0,\ \omega\in\Omega \tag{20}$$

定義式 (15) では，ρ, $\nu(\xi)$ は π に依存する変数として定義されているが，問題 (P^T) では制約式 (16)–(18) の下で自由に変化できる変数として取り扱われていることに注意が必要である．ここで，両問題 (P_1) と (P^T) の同値性を証明しよう．

定義 (15) 式から条件式 (16), (17), (18) が成り立つことは明らかであるから，問題 (P_1) と (P^T) の最適値の間には $v_3 \le v_2$ が成り立つ．逆に，問題 (P^T) を解けば ρ, $\nu(\xi)$ は (15) 式となることを示そう．まず，目的関数の式から ρ, $\nu(\xi)$ はともに非負の範囲内でできるだけ小さくなる．(16) 式から $\max_j \gamma_{j\xi}(\pi) \le \rho + \nu(\xi)$ であるので，変数 $\nu(\xi)$, ρ は

$$\rho + \nu(\xi) = \max_j \gamma_{j\xi}(\pi) \tag{21}$$

とすべきである．したがって，$\rho + \min_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \nu(\xi) = \min_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \max_j \gamma_{j\xi}(\pi)$ である．式 (17), (18) 及び (21) から，$0 \le \rho \le \max_j \gamma_{j\xi}(\pi)$ であるがゆえに，

$$0 \le \rho \le \min_\xi \max_j \gamma_{j\xi}(\pi) \tag{22}$$

である．最適な π が何であれ与えられたとすると，(21) 式から $\nu(\xi) = \max_j \gamma_{j\xi}(\pi) - \rho$ であるから，これを目的関数に代入すると

$$\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(\xi)(\max_j \gamma_{j\xi}(\pi) - \rho) + M\rho = \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(\xi) \max_j \gamma_{j\xi}(\pi) - \rho \left(\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(\xi) - M \right)$$

となる．$\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(\xi) - M > 0$ であるから，上式が最小になるのは $\rho = \min_\xi \max_j \gamma_{j\xi}(\pi)$ の場合であることが (22) 式から言えるが，このことと (21) 式で決まる ρ, $\nu(\xi)$ は条件 (16)–(18) 式を満たしており実際実行可能である．以上から $v_3 \ge v_2$ も言え，問題 (P_1) と (P^T) の同値性が証明された．

問題 (P^T) を解くことによりゲームの値と目標の最適なパス選択確率 π^* が導出できる．また，捜索者の最適戦略 φ^* を求めるには，問題 (P^S) を解けばよいことも述べた．実際問題として，問題 (P^S) と (P^T) の双対性は容易に確認できるから，プレイヤーの最適戦略を求めるために線形計画問題を解くのは一度でよい．以上の議論を次の定理でまとめよう．

定理 1 ゲームの値は，問題 (P^S) または (P^T) の最適値により与えられる．また，捜索者の最適戦略 φ^* は問題 (P^S) の最適解，または問題 (P^T) の *(16)* 式に対応する最適な双対変数により得られる．一方目標の最適戦略 π^* は，問題 (P^T) の最適解，または (P^S) の *(6)* 式に対応する最適な双対変数により与えられる．

4　パスの制約条件を陽に考慮した定式化とゲームの解

2 節の前提 (A2) においては，目標のとるパスの具体的な制約条件は陽には設定していない．実際，問題 (P^S), (P^T) では，実行可能パス群 Ω の中身を具体的に記述していないが故に，様々なパスの条件をもつ問題に適用できる．しかし，この集合 Ω のサイズを考えるとき，上記の定式化による解法が必ずしも現実的と言えない場合もある．例えば，前提 (A1) の捜索空間 $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{T}$ において，パスの制約条件が全く課されていない場合には，ベキ数 $|\boldsymbol{K}|^{|\boldsymbol{T}|}$ の数のパスを考慮する必要があり，大きなサイズの捜索空間では線形計画法による解法でさえ現実的に可能だとは言えない．

以上のことから，パス選択に代わる目標戦略を用いた定式化を以後模索するが，まずパスの制約条件を具体的に設定しよう．ここでは，前提 (A1)–(A4) に付加する形で，以下のようなパスの制約条件を考える．

(P1) 目標パスにはいくつかの制約がある．まず，初期時点 $t = 1$ にセル群 $S_0 \subseteq \boldsymbol{K}$ のいずれかのセルから目標は出発する．時点 t でセル i にいる目標が次の時点に移動できるセル群は $N(i, t)$ に限定される．また，

セル i からセル j への移動にはエネルギー $\mu(i,j)$ が消費され，目標が所有していた初期エネルギー e_0 を消耗した場合には，それ以降現に存在していたセル以外へは移動できない．

議論を容易にするため，以後，エネルギー消費関数 $\mu(i,j)$ 及び初期エネルギー e_0 は整数であると仮定し，目標の残存エネルギーの可能な集合を $\boldsymbol{E}=\{0,\cdots,e_0\}$ で表す．$N(i,t)$ はいわば移動における地理的制約であり，時間に依存しない場合には時間変数 t に関わらず一定のセル群を設定すればよい．

さて，問題 (P^T) の条件 (16) 式には $\gamma_{j\xi}(\pi)$ が含まれる．定義式 (10) より，これは式 $\sum_{\omega\in\Omega_{it}}\pi(\omega)$ を持つが，この式は時間 t においてセル i にいる目標の存在確率に他ならない．また，目標の状態はこれら i, t の他に残存エネルギー e も含んだ三つ組み (i,t,e) により表現できる．以上から，ここでは目標の戦略として，状態 (i,t,e) にある目標の存在確率 $q(i,t,e)$ と，状態 (i,t,e) にあり次時点 $t+1$ でセル j に移動する遷移確率 $v(i,j,t,e)$ を採用することにしよう．地理的制約 $N(i,t)$ と移動エネルギー制約の両方を考慮すれば，状態 (i,t,e) から次時点での移動可能セル群は $N(i,t,e)=\{j\in N(i,t)|\mu(i,j)\le e\}$ で，状態 (i,t,e) へ移動可能な前の時点 $t-1$ でのセル群は $N^*(i,t,e)=\{j\in\boldsymbol{K}|i\in N(j,t-1,e+\mu(j,i))\}$ で表される．さて，問題 (P^T) 導出の議論はこの場合にもそのまま利用でき，単に (16), (19), (20) 式を新たな変数 $q(\cdot)$, $v(\cdot)$ について書き換えるだけでよい．(16) 式は，$\sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}}\sum_{i\in A(j)}\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)\alpha_i\beta(j,i)\le\rho+\nu(\xi)$ とできる．パスの連続性を表現する式として，確率 $q(i,t,e)$ から出る遷移確率と確率 $q(i,t,e)$ へ入る遷移確率の保存則が，それぞれ $q(i,t,e)=\sum_{j\in N(i,t,e)}v(i,j,t,e)$ と $q(i,t,e)=\sum_{j\in N^*(i,t,e)}v(j,i,t-1,e+\mu(j,i))$ で表現できる．また，常に存在確率の総和は 1 であるから，$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)=1$ が成り立つ．初期の存在セル，初期エネルギーの制約を表すには，$\sum_{i\in S_0}q(i,1,e_0)=1$ とすればよい．以上から，目標戦略を存在確率，遷移確率とした場合のゲームの値，最適戦略を求める問題は以下のようになる．

$$\widetilde{P}^T:\quad \min_{q,v,\nu,\rho}\ \sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(\xi)\nu(\xi)+M\rho$$

$$s.t.\quad \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c,T\}}\sum_{i\in A(j)}\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)\alpha_i\beta(j,i)\le\rho+\nu(\xi),\ j\in\boldsymbol{K},\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{23}$$

$$\nu(\xi)\ge 0,\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}$$

$$\rho\ge 0$$

$$q(i,t,e)=\sum_{j\in N(i,t,e)}v(i,j,t,e),\ i\in\boldsymbol{K},\ t=1,\cdots,T-1,\ e\in\boldsymbol{E} \tag{24}$$

$$q(i,t,e)=\sum_{j\in N^*(i,t,e)}v(j,i,t-1,e+\mu(j,i)),\ i\in\boldsymbol{K},\ t=2,\cdots,T,\ e\in\boldsymbol{E} \tag{25}$$

$$\sum_{i\in S_0}q(i,1,e_0)=1 \tag{26}$$

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)=1,\ t\in\boldsymbol{T} \tag{27}$$

$$v(i,j,t,e)\ge 0,\ i,j\in\boldsymbol{K},\ t=1,\cdots,T-1,\ e\in\boldsymbol{E}$$

また，捜索者の最適戦略を求める問題は，問題 $\widetilde{P}^T$ と双対の関係にある次の問題を解けばよいことが，以後の議論により明らかとなる．

$$\widetilde{P}^S:\quad \max_{\varphi,w,\eta}\ \eta$$

$$s.t.\quad \eta\le w(i,1,e_0),\ i\in S_0 \tag{28}$$

$$w(i,t,e)\le w(j,t+1,e-\mu(i,j)),\ i\in\boldsymbol{K},\ j\in N(i,t,e),\ t=1,\cdots,\tau-1,\ e\in\boldsymbol{E} \tag{29}$$

$$w(i,t,e) \leq \sum_{k\in A^*(i)} \sum_{\xi=\max\{\tau,t-t_c\}}^{t} \alpha_i\beta(k,i)\varphi(k,\xi) + w(j,t+1,e-\mu(i,j)),$$
$$i\in \boldsymbol{K},\ j\in N(i,t,e),\ t=\tau,\cdots,T-1,\ e\in \boldsymbol{E} \tag{30}$$

$$w(i,T,e) = \sum_{k\in A^*(i)} \sum_{\xi=\max\{\tau,T-t_c\}}^{T} \alpha_i\beta(k,i)\varphi(k,\xi),\ i\in \boldsymbol{K},\ e\in \boldsymbol{E} \tag{31}$$

$$\sum_{\xi\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sum_{j\in\boldsymbol{K}} \varphi(j,\xi) \leq M \tag{32}$$

$$\sum_{j\in\boldsymbol{K}} \varphi(j,\xi) \leq \Phi(\xi),\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{33}$$

$$\varphi(j,\xi) \geq 0,\ j\in\boldsymbol{K},\ \xi\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{34}$$

問題 $\widetilde{P}^T$ と $\widetilde{P}^S$ の双対性により，両問題はともに一致してゲームの値を与えるが，問題 $\widetilde{P}^T$ は目標の最適戦略を，問題 $\widetilde{P}^S$ は捜索者の最適戦略を与える．この双対性に関する証明は省略するが，問題 $(\widetilde{P}^S)$ は以下のようにして導出できる．

いま，$w(i,t,e)$ を，目標が状態 (i,t,e) から出発し，この時点 t 以降最適パスを選択することによって実現できる最小支払の値を示すものとする．時点 $t<\tau$ では，捜索者による捜索は開始されていないため支払は発生せず，$w(\cdot)$ の定義から次式が成り立つ．

$$w(i,t,e) = \min_{j\in N(i,t,e)} w(j,t+1,e-\mu(i,j)) \tag{35}$$

これが条件 (29) 式を導く．また時点 $t\geq\tau$ では，(3) 式から，支払 $\sum_{k\in A^*(i)} \sum_{\xi=\max\{\tau,t-t_c\}}^{t} \alpha_i\beta(k,i)\varphi(k,\xi)$ が発生した後，目標は次の時点に移ることになるから，

$$w(i,t,e) = \min_{j\in N(i,t,e)} \left\{ \sum_{k\in A^*(i)} \sum_{\xi=\max\{\tau,t-t_c\}}^{t} \alpha_i\beta(k,i)\varphi(k,\xi) + w(j,t+1,e-\mu(i,j)) \right\} \tag{36}$$

が成り立つ．条件 (30) 式はこれから派生する．もちろん，最終時点 $t=T$ での支払は

$$w(i,T,e) = \sum_{k\in A^*(i)} \sum_{\xi=\max\{\tau,T-t_c\}}^{T} \alpha_i\beta(k,i)\varphi(k,\xi) \tag{37}$$

である．(31) 式はこの式による．全時点における最小支払は，初期時点 $t=1$ にセル群 S_0 の中の最も有利なセルから出発することで実現できる支払 $\min_{i\in S_0} w(i,1,e_0)$ である．さて，捜索者はこのような最小支払を最大化することを目指すのであるから，期待支払のマックスミニ値を求める問題は $\max_{\varphi}\ \min_{i\in S_0} w(i,1,e_0)$ となる．このことと，上述した条件式 (35)-(37)，さらには $\varphi(\cdot)$ の実行可能域 Ψ が制約式 (32)-(34) を持つことを考慮すれば，この問題が $\widetilde{P}^S$ に一致することは明らかである．

5 数値例

ここで取り扱う数値例のパラメータ設定は以下のとおりである．時間空間を $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,10\}$ とする．また，地理空間としてセル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,10\}$ を設けるが，セルはこの順番で接しており，セル番号の差がいわば地理的距離を示している．目標は時点 $t=1$ にセル $S_0=\{1\}$ から出発する．目標は初期エネルギーとして $e_0=9$ を持つが，セル i, j 間での移動には距離に応じたエネルギー量 $\mu(i,j)=|i-j|^2$ を必要とするため，時点 10 では遠くてもセル 10 にしか到達できない．また，任意のセル i からは 3 隣接セルにしか移動できないという地理制約 $N(i,t)=\{i-3,i-2,\cdots,i,\cdots,i+3\}\cap\boldsymbol{K}$ が常時あるものの，最大エネルギーが 9

であることを考えれば，目標の移動においてはエネルギー制約だけを考慮すればよい．また理解を容易にするため，セル i に対し $\alpha_i = 1$ であり，任意のセル i, j 間での資源効果の減衰率を $\beta(i,j) = 1$ であるとする．捜索者は $\tau = 3$ から捜索を開始する．捜索者の資源の効果が及ぶ領域 $A(i)$ をセル i から距離 L 以内にあるセル群 $A(i) = \{i-L, i-L+1, \cdots, i, \cdots, i+L\} \cap \boldsymbol{K}$ とし，この遠隔作用距離 L により $A(i)$ を表現する．

以下のいくつかのケースでは，捜索資源の各時点での使用可能量 $\Phi(t)$，全期間での使用可能量 M，遠隔作用距離 L 及び持続時間 t_c を変化させ，捜索資源の特性変化がゲームに及ぼす影響を分析しよう．

(1) ケース１：基本ケース

持続性及び遠隔作用性のある捜索資源を用いた典型的な例として，$\Phi(t) = 1$, $M = 8 = \sum_{t=\tau}^{T} \Phi(t)$, $t_c = 2$, $L = 1$ としたケース１を取り上げる．問題 $(\widetilde{P}^T)$ を解き，時点 t, セル i における目標の最適存在確率 $\sum_{e \in \boldsymbol{E}} q(i,t,e)$ を示したのが表１-a であり，問題 $(\widetilde{P}^S)$ から捜索者の捜索資源の最適投入計画 $\varphi(i,t)$ を示したのが表１-b である．横軸に時間を縦軸にセル番号をとっている．また，セル i, 時間 t の点に効果を及ぼす資源の累積量は $\psi(i,t) = \alpha_i \sum_{\xi=\max\{\tau, t-t_c\}}^{t} \sum_{j \in A^*(i)} \beta(j,i)\varphi(j,\xi)$ により計算できるが，それを表したのが表１-c である．目標はこの累積量に注意を払いながら自らの存在確率を変化させるべきであって，資源の投入計画 $\varphi(i,t)$ そのものには直接的な関係はない．端的に言うと，累積量が多い (i,t) の点では存在確率は極力小さく，累積量の少ない点にはより多くの存在確率となるよう移動を行うべきである．ただし，エネルギー制約を含めいくつかの移動制約のため，存在確率に関するそのような成形が容易に行われるとは限らないが，表１-c の資源累積量に対し，表１-a の目標存在確率が，そのような対応を見せていることが分かる．このケースでは，捜索資源の累積量の総量 $\sum_{i \in \boldsymbol{K}} \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \psi(i,t)$ は 62.9 である．また，ゲームの値は 8 である．表１における捜索者の最適戦略を理解するためには，もっと単純なケースと比較する方がよい．

(2) ケース２：各時点での資源総量のみが制約である場合

$\Phi(t) = 7.86$ と設定し，その資源総量を $\sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(t) = 62.9$ とする．総量制約 M は無く，持続性，遠隔作用性も無い捜索資源を取り扱う．この場合の目標の最適存在確率，捜索者の最適資源配分は表２-a, ２-b となる．目標の存在確率に関する最も望ましい戦略は，自らの存在圏をできるだけ拡大させ（拡大戦略），かつその圏内で一様分布を実現すること（一様戦略）により，捜索者に捜索資源の集中配分を許さないことであり，表２-a のほとんどの時点において目標の存在領域内部で一様分布となっていることが見て取れる．しかし，移動エネルギー制約により，時点 $t = 7, 9, 10$ におけるいくつかの周辺セルでは存在確率を低くせざるを得ない．目標存在確率に対応して，表２-b の最適捜索資源配分でも目標の存在圏内部における一様配分が主たる特徴であるものの，時点 $t = 6 \sim 9$ におけるセル６や８には比較的多めの資源が投入されており，目標の拡大戦略を阻止しようとする意図が見られる．また，ゲームの値は 9.28 である．

(3) ケース３：捜索資源に時間持続性のみある場合

$t_c = 2$, $L = 0$ とし，捜索資源に時間持続性だけを付与する．最適捜索資源投入は表 3-b であり，有効資源の累積量は表３-c であるが，この場合にも累積量の総量が他のケースと同じように 62.9 となるよう調整するため，$\Phi(t) = 3$ と設定している．資源累積量の表３-c を見れば，前のケースとおなじように，周辺セルを除き，各セルへの資源の一様配分が概ね実現されている．周辺セルへの多めの資源投入策は，ケース２に比べてもやや多い．これは，目標存在確率の推移を表す表３-a の特徴から来るものである．表２-a と同じく存在圏内部ではほぼ一様であるものの，例えば $(t,i) = (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9)$ で見られるように，周辺セルへの存在確率が内部より高くなっているのは，表２-a とまったく逆である．これは，捜索資源の時間持続性による累積効果を避けるため，それまで資源の投入履歴の少ない周辺セルへ目標が移動しようとするためである．目標のこのような移動特性に対応すべく，捜索者は周辺セルへの資源投入をやや高く設定する．表３-b から，各時点における最大資源量の投入セルは，$(t,i) = (4,5), (5,6), (6,7), (7,5), (8,8)$ となって

いるが，時点 $t = 4, 5, 6$ においては目標存在確率が最大であるセルより外のセルにより多くの資源投入を実施することにより，資源の次時点への持続効果を期待した事前投入手法が用いられている．また，セル 5 へは時点 $t = 4, 7, 10$ で多くの資源投入が行われ，セル 6 へは時点 $t = 5, 8$ で多くの資源投入が行われているように，持続時間 $t_c = 2$ による周期性が見られる．すなわち，周辺セルへ逃げる目標を補足するために一度多量の資源投入を行うと，その持続効果によりその後しばらく資源投入を控え，場合によっては投入ゼロの時点もあり得る．因みに，この場合のゲームの値は 8.75 である．

(4) ケース４：捜索資源に遠隔作用性のみある場合

このケースでは，$L = 1$, $t_c = 0$ とし捜索資源に遠隔作用性のみ付与する．また，有効資源の累積総量が 62.9 となるように，$\Phi(t) = 2.63$ と設定した．捜索者の最適捜索資源投入計画は表 4-b となるが，資源の遠隔作用性を利用するため，各時点における資源の重点投入セルは飛び飛びのセルとなっている．その典型的な例が時点 $t = 5$ であり，セル 2 及び 5 で 1.315 の資源投入となっているため，有効資源の累積量は表 4-c で見るとおり，セル 1 から 6 の間で一様配分が実現されている．ただし，このような有効資源の累積量からみた一様性の実現は，その他の時点においては極めて困難である様子が表 4-c から分かる．この遠隔作用性のある資源による有効資源量の成形の困難性を見越し，表 4-a に見るように，目標側はその存在確率を一様分布とは程遠いものとしているが，それは表 4-c に最適に対応するもので，例えば時点 $t = 9$ における有効資源の累積量の大きなセル 3, 6 に対しては存在確率をゼロにしている．このケースのゲームの値は，8.33 である．

以上のケース２～４の分析から改めてケース１を見直すと，表 1-c に示されている有効捜索資源の累積量に関しは一様配分を基本方針としているものの，ケース３，４で分析したように累積量の望ましい形成の困難性が一様性に乱れを生じさせていることが分かる．また，目標の最適存在確率はそれに対応するような形で，ケース４で見られた特徴を呈している．

さて，上記のすべてのケースでは有効資源の総累積量はすべておなじ 62.9 としているため，その累積総量を如何に望ましい形に成形できるかという形成の困難性は，ゲームの値の大小により評価できる．すなわち，ケース２，３，４，１の順に困難になると言える．ケース２は総量 $M = 62.9$ の資源を分割し，いつでも，どこにでも投入でき，それがそのまま有効資源の累積量を表すため，資源配分の柔軟性は最も高く，ケース２は各時点ごとに資源使用量の上限 $\Phi(t) = 7.86$ の制約はあるが，どこに投入することも自由であり，それがそのまま有効資源の累積量となるため，望ましい有効資源の形成が比較的容易であると言える．ケース３のゲームの値がケース４より大きいことから，時間持続性の方が遠隔作用性よりは制御し易い捜索資源の性質であると言える．

次の表 5 は，資源総量制約 M は設定せず，資源制約量 $\Phi(t)$ を各時点で同じ値とした場合に，$t_c = \{0, 1, 2\}$ と $L = \{0, 1, 2\}$ のすべての組合せに対し，有効資源の累積総量が上記の 62.9 とした場合から 125.8 となった場合のゲームの値の増加量を $125.8 - 62.9$ で割ることにより，単位累積量増加に伴うゲーム値の増加率を調べたものである．ただし，他のパラメータ設定はこれまでの例と同じである．一定の組合せに対しては，この増加率は累積総量を変えてもほぼ同じ値となる．増加率の大小順は明らかであり，この表からも，有効資源の累積効果を成形することに関しては，遠隔作用性の方が時間持続性よりも困難であることが分かる．もちろん，この比較は，ここで設定した拡散型の目標と常識的な地理移動制約 $N(i, t)$ 及び資源の遠隔作用性 $A(i)$ の下での結果であり，特殊なケースにおいてはそれに応じた形で，資源が持っている２つの性質，持続性と遠隔作用性は異なった有効性を持つことになる．

ここでは，有効資源の累積総量が同じ様々なケースを比較したが，当然のことながら，資源の全体量 $\sum_{t \in \hat{T}} \Phi(t)$ を同一としたケースを比べれば，例えばケース２よりもケース３，あるいはケース４のゲームの値は大きくなり，さらに，それらよりもケース１のゲームの値が大きくなることは，有効資源の累積量の観点から容易に想像できる．

表 1 -a. Case 1: Optimal distribution of target

Cell\ $t=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.251	0.291	0.222	0.198	0.210	0.210	0.203	0.186	0.192
2	0	0.389	0.126	0.180	0.158	0.123	0.123	0.131	0.148	0.141
3	0	0.350	0.083	0.099	0.144	0	0	0	0	0
4	0	0.009	0.472	0.108	0.091	0.238	0.195	0.167	0.163	0.159
5	0	0	0.028	0.392	0.067	0.095	0.138	0.167	0.170	0.175
6	0	0	0	0	0.342	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0.333	0.134	0.097	0.081	0.061
8	0	0	0	0	0	0	0.199	0.237	0.252	0.272
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 1 -b. Case 1: Optimal distribution of searching resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0.002	0.002	0.003	0.005	0.022
2	0.5	0.5	0.5	0.321	0.093	0.417	0.403	0.146
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.091	0.086	0.042	0.019	0.135
5	0.5	0.5	0.5	0.232	0.010	0.378	0.389	0.033
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0.352	0.134	0.049	0.010	0.605
8	0	0	0	0.002	0.674	0.111	0.174	0.059
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0

表 1 -c. Case 1: Cumulative amount of effective resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	1	1.5	1.323	0.919	0.839	0.924	0.996
2	0.5	1	1.5	1.323	0.919	0.839	0.924	0.996
3	0.5	1	1.5	1.413	1.092	1.050	1.059	1.161
4	0.5	1	1.5	1.323	0.919	0.839	0.924	0.996
5	0.5	1	1.5	1.323	0.919	0.839	0.924	0.996
6	0.5	1	1.5	1.584	1.228	1.155	0.971	1.465
7	0	0	0	0.354	1.163	1.323	1.153	1.008
8	0	0	0	0.354	1.163	1.323	1.153	1.008
9	0	0	0	0.002	0.676	0.787	0.959	0.344
10	0	0	0	0	0	0	0	0

表 2-a. Case 2: Optimal distribution of target

Cell\ $t=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.255	0.2	0.183	0.167	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
2	0	0.398	0.2	0.183	0.167	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
3	0	0.347	0.2	0.183	0.167	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
4	0	0.001	0.2	0.183	0.167	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
5	0	0	0.2	0.183	0.167	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
6	0	0	0	0.085	0.167	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
7	0	0	0	0	0	0.143	0.133	0.125	0.118	0.112
8	0	0	0	0	0	0	0.068	0.125	0.118	0.112
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.057	0.074
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.032

表 2-b. Case 2: Optimal distribution of searching resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.572	1.572	1.310	1.053	0.968	0.849	0.970	0.983
2	1.572	1.572	1.310	1.053	0.968	0.849	0.970	0.983
3	1.572	1.572	1.310	1.053	0.968	0.849	0.970	0.983
4	1.572	1.572	1.310	1.053	0.968	0.849	0.970	0.983
5	1.572	1.572	1.310	1.053	0.968	0.849	0.970	0.983
6	0	0	1.310	1.740	1.853	0.849	0.970	0.983
7	0	0	0	0.855	1.166	0.849	0.970	0.983
8	0	0	0	0	0	1.917	1.068	0.983
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0

表 3-a. Case 3: Optimal distribution of target

Cell\ $t=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.258	0.210	0.179	0.168	0.140	0.118	0.136	0.110	0.110
2	0	0.433	0.210	0.179	0.168	0.140	0.118	0.136	0.110	0.110
3	0	0.308	0.210	0.179	0.168	0.140	0.118	0.136	0.110	0.110
4	0	0	0.210	0.238	0.108	0.140	0.177	0.077	0.110	0.110
5	0	0	0.159	0.179	0.219	0.088	0.118	0.137	0.109	0.110
6	0	0	0	0.046	0.168	0.211	0.046	0.136	0.110	0.110
7	0	0	0	0	0	0.140	0.241	0.012	0.110	0.110
8	0	0	0	0	0	0	0.064	0.229	0.064	0.064
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.165	0.055
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.110

表 3-b. Case 3: Optimal distribution of searching resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.682	0.381	0.415	0.477	0.299	0.276	0.477	0.203
2	0.682	0.381	0.415	0.477	0.299	0.276	0.477	0.203
3	0.682	0.381	0.415	0.477	0.299	0.276	0.477	0.203
4	0.682	0.724	0.072	0.477	0.642	0	0.410	0.546
5	0.272	1.134	0.139	0.000	1.052	0	0	0.956
6	0	0	1.545	0.330	0	0.722	0.330	0.025
7	0	0	0	0.761	0.411	0.000	0.520	0.556
8	0	0	0	0	0.000	1.451	0	0
9	0	0	0	0	0.000	0.000	0.308	0
10	0	0	0	0	0.000	0.000	0	0.308

表 3-c. Case 3: Cumulative amount of effective resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.682	1.063	1.478	1.273	1.191	1.052	1.052	0.956
2	0.682	1.063	1.478	1.273	1.191	1.052	1.052	0.956
3	0.682	1.063	1.478	1.273	1.191	1.052	1.052	0.956
4	0.682	1.406	1.478	1.273	1.191	1.119	1.052	0.956
5	0.272	1.406	1.545	1.273	1.191	1.052	1.052	0.956
6	0	0	1.545	1.875	1.875	1.052	1.052	1.076
7	0	0	0	0.761	1.172	1.172	0.931	1.076
8	0	0	0	0	0	1.451	1.451	1.451
9	0	0	0	0	0	0	0.308	0.308
10	0	0	0	0	0	0	0	0.308

表 4-a. Case 4: Optimal distribution of target

Cell\ $t=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.283	0.444	0.250	0.214	0.333	0.229	0.208	0.201	0.201
2	0	0.356	0.056	0.250	0.115	0.000	0.105	0.125	0.133	0.132
3	0	0.352	0	0	0.171	0	0	0	0	0
4	0	0.008	0.440	0.098	0.112	0.333	0.212	0.192	0.186	0.184
5	0	0	0.060	0.402	0.055	0	0.121	0.141	0.148	0.149
6	0	0	0	0	0.333	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0.333	0.163	0.119	0.088	0.052
8	0	0	0	0	0	0	0.170	0.214	0.245	0.281
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 4-b. Case 4: Optimal distribution of searching resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.013	0.045	0	0.019	0.020	0.019	0.015	0.023
2	1.503	1.069	1.315	0.883	0.995	0.718	0.879	0.813
3	0	0	0	0.524	0	0	0	0
4	1.101	1.304	0	0.022	0.438	0.559	0.445	0.351
5	0.013	0.212	1.315	0.356	0.576	0.178	0.449	0.485
6	0	0	0	0.801	0	0	0	0
7	0	0	0	0.019	0.583	1.135	0.703	0.916
8	0	0	0	0.006	0.019	0.021	0.139	0.042
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0

表 4-c. Case 4: Cumulative amount of effective resources

Cell\ $t=$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.516	1.114	1.315	0.902	1.014	0.737	0.894	0.836
2	1.516	1.114	1.315	1.426	1.014	0.737	0.894	0.836
3	2.604	2.373	1.315	1.429	1.433	1.277	1.324	1.164
4	1.114	1.516	1.315	0.902	1.014	0.737	0.894	0.836
5	1.114	1.516	1.315	1.179	1.014	0.737	0.894	0.836
6	0.013	0.212	1.315	1.176	1.159	1.314	1.152	1.401
7	0	0	0	0.826	0.601	1.156	0.842	0.958
8	0	0	0	0.025	0.601	1.156	0.842	0.958
9	0	0	0	0.006	0.019	0.021	0.139	0.042
10	0	0	0	0	0	0	0	0

表5．Increasing rate of the value of the game

$L\backslash t_c$	0	1	2
0	0.147	0.144	0.139
1	0.132	0.130	0.127
2	0.114	0.108	0.105

6 おわりに

本論文では，捜索理論における代表的な２人ゼロ和ゲームである捜索割当ゲームに関し，捜索者の使用する捜索資源に時間持続性と遠隔作用性がある場合の２つの解法を提案した．１つ目の解法では，線形計画問題を解くことにより，ゲームの均衡解は，捜索者の捜索資源の最適投入計画と目標のパスに関する最適選択確率で与えられる．また，２番目に解法により，目標戦略として存在確率及び遷移確率で表される最適マルコフ移動戦略を求めることができ，目標パスの総数が膨大になる場合に対処できる．移動エネルギー制約等，目標移動に関する現実的な実行可能性を考えた捜索割当ゲームには過去に研究成果があるが，時間持続性や遠隔作用性といった探知効果に関する捜索資源の特性を考慮した研究は過去にない．しかし，現実的な捜索資源，捜索センサーにはむしろこれらの特性を持つ例が多く，提案した解法の適用が待たれるところである．論文では，限定した捜索状況を設定し，プレイヤーの最適戦略に対するこれらの資源特性の効果について考察したが，複雑な現実的状況に対しては更なる緻密な分析が必要となるものの，提案した解法の利用価値は高いのではないかと考える．

参考文献

[1] J.M. Danskin, A Helicopter versus Submarine Search Game, *Operations Research*, **16**, pp.509–517, 1968.

[2] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative Search-Evasion Games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.

[3] R. Hohzaki, Search Allocation Game, *European Journal of Operational Research*, to appear in 2006.

[4] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete search allocation game with energy constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**, pp.93–108, 2002.

[5] R. Hohzaki, and A. Washburn, An Approximation for a Continuous Datum Search Game with Energy Constraint, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **46**, pp.306–318, 2003.

[6] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The Diesel Submarine Flaming Datum Problem, *MOR*, **4**, pp.19–30, 2001.