数理解析研究所講究録
1504 巻 2006 年 160-167

ガンマ事前分布に従う未知インテンシティをもつポアソン到着最良選択問題の拡張について

東京理科大学・工学部経営工学科　来島 愛子 (Aiko Kurushima)
Faculty of Engineering,
Tokyo University of Science

1 はじめに

古典的秘書問題の拡張であるポアソン到着選択問題においてポアソン過程のパラメータ λ の事前分布が non-informative 分布および指数分布に従うとき，Bruss(1987) によって最適停止規則が求められており，指数事前分布 $Ga(1,1/a)$ のとき最適停止規則は閾値規則となることが示されている．また，指数分布を含むガンマ分布 $Ga(r,1/a)$ に対して，$r=2$ の場合の最適停止規則は Ano(2000), r が自然数の場合の最適停止規則は Kurushima and Ano(2002) によって解かれている．

多数回停止可能問題では指数分布に対して穴太 (2000) によって最適停止規則が求められている．本稿では，指数分布を含むガンマ分布 $Ga(r,1/a)$ に対して，2 回停止可能な場合の OLA 停止規則を求めた．OLA 停止規則の最適性の証明についてはその途中経過を述べる．

また，所有期間最大化問題では採用決定から次の相対的ベストが現れるまでの所有期間を最大にすることが目的である．同様の設定で指数分布を事前分布とした問題は Ferguson, Hardwick, and Tamaki(1992) で解かれている．また，来島，穴太 (2003) において指数分布を含むガンマ分布 $Ga(r,1/a)$ に対して $r=2$ の場合の最適停止規則が求められている．今回は $r=3$ に対し最適停止規則を求め，さらに $r=4$ の場合の OLA 停止規則の最適性の証明の途中経過について述べる．

2 準備

ガンマ分布 $Ga(r,1/a)$, r は自然数，を事前分布としてもつときのポアソン到着問題の最適停止問題について述べる．ある所与の時刻 T までにアパートを見つけたい．アパートを調べる機会は intensity λ のポアソン過程に従って到着する．調べるごとにすぐに，このアパートに決めるか否かを決めなければならない．時間間隔 $(0,T]$ の間に到着するアパートはランク付け可能であり，最も良いランクのアパートをベストと呼ぶ．現在までに到着しているアパートの中での最も良いランクのアパートを相対的ベストと呼ぶ．言うまでもないが，時刻 T に到着した相対的ベストはベストとなる．時間間隔 $(0,T]$ の間に調べることができるアパートの中からベストのアパートを選ぶ確率を最大にする最適停止時刻を求めたい．

ポアソン過程の intensity λ が未知で，その事前分布がガンマ分布 $Ga(r,1/a)$, r は自然数，$a>0$ をもつという問題を考える．ポアソン過程 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ の到着時刻を $\tau_1,\tau_2,\cdots$ とする．また，λ の密度関数は

$$g(\lambda)=\frac{a^r}{\Gamma(r)}e^{-a\lambda}\lambda^{r-1}I(\lambda\geq 0). \tag{1}$$

このとき，次の補題により，$\tau_1 = s_1, \cdots, \tau_i = s$ が与えられたときの $N(T)$ の事後分布が与えられる．

補題 1 $\tau_1 = s_1, \cdots, \tau_i = s$ が与えられたときの $N(T)$ の事後分布は τ_i と i の値のみに依存し，パラメータ $r+i$，$(s+a)/(T+a)$ の負の二項分布，

$$P(N(T) = n|\tau_1 = s_1, \ldots, \tau_i = s) = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r+i)(n-i)!}\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r+i}\left(\frac{T-s}{T+a}\right)^{n-i} \tag{2}$$

になる．

$U_i^{(r)}(s)$ を時刻 $\tau_i = s$ で到着したアパートが相対的ベストアパートであるとき，このアパートを選択したときの真のベストを得る最大確率とする．公式

$$\frac{(n+r-1)!}{n} = (r-1)!\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n+j-1)!}{j!}, r = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

を用いると，ガンマ事前分布 $Ga(r, 1/a)$ に対する $U_i^{(r)}(s)$ は

$$\begin{aligned} U_i^{(r)}(s) &= E\left(\frac{i}{N(T)}\middle|\tau_i = s\right) \\ &= \sum_{n\geq i}\left(\frac{i}{n}\right)P(N(T) = n|\tau_i = s) \\ &= \frac{i(r-1)!}{(i+r-1)!}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(i+j-1)!}{j!}\theta^{r-j}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\theta = (s+a)/(T+a)$．

時刻 $\tau_i = s$ で相対的ベストアパートが到着し，それ以降のはじめての相対的ベストアパートが $i+k$ 番目であり，その到着時刻が $\tau_{i+k} = s+u, (u > 0)$ である推移確率を $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ とする．このとき，時刻 $\tau_i = s$ に到着した相対的ベストアパートを選択せず，次に到着する相対的ベストアパートを選択したときに，この選択したアパートが真のベストである確率は

$$\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}U_{i+k}^{(r)}(s+u)du \tag{5}$$

となる．

ガンマ事前分布 $Ga(r, 1/a)$ に対する推移確率 $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ はポアソン過程の到着時間間隔分布がガンマ分布であり，$\tau_i = s$ が与えられたときの λ の事後分布 $g(\lambda|\tau_i = s)$ は

$$g(\lambda|\tau_i = s) = \frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}}{\int_0^\infty u^{i+r-1}e^{-u(s+a)}du} = \frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}}{\Gamma(i+r)/(s+a)^{i+r}} \tag{6}$$

で与えられる．i 番目に相対的ベストが出たときそのあとはじめての相対的ベストが $i+k$ 番目である条件付確率が $i/((i+k-1)(i+k))$ であるから，

$$\begin{aligned} p_{(i,s)}^{(k,u)} &= \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{k-1}}{\Gamma(k)}\frac{i}{(i+k-1)(i+k)}\frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}(s+a)^{i+r}}{\Gamma(i+r)}d\lambda \\ &= \frac{i(s+a)^{i+r}u^{k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)(i+k)(i+k-1)}\int_0^\infty \lambda^{i+r+k-1}e^{-\lambda(s+a+u)}d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)}\frac{i}{(i+k)(i+k-1)}\frac{s+a}{(s+a+u)^2}\left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1}\left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

したがって，$G_i^{(r)}(s)$ を

$$G_i^{(r)}(s) \equiv U_i^{(r)}(s) - \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} U_{i+k}^{(r)}(s+u)du \tag{8}$$

としたとき，OLA 停止領域 B_r は $B_r = \{(i,s) : G_i^{(r)}(s) \geq 0\}$ で与えられる．ここで (i,s) は時刻 $s \in (0,T]$ で i 番目のアパートが到着していて，そのアパートが相対的ベストである状態を表す．$G_i^{(r)}(s) \geq 0$ ならば，$G_{i+k}^{(r)}(s+u) \geq 0,\ k = 0,1,2,\ldots,\ u \in (0, T-s]$ が成り立つならば，すなわち，$P((i+k, s+u) \in B_r | (i,s) \in B_r) = 1$ ならば，B_r は "closed" であると呼ばれ，B_r が最適停止領域となり，OLA 停止規則 $\tau = \min\{0 < s \leq T : (i,s) \in B_r\}$ が最適停止時刻となることが知られている（Ross(1970) または穴太 (2000) 3 章参照）．

$$H_i^{(r)}(s) \equiv \frac{(i+r-1)\,!}{i\,!\,(r-1)\,!}\frac{T+a}{s+a}G_i^{(r)}(s)$$

とすると，B_r は

$$B_r = \{(i,s) : H_i^{(r)}(s) \geq 0\}$$

と書くことができる．$H_i^{(r)}(s)$ は $\theta = (s+a)/(T+a)$ とすると，

$$\begin{aligned} H_i^{(r)}(s) \quad &= \quad \sum_{j=0}^{r-1} \binom{i+j-1}{j} \theta^{r-j-1}(1+\ln\theta) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1} \binom{i+l-1}{l} \frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1} - \theta^{r-j-1}) \end{aligned} \tag{9}$$

となる．

OLA 停止領域 $B_r = \{(i,s) : H_i^{(r)}(s) \geq 0\}$ を特徴付ける関数 $H_i^{(r)}(s)$ に対して次の 2 つの補題が成立する．

補題 2

$$H_{i+1}^{(r)}(s) - H_i^{(r)}(s) = H_{i+1}^{(r-1)}(s) \tag{10}$$

補題 3 次の 3 つのことが成り立つ．

(i) $H_i^{(r)}(s)$ は s についての増加関数．
(ii) $H_i^{(r)}(s) \geq 0$ ならば，$H_{i+1}^{(r)}(s) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots$.
(iii) $s_i^{(r)*}$ は i について非増加．

上の補題より次の定理が成り立つ．

定理 1 ポアソン過程のパラメータ λ の事前分布がガンマ分布 $Ga(r, 1/a), r$ は自然数, $a > 0$ に従うとき，最適停止規則は $s_i^{(r)*}$ 以降に到着する最初の相対的ベストを選択する，である．すなわち，最適停止時刻 τ_r^* は

$$\tau_r^* = \min\{s_i \in [s_i^{(r)*}, T] : X_i = 1\}.$$

$s_i^{(r)*}$ は $H_i^{(r)}(s) = 0$，すなわち，

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{i+j-1}{j} \theta^{r-j-1}(1+\ln\theta) + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1} \binom{i+l-1}{l} \frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1} - \theta^{r-j-1}) = 0,$$

ただし，$\theta = (s+a)/(T+a)$，の唯一解として定まり，i についての非増加列である．

また，閾値の漸近的なふるまいに対して次の定理が成り立つ．

定理 2

$$\lim_{i\to\infty} s_i^{(r)*} = \left[\frac{T+a}{e} - a\right]^+$$

3　2回停止可能問題

自然数パラメーターガンマ分布を未知インテンシティの事前分布としてもつポアソン到着問題において 2 回停止可能問題を考える．

多数回停止可能問題では m 回停止可能とすると，m 回の停止でベストを得る確率を最大にするという基準で最適停止規則を考える．

$W_i^{(r,m)}(s)$ を残り m 回停止可能であり，時刻 $s, 0 < s \leq T$ に到着した i 番目の応募者が相対的ベストであるとき，それ以降最適に振舞ったときにベストを得る最大確率とする．$U_i^{(r,m)}(s)(V_i^{(r,m)}(s))$ を，その相対的ベストを採用 (不採用) としたときのベストを得る最大確率とする．

このとき，

$$U_i^{(r,m)}(s) = \sum_{n\geq i}\left(\frac{i}{n}\right)P(N(T)=n|\tau_i = s) + V_i^{(r,m-1)}(s)$$

$$V_i^{(r,m)}(s) = \int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} W_{i+k}^{(r,m)}(s+u)du$$

$G_i^{(r,m)}(s)$ を OLA 関数とすると，

$$\begin{aligned} G_i^{(r,m)}(s) &= U_i^{(r,m)}(s) - \int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} U_{i+k}^{(r,m)}(s+u)du \\ &= G_i^{(r,1)}(s) + \int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)}(W_{i+k}^{(r,m-1)}(s+u) - V_{i+k}^{(r,m-1)}(s+u))du \qquad (11) \end{aligned}$$

前節と同様に

$$H_i^{(r,1)}(s) \equiv \frac{(i+r-1)\,!}{i\,!\,(r-1)\,!}\frac{T+a}{s+a}G_i^{(r,1)}(s)$$

として，$m=2$ の場合を考える．最適停止規則 $N_{s_i^{(r,1)*}}^{(r,1)}$ のもとで，$s+u \geq s_{i+k}^{(r,1)*}$ のとき，

$$W_{i+k}^{(r,1)}(s+u) = U_{i+k}^{(r,1)}(s+u),$$

$$V_{i+k}^{(r,1)}(s+u) = \int_0^{T-s}\sum_{l\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} U_{i+k+l}^{(r,1)}(s+u)du$$

であるから，

$$\begin{aligned} W_{i+k}^{(r,1)}(s+u) - V_{i+k}^{(r,1)}(s+u) &= G_{i+k}^{(r,1)}(s+u)I(s+u \geq s_{i+k}^{(r,1)*}) \\ &= \frac{(i+k)!(r-1)!}{(i+k+r-1)!}\frac{s+u+a}{T+a}H_{i+k}^{(r,1)}(s+u)I(s+u \geq s_{i+k}^{(r,1)*}). \end{aligned}$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
H_i^{(r,2)}(s) &= H_i^{(r,1)}(s)+\frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!}\frac{T+a}{s+a}\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}\frac{(i+k)!(r-1)!}{(i+k+r-1)!}\frac{s+u+a}{T+a} \\
&\quad \times H_{i+k}^{(r,1)}(s+u)I(s+u\geq s_{i+k}^{(r,1)*})du \\
&= \sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1}(1-\ln\theta)+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1}-\theta^{r-j-1}) \\
&\quad +\frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!}\frac{T+a}{s+a}\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}(W_{i+k}^{(r,1)}(s+u)-V_{i+k}^{(r,1)}(s+u))du \\
&= \sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1}(1-\ln\theta)+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1}-\theta^{r-j-1}) \\
&\quad +\frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!}\frac{T+a}{s+a}\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}\frac{s+u+a}{s+a}H_{i+k}^{(r,1)}(s+u)I(s+u\geq s_{i+k}^{(r,1)*})du \quad (12)
\end{aligned}
$$

定理 1, 2 より $[\frac{T+a}{e}-a]^+\leq\cdots\leq s_{i+k}^{(r,1)*}\leq\cdots\leq s_{i+2}^{(r,1)*}\leq s_{i+1}^{(r,1)*}$ であり, $s\geq s_{i+1}^{(r,1)*}$ のとき, すべての $k\geq 1$ に対して, 積分範囲は 0 から $T-s$ であるので, $H_i^{(r,2)}(s)$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
H_i^{(r,2)} &= \sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1}(1-\frac{1}{2}\ln^2\theta)+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}(-\ln\theta)(\theta^{r-l-1}-\theta^{r-j-1}) \\
&\quad +\sum_{j=2}^{r-1}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{n=1}^{l-1}\binom{i+m-1}{m}\frac{1}{j-l}\theta^{r-m-1}\left\{\frac{1}{m-l}(1-\theta^{m-l})-\frac{1}{m-j}(1-\theta^{m-j})\right\} \quad (13)
\end{aligned}
$$

OLA 停止領域の最適性の十分条件を満たすために以下の単調性を示さなければならない.
$H_i^{(r,2)}(s)\geq 0\Longrightarrow H_{i+k}^{(r,2)}(s+u)\geq 0,\ u\in(0,T-s],k=1,2,\cdots$

- $H_i^{(r,2)}(s)\geq H_i^{(r,1)}(s)$
- $H_i^{(r,2)}(s)\geq 0\Longrightarrow H_{i+1}^{(r,2)}(s)\geq 0$
- $H_i^{(r,2)}(s)\geq 0\Longrightarrow H_i^{(r,2)}(s+u)\geq 0$

u の積分範囲で $H_{i+k}^{(r,1)}(s+u)\geq 0$ であるから, 右辺第 2 項は非負となる. したがって,

$$H_i^{(r,2)}(s)\geq H_i^{(r,1)}(s).$$

(13) は s についての増加関数であることを示すことができたが, 2 番目と 3 番目の命題がまだ示すことができていない. なぜなら, 事前分布が指数分布の場合, OLA 関数は i について独立であるが, ガンマ分布に拡張したとき, i によるので, 証明が非常に困難になるためである.

4 所有期間最大化問題

所有期間最大化問題において, これまでと同様に未知の intensity λ がガンマ分布 $Ga(r,1/a)$, r は自然数の場合について考える.

時刻 s に相対的ベストが到着したとき，このアパートを採用したときの期待所有期間を $y_i^{(r)}(s)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
y_i^{(r)}(s) &= \int_0^{T-s} u \sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} du + (T-s)U_i(s) \\
&= \int_0^{T-s} u \sum_{k\geq 1} \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)} \frac{i}{(i+k)(i+k-1)} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \\
&\quad \times \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1} du \\
&\quad +(T-s)\frac{i(r-1)\,!}{(i+r-1)\,!}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(i+j-1)\,!}{j\,!}\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j}.
\end{aligned}
$$

OLA 関数は

$$
G_i^{(r)}(s) = y_i^{(r)}(s) - \int_0^{T-s} p_{(i,s)}^{(k,u)} y_{i+k}^{(r)}(s+u) du
$$

となり，OLA 停止領域 B_r は

$$
B_r = \{(i,s) : G_i^{(r)}(s) \geq 0\}
$$

で与えられる．さらに，

$$
H_i^{(r)}(s) = \frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!}\frac{1}{s+a}G_i^{(r)}(s)
$$

とおくと，計算の結果，

$$
\begin{aligned}
H_i^{(r)}(s) &= \binom{i+r-2}{r-1} \ln\frac{T+a}{s+a}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{T+a}{s+a}\right) \\
&\quad +\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1}{r-j-1}\left\{1-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}\left(1-\ln\frac{T+a}{s+a}\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{(r-j-1)(r-l-1)}\left\{1-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}\right\} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{(r-j-1)(j-l)}\left\{\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで，$(s+a)/(T+a)=\theta$ とおき，$H_i^{(r)}(s) \equiv h_i^{(r)}(\theta)$ とすると，

$$
B_r = \{(i,s) : H_i^{(r)}(s) \equiv h_i^{(r)}(\theta) \geq 0\}
$$

と書き直せる．

OLA 停止領域の $r=3,4$ の場合における最適性の十分条件のうち $s(\theta)$ について単調性が満たされることを示した．ここでは，簡単に証明の手順を記す．

1. $\theta < 1/e^2$ のとき，$h_i^{(r)}(\theta) < 0$ を示す．
2. $\theta > 1/e$ のとき，$h_i^{(r)}(\theta) \geq 0$ を示す
3. $\theta < 1/e$ のとき，$h_i^{(r)}(\theta)$ は θ について増加であることを示す．

上の 3 つの命題が満たされるとき $h_i^{(r)}(\theta) \equiv H_i^{(r)}(s) \geq 0 \Longrightarrow h_i^{(r)}(\theta+\phi) \equiv H_i^{(r)}(s+u) \geq 0$，$0 < u \equiv (T+a)\phi \leq T-s$ が成り立つ．

発表はできなかったが，$r=3$ のとき i についての単調性も満たされることが示された．まず，次の漸化式が成り立つ．

$$h_{i+1}^{(3)}(\theta) = h_i^{(3)}(\theta) + h_{i+1}^{(2)}(\theta)$$

この漸化式を用いて，簡単な証明の手順を述べる．

1. $h_{i+1}^{(2)}(\theta) = 0$ のとき，$h_i^{(3)}(\theta) < 0$ を示す．
2. 1. と $r=2$ の結果および $h_i^{(3)}(\theta)$ の θ に関する単調性が成り立つことから $h_i^{(3)}(\theta) > 0$ のとき，$h_{i+1}^{(2)}(\theta) > 0$ を示す．

上の 2 つの命題が満たされるとき，$h_i^{(3)}(\theta) > 0$ のとき，$h_{i+1}^{(3)}(\theta) > 0$ が導かれる．よって，OLA 関数は i について単調性を満たし，$h_i^{(3)}(\theta) \equiv H_i^{(3)}(s) \geq 0 \Longrightarrow h_{i+1}^{(3)}(\theta) \equiv H_{i+1}^{(3)}(s) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots$ が成り立つ．

以上の結果をまとめて，$r=3$ に対して最適停止規則を求める．まず，OLA 関数は

$$\begin{aligned} h_i^{(3)}(\theta) \quad &= \quad -\frac{(i+1)i}{2}\ln\theta(1+\frac{1}{2}\ln\theta) + \frac{1}{2}\ln\theta(1-\theta^2) \\ &\qquad +i(1-\theta)(1+\ln\theta) + \theta - \theta^2 \end{aligned} \tag{14}$$

であり，次の OLA 関数の単調性に関する補題が成り立つ．ただし，補題の証明は上記の手順によって示され，詳細については省略する．

補題 4

(i) $H_i^{(3)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+1}^{(3)}(s) \geq 0\ 0 < u \leq T - s.$
(ii) $H_i^{(3)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_i^{(3)}(s+u) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots.$

補題 4 より，次の定理が成り立つ．

定理 3 ポアソン過程のパラメータ λ の事前分布がガンマ分布 $Ga(3, 1/a), a > 0$ に従うとき，所有期間を最大化する最適停止規則は $s_i^{(3)*}$ 以降に到着する最初の相対的ベストを選択する，である．すなわち，最適停止時刻 τ_3^* は

$$\tau_3^* = \min\{s_i \in [\, s_i^{(3)*}, T\,] : X_i = 1\}.$$

$s_i^{(3)*}$ は $H_i^{(3)}(s) = 0$，すなわち，

$$-\frac{(i+1)i}{2}\ln\theta(1+\frac{1}{2}\ln\theta) + \frac{1}{2}\ln\theta(1-\theta^2) + i(1-\theta)(1+\ln\theta) + \theta - \theta^2 = 0$$

の唯一解として定まる．ここで，X_i は i 番目に到着したアパートの相対ランクとする．

証明　上の補題の (i) より

$$H_i^{(3)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+1}^{(3)}(s) \geq 0.$$

また，(ii) より

$$H_i^{(3)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_i^{(3)}(s+u) \geq 0.$$

よって，

$$H_i^{(3)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+k}^{(3)}(s+u) \geq 0$$

が成り立つ．したがって，OLA 停止領域 B_3 は closed となり，最適停止領域であることが示された．すなわち，B_3 への first hitting time である τ_3^* が最適停止時刻となり，

$$\tau_3^* = \min\{s \geq s_i^{(3)*} : (i, s) \in B_3\} = \min\{s \in [\, s_i^{(3)*}, T\,] : X_i = 1\}.$$

■

参考文献

[1] 穴太 克則 (2000), “タイミングの数理—最適停止問題,” 朝倉書店, 東京.

[2] Bruss, F. T. (1987), “On an optimal selection problem by Cowan and Zabczyk,” J. Appl. Prob., **24**, 918-928.

[3] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmond, D. (1971), *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Mifflin Co., Boston.

[4] Cowan, R. and Zabczyk, J. (1978), “An optimal selection problem associated with the Poisson process,” Theory Prob. Appl., **23**, 584-592.

[5] Kurushima, A. and Ano, K. (2002), “A Poisson arrival selection problem for Gamma prior intensity with natural number parameter,” *Scienticae Mathematicae Japonicae Online*, **57**, 209-223. (Also published in (2003), *Scienticae Mathematicae Japonicae*, **57**, 217-231.)

[6] 来島 愛子, 穴太 克則 (2003), “ポアソン到着を伴う所有期間最大化最適停止問題について,” 京都大学数理解析研究所講究録 1306『不確実性の下での意思決定の数理』, 11 − 17.

[7] Kurushima, A. and Ano, K. (2003), “A note on the full-information Poisson arrival selection problem,” *J. Appl. Prob.*, **40**, 1147-1154.

[8] Ross, S. M. (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.

[9] Stewart, T. J. (1981), “The secretary problem with an unknown number of option,” Oper. Res., **25**, 130-145.