数理解析研究所講究録
1504 巻 2006 年 15-27

消費者行動に基づく並列冗長システムの価格決定問題

流通科学大学 情報学部　小出　武 (Takeshi KOIDE)
Faculty of Information Sciences, University of Marketing and Distribution Sciences
神戸学院大学 経営学部　三道 弘明 (Hiroaki SANDOH)
Faculty of Business Administration, Kobe Gakuin University

1　はじめに

システムユニットの並列化は，システムの信頼性を向上させる効果的な方法の一つとして，信頼性理論の分野における非常に多くの文献で取り扱われている [1, 2]．しかし多くの文献では，システムを購入する消費者の視点を考慮していない．並列化を行えば確かに信頼性は向上するものの，システムの価格も高くなる．信頼性の増加によるメリットが価格の増加分に見合わなければ，消費者は対象のシステムを購入しない．消費者が購入しなければ，生産者も生産・販売しなくなる．会社の目的が利益を上げることであるならば，並列化によって利益が向上して，初めてその意義があると言えるであろう．

そこで本研究では，並列化が生産者にとって有益なのか否かを理論的に確認するために，生産者の視点だけではなく消費者の視点も考慮したモデルにおいて，並列冗長システムの価格を決定する問題を考える．この問題を通して，並列冗長システムが生産者の利益の増加に貢献するか否かについて議論する．

2　問題設定

1. 生産者はシステムユニットを用いてシステムを生産する．システムには単一ユニットからなる単一ユニットシステムと，複数のユニットが並列に並べられた並列冗長システムがある．以後，i 個のユニットによる並列冗長システムを S_i と記す．S_1 は単一ユニットシステムを表す．
2. ユニットは，その信頼性に関する尺度 τ を持つ．1 ユニットの製造原価を $a(\tau)$ とし，τ について非減少関数とする．
3. システムの製造原価は，利用するユニットの製造原価とシステムインターフェースなどの固定費からなる．システム S_i の固定費を b_i とする．
4. システム S_i の販売価格を P_i とする．$i<j$ ならば $P_i<P_j$ とする．
5. 対象のシステムに関して独占市場を仮定する．
6. 消費者はシステム S_i を利用することにより $\pi(i,\tau)$ の収益を得る．$\pi(i,\tau)$ は i,τ について増加関数とする．
7. 消費者は，自らの利益を最大にするシステムを購入する．ただし，どのシステムを購入しても利益が正にならないときは，どのシステムも購入しない．

8. 生産者は自らの利益が最大になるように，N 個の並列システム $S_1, S_2, \ldots, S_N$ の価格 $P_1, P_2, \ldots, P_N$，およびユニットの信頼性尺度 τ を決定する．

3 解析

まず，m ユニット並列冗長システム (S_m) と n ユニット並列冗長システム (S_n) の 2 種類のみを販売する場合を考える $(1 \leq m < n \leq N)$．その後，N 個の並列システムを販売する場合に拡張する．

3.1 消費者の最適反応

消費者がシステム S_m を購入した場合，システム S_n を購入した場合，どちらも購入しない場合，それぞれにおける消費者の期待利益 Π_m，Π_n，Π_0 は以下のようになる．

$$\Pi_m = \pi(m, \tau) - P_m, \tag{1}$$

$$\Pi_n = \pi(n, \tau) - P_n, \tag{2}$$

$$\Pi_0 = 0. \tag{3}$$

次に，Π_m, Π_n, Π_0 の大小を比較する．

$$\Pi_m > \Pi_0 \Longleftrightarrow \pi(m, \tau) - P_m > 0 \Longleftrightarrow P_m < \pi(m, \tau), \tag{4}$$

$$\Pi_n > \Pi_0 \Longleftrightarrow P_n < \pi(m, \tau), \tag{5}$$

$$\Pi_n > \Pi_m \Longleftrightarrow \pi(n, \tau) - P_n > \pi(m, \tau) - P_m \Longleftrightarrow P_n < P_m + \{\pi(n, \tau) - \pi(m, \tau)\}. \tag{6}$$

ここで，消費者のオプションを次のように定義する．

A_m : システム S_m を購入する．
A_n : システム S_n を購入する．
A_0 : いずれのシステムも購入しない．

このとき，$\Pi_i > \Pi_j$ $(i \neq j)$ ならば，消費者はオプション A_j よりオプション A_i を選好することになる．τ 一定の条件下において，消費者の最適反応は以下のようになる．

(1) $(P_m, P_n) \in \Omega_m$ ならば，オプション A_1 を選択することが消費者にとって最適である．
(2) $(P_m, P_n) \in \Omega_n$ ならば，オプション A_2 を選択することが消費者にとって最適である．
(3) $(P_m, P_n) \in \Omega_0$ ならば，オプション A_0 を選択することが消費者にとって最適である．
(4) (P_m, P_n) が Ω_x と Ω_y との境界線上 $(x, y = 0, m, n,\ x \neq y)$ ならば，オプション A_x とオプション A_y とは無差別である．

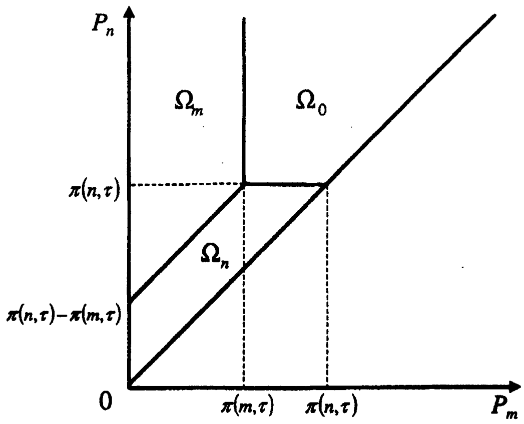

図 1: τ 一定下での消費者の最適反応

ここで領域 $\Omega_0, \Omega_m, \Omega_n$ は以下のように定義される．図 1 に領域を示す．

$$\Omega_m = \left\{ (P_m, P_n) \middle| \; 0 \leq P_m < \pi(m,\tau),\; P_n > P_m + \{\pi(n,\tau) - \pi(m,\tau)\} \right\}, \tag{7}$$

$$\Omega_n = \left\{ (P_m, P_n) \middle| \; 0 \leq P_n < \pi(n,\tau),\; P_m < P_n < P_m + \{\pi(n,\tau) - \pi(m,\tau)\} \right\}, \tag{8}$$

$$\Omega_0 = \left\{ (P_m, P_n) \middle| \; P_m > \pi(n,\tau),\; P_n > \pi(n,\tau),\; P_n > P_m \right\}. \tag{9}$$

3.2 生産者の利益

システム S_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の製造原価は，$ia(\tau) + b_i$ と表されるので，消費者がシステム S_i を購入した場合の生産者の期待利益は

$$P_i - \{ia(\tau) + b_i\} \tag{10}$$

で与えられる．τ 一定下において生産者がシステム S_i によって得られる利益を大きくするには，P_i を大きくすればよいことがわかる．以下，消費者の最適反応を考慮した上での生産者の最適方策を示す．

3.2.1 $(P_m, P_n) \in \Omega_m$ のとき

この場合，消費者はシステム S_m を購入する．この場合，生産者の利益を最大にするには，

$$P_m = \pi(m,\tau) - 0, \quad P_n \geq \pi(n,\tau) \tag{11}$$

とすればよい．生産者の利益の最大値は

$$\pi(m,\tau) - \{ma(\tau) + b_m\} - 0 \tag{12}$$

となり，τ の関数として表現できる．

3.2.2 $(P_m, P_n) \in \Omega_n$ のとき

この場合，消費者はシステム S_n を購入する．この場合，生産者の利益を最大にするには，

$$P_n = \pi(n,\tau) - 0, \quad \pi(m,\tau) \le P_m < \pi(n,\tau) - 0 \tag{13}$$

とすればよい．生産者の利益の最大値は

$$\pi(n,\tau) - \{na(\tau) + b_n\} - 0 \tag{14}$$

となり，τ の関数として表現できる．

3.2.3 $(P_m, P_n) \in \Omega_0$ のとき

この場合，消費者はどちらのシステムも購入しない．よって，生産者の利益は 0 である．

3.2.4 まとめ

$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $Q(i,\tau) \equiv \pi(i,\tau) - \{ia(\tau) + b_i\}$ を定義すると，決定変数が (P_m, P_n, τ) の場合での生産者の最大利益は次のように書ける．

$$\begin{aligned}&\max_{\tau}\left[\max\{\pi(m,\tau) - \{ma(\tau) + b_m\} - 0,\ \pi(n,\tau) - \{na(\tau) + b_n\} - 0,\ 0\}\right] \\ &= \max\left[\max_{\tau}\{Q(m,\tau) - 0\},\ \max_{\tau}\{Q(n,\tau) - 0\},\ 0\right].\end{aligned} \tag{15}$$

3.3 生産者の最適戦略

販売するシステムを $S_1, S_2, \ldots, S_N$ の N 個に拡張し，決定変数を $(P_1, P_2, \ldots, P_N, \tau)$ とすると，生産者の最大利益は，式 (15) より，

$$\max\left\{\max_{i=1,2,\ldots,N}\left[\max_{\tau}\{Q(i,\tau) - 0\}\right],\ 0\right\} \tag{16}$$

と書ける．

$$Q(i^*,\tau^*) - 0 = \max_{\tau}\{Q(i^*,\tau) - 0\} = \max_{i=1,2,\ldots,N}\left[\max_{\tau}\{Q(i,\tau) - 0\}\right] \tag{17}$$

を満たすように i^*, τ^* を定義すると，N 個のシステムを販売したときに得られる生産者の最大利益 Q^* は，

1. $Q(i^*, \tau^*) > 0$ のとき

$$Q^* = Q(i^*, \tau^*) - 0, \tag{18}$$

$$P_{i^*} = \pi(i^*, \tau^*) - 0, \tag{19}$$

$$\pi(j, \tau^*) \leq P_j \leq \pi(i^*, \tau^*) - 0, \quad j = 1, 2, \ldots, i^* - 1, \tag{20}$$

$$P_j \geq \pi(j, \tau^*), \quad j = i^* + 1, i^* + 2, \ldots, N, \tag{21}$$

$$\tau = \tau^*. \tag{22}$$

2. $Q(i^*, \tau^*) \leq 0$ のとき

$$Q^* = 0, \tag{23}$$

$$P_j \geq \pi(j, \bar{\tau}), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{24}$$

$$\tau = \bar{\tau},\ \bar{\tau} : \text{任意}. \tag{25}$$

となる．

4　モデル 1 ：消費者の収益がシステム平均寿命に比例するモデル

購入するシステムが長持ちすればするほど，消費者の収益が大きくなるモデルについて分析を行う．

4.1　仮定

- $\tau = \mu$: ユニットの平均寿命
- $a(\mu)$: 2 回微分可能で，下に凸の単調増加関数．$a'(\mu) > 0,\ a''(\mu) > 0.$
- 消費者は購入したシステム稼動単位時間当たり r の収益を得る．

4.2　解析

$\theta_i \equiv \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}$ とすると，システム S_i の平均寿命は $\theta_i \mu$ となる [10, 11]．したがって，消費者がシステム S_i を購入したときの収益 $\pi(i, \mu)$ は，

$$\pi(i, \mu) = r\mu\theta_i \tag{26}$$

となる．

表 1: モデル 1 の数値例におけるパラメータ

	b_i	r	a_0	β	$\tilde{\mu}$
Case 1	$10 \times (1.5)^i$	1	50	0.1	100
Case 2	$10 \times (1.5)^i$	1	30	0.1	100

よって，

$$Q(i,\mu) = r\mu\theta_i - \{ia(\mu) + b_i\} \tag{27}$$

となる．

ここで，$\dfrac{\partial^2}{\partial\mu^2}Q(i,\mu) = -ia''(\mu) < 0$ であるので，$Q(i,\mu)$ は μ に関して上に凸の関数である．i 一定の下で $Q(i,\mu)$ を最大にする μ を μ_i^* とすると，$\dfrac{\partial}{\partial\mu}Q(i,\mu) = 0$ が成立するので，

$$a'(\mu_i^*) = \frac{r\theta_i}{i} \tag{28}$$

を満たす．θ_i/i は i に関して単調減少，かつ $a(\mu)$, $a'(\mu)$ は増加関数なので，

$$i < j \Longleftrightarrow \mu_i^* > \mu_j^* \Longleftrightarrow a(\mu_i^*) > a(\mu_j^*) \tag{29}$$

となる．

4.3 数値例

ここでは，製造原価を表す関数 $a(\mu)$ が次式で与えられる場合の数値例を示す．

$$a(\mu) = a_0 + \exp(\beta(\mu - \tilde{\mu})) - 1. \tag{30}$$

ここに，$\tilde{\mu}$ は，現状の技術で容易に達成可能な平均寿命であり，ユニットの平均寿命をこれより長くしようとするとその製造費が急激に大きくなるが，$\tilde{\mu}$ より小さくしてもその製造費はほとんど安くならないことを意味している．また a_0 は $\mu = \tilde{\mu}$ としたときの製造原価である．また，モデルに含まれる各種パラメータの値を表 1 のように設定する．このときの関数 $a(\mu)$ を図 2 に示す．

2 種類のシステム S_1, S_2 が販売される場合における消費者の利益構造を図 3 に示す．左図は $\mu = 80$ の場合，右図は $\mu = 100$ の場合である．図 1 で示したように 3 つの領域の存在が確認できる．これらの図から，システムの価格が大きくなると，消費者がシステムを購入しないことがわかる．左右の図を比較すると，μ の値が大きくなると，どちらのシステムも購入しない領域 Ω_0 が小さくなることが確認できる．

2 種類のシステム S_1, S_2 が販売される場合における生産者の利益構造を図 4 に示す．左図は $\mu = 80$ の場合，右図は $\mu = 100$ の場合である．領域 Ω_m，領域 Ω_n のどちらにおいても，領域 Ω_0 との境界に近づくほど，生産者の利益が向上することが確認できる．

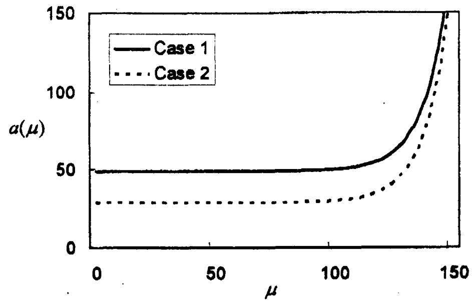

図 2: モデル 1 に対するユニット製造原価 $a(\mu)$

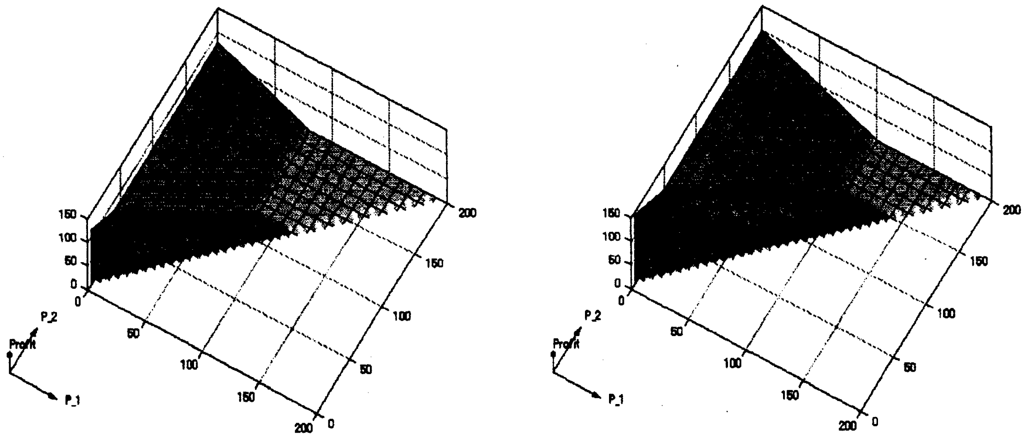

図 3: μ 一定下での消費者の期待利益（左：$\mu = 80$，右：$\mu = 100$）

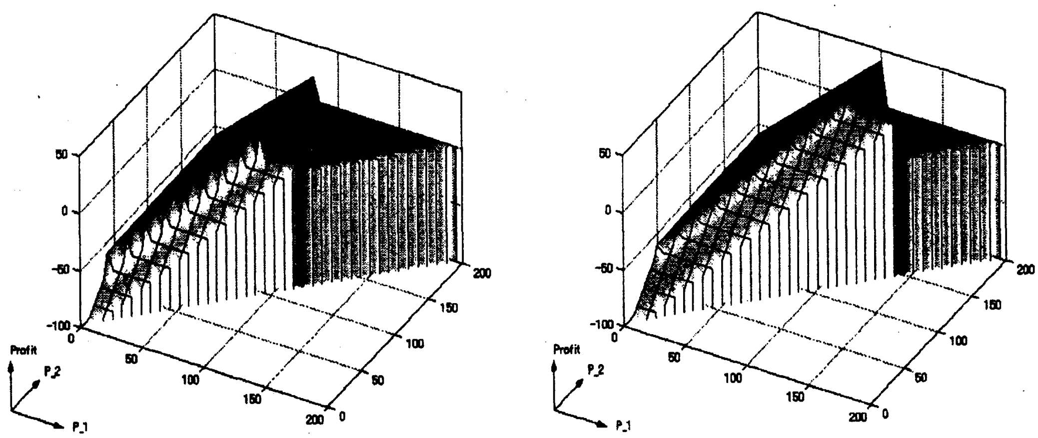

図 4: μ 一定下での生産者の利益（左：$\mu = 80$，右：$\mu = 100$）

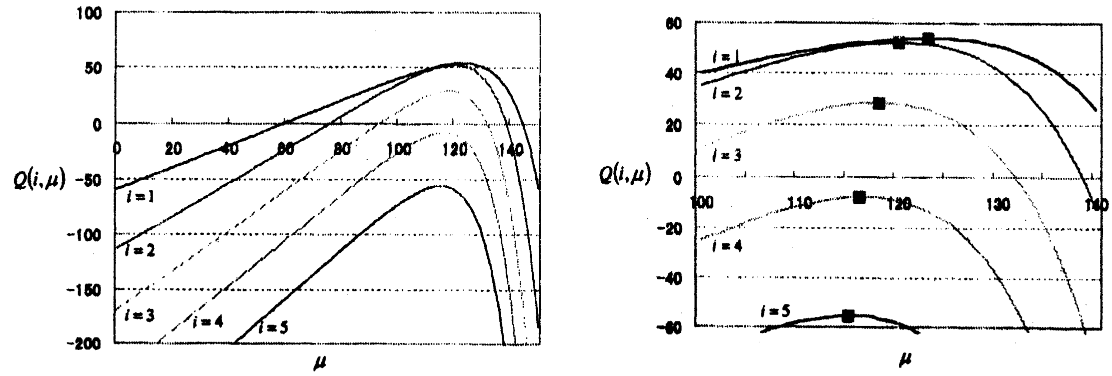

図 5: Case 1 における生産者の利益（右：左の拡大図）

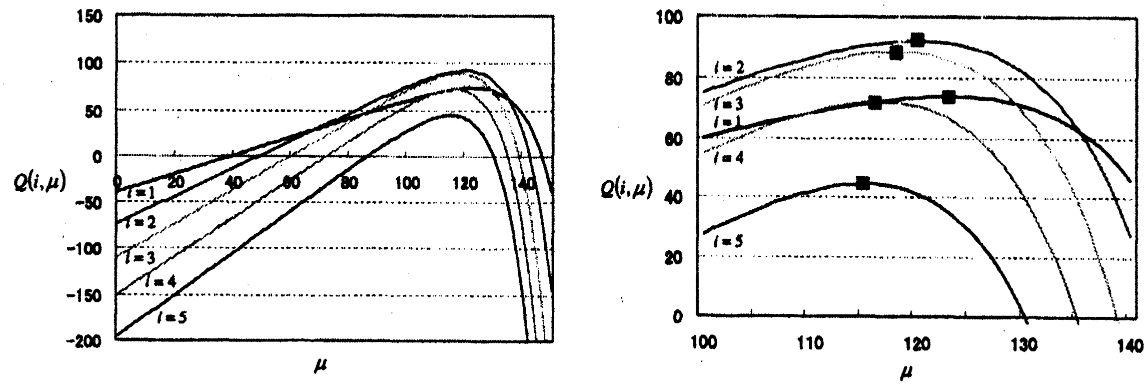

図 6: Case 2 における生産者の利益（右：左の拡大図）

続いて Case 1 において $Q(i,\mu)$，すなわち $P_i = \pi(i,\mu)$ としたときの生産者の利益を図 5 に示す．ここでは，$i = 1,2,3,4,5$ について示した．図 5 右は左の拡大図である．右図における黒い四角形は，各グラフにおける最大値を表す．4.2 節で導出したように，$i < j$ に対して $\mu_i^* > \mu_j^*$ になっていることが確認できる．このケースでは，任意の μ について i の値が小さなシステム，すなわち並列ユニット数が少ないシステムの方が生産者に大きな利益をもたらしている．よって，生産者はシステム S_1，つまり単一ユニットシステムを消費者が購入するようにシステムの価格 P_i とユニットの平均寿命 μ を設定すれば，自らの利益が最大になる．

続いて，Case 2 における $Q(i,\mu)$ を図 6 に示す．このケースでは，生産者に最も大きな利益を与えるのはシステム S_2 である．Case 1 と比較して，任意の μ についてユニットの製造原価が下がったため，ユニット数の大きい並列システムほどその製造原価が大きく下がり，生産者の利益が向上することになる．またこのケースでも，$i < j$ に対して $\mu_i^* > \mu_j^*$ になっていることが確認できる．

現実的なパラメータ設定の下，さまざまなケースについて数値実験を行った結果，モデル 1 に関しては i の値が小さなシステム S_i，特にほとんどのケースでは S_1，つまり単一ユニットシステムが生産者にとって最大の利益を与えた．この結果からこのモデルにおいては，システムユニットの並列化は生産者の利益増加には貢献しない，と言えるであろう．

5　モデル２：消費者がシステム信頼度にの対数に比例

消費者が購入するシステムは非常に重要で，システムの耐故障性を非常に重視するモデルを考える．

5.1　仮定

- $\tau = R$: ユニットの信頼度
- $a(R)$: 2 回微分可能で，下に凸の単調増加関数．$a'(R) > 0$, $a''(R) > 0$.
- 消費者は信頼度 R のシステムを使用することにより $-r\log_{10}(1-R)$ の収益を得る．

5.2　解析

システム S_i は i 個の並列ユニットからなるシステムなので，その信頼度は，$1-(1-R)^i$ となる．したがって，消費者がシステム S_i を購入したときの収益 $\pi(i,R)$ は，

$$\pi(i,R) = -r\log_{10}(1-R)^i = -ir\log_{10}(1-R) \tag{31}$$

となる．

よって，

$$Q(i,R) = -ir\log_{10}(1-R) - \{ia(R)+b_i\} \tag{32}$$

となる．

ある i に対して $Q(i,R)$ を最大にする R を R_i^* とする．$i<j$ に対して，

$$\begin{aligned} Q(j,R_i^*) - Q(i,R_i^*) &= -jr\log_{10}(1-R_i^*) - \{ja(R_i^*)+b_j\} - [-ir\log_{10}(1-R_i^*) - \{ia(R_i^*)+b_i\}] \\ &= -(j-i)r\log_{10}(1-R_i^*) - (j-i)a(R_i^*) - (b_j-b_i) \\ &= \frac{j-i}{i}\left[-ir\log_{10}(1-R_i^*) - ia(R_i^*) - \frac{i(b_j-b_i)}{j-i}\right] \end{aligned} \tag{33}$$

となる．よって，$\dfrac{i(b_j-b_i)}{j-i} \le b_i$，すなわち $b_j \le \dfrac{j}{i}b_i$ ならば，

$$\begin{aligned} Q(j,R_i^*) - Q(i,R_i^*) &\ge \frac{j-i}{i}[-ir\log_{10}(1-R_i^*) - ia(R_i^*) - b_i] \\ &= \frac{j-i}{i}Q(i,R_i^*) \end{aligned} \tag{34}$$

となる．よって，$b_j \le \dfrac{j}{i}b_i$，かつ $Q(i,R_i^*) > 0$ ならば，

$$0 < \frac{j-i}{i}Q(i,R_i^*) \le Q(j,R_i^*) - Q(i,R_i^*) \le Q(j,R_j^*) - Q(i,R_i^*) \tag{35}$$

となるので，$Q(i,R_i^*) < Q(j,R_j^*)$ となる．

表 2: モデル 2 の数値例におけるパラメータ

	b_i	r	a_0	β	$\tilde{R}$
Case 3	$10 \times (1.5)^i$	100	50	10	0.9
Case 4	$10 \times (1.5)^i$	100	50	10	0.95

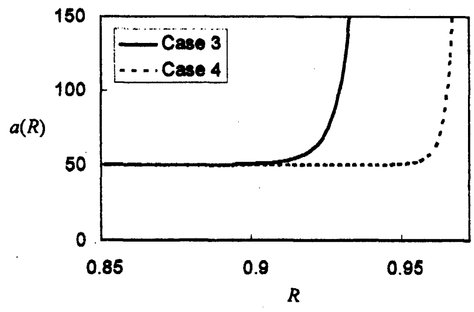

図 7: モデル 2 に対するユニット製造原価 $a(\mu)$

5.3 数値例

ここでは，製造原価を表す関数 $a(R)$ が次式で与えられる場合の数値例を示す．

$$a(R) = a_0 + \exp\left(\beta \frac{R - \tilde{R}}{1 - R}\right) - 1 \tag{36}$$

ここに $\tilde{R}$ は，モデル 1 における $\tilde{\mu}$ と同様，現状の技術で容易に達成可能な信頼度を表している．ユニットの信頼度をこれより大きくしようとするとその製造費は急激に大きくなるが，これより小さくしても製造費はほとんど小さくならないことを意味している．また，モデルに含まれる各種パラメータの値を表 2 のように設定する．このときの関数 $a(R)$ を図 7 に示す．

2 種類のシステム S_1, S_2 が販売される場合における消費者の利益構造を図 8 に示す．左図は $R = 0.9$ の場合，右図は $R = 0.93$ の場合である．ここでも 3 つの領域の存在が確認できる．これらの図から，システムの価格が大きくなると，消費者がシステムを購入しないことがわかる．左右の図を比較すると，R の値が大きくなると，どちらのシステムも購入しない領域 Ω_0 が小さくなることが確認できる．

2 種類のシステム S_1, S_2 が販売される場合における生産者の利益構造を図 9 に示す．左図は $R = 0.9$ の場合，右図は $R = 0.93$ の場合である．領域 Ω_m，領域 Ω_n のどちらにおいても，領域 Ω_0 との境界に近づくほど，生産者の利益が向上することが確認できる．右図では，領域 Ω_1，領域 Ω_2 ともに生産者は正の利益を上げることができないことがわかる．これは，R の値が大きいユニットの製造コストが大きいので，消費者が購入するような価格帯では利益がでないことを意味している．

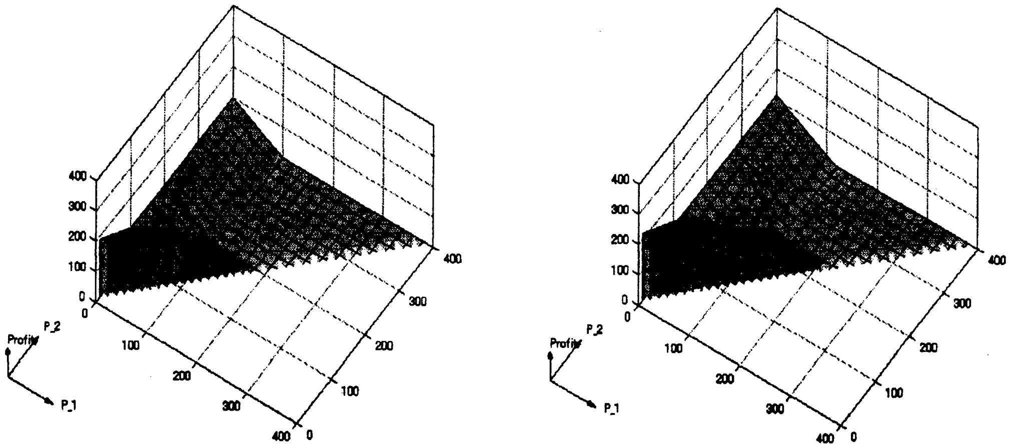

図 8: μ 一定下での消費者の期待利益（左：$R = 0.90$，右：$R = 0.93$）

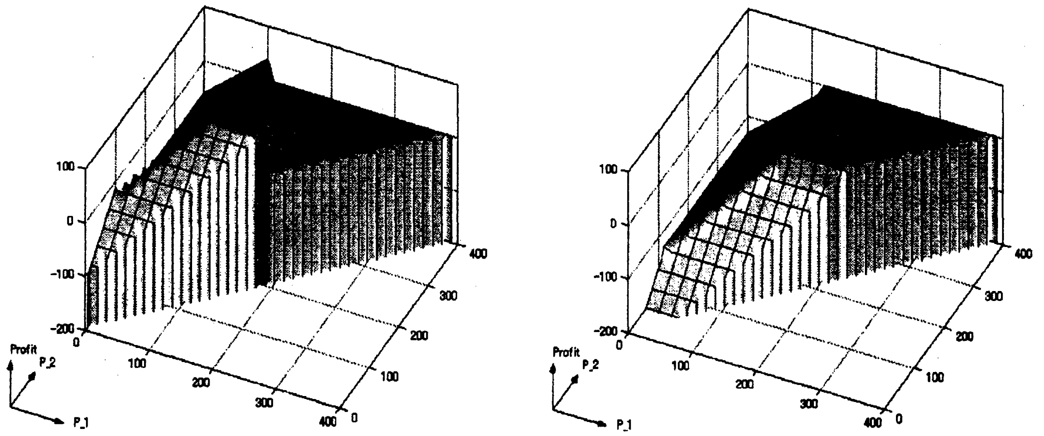

図 9: R 一定下での生産者の利益（左：$R = 0.90$，右：$R = 0.93$）

続いて Case 3 において $Q(i, R)$，すなわち $P_i = \pi(i, R)$ としたときの生産者の利益を図 10 に示す．ここでは，$i = 1, 2, 3, 4, 5$ について示した．図 10 右は左の拡大図である．右図における黒い四角形は，各グラフにおける最大値を表す．このケースでは，すべての i について，$Q(i, R)$ は $R = 0.912$ のときに最大値をとった．また並列ユニット数が多くなるほど，生産者にとって大きな利益をもたらす結果になった．

続いて，Case 4 における $Q(i, R)$ を図 11 に示す．このケースでも，$Q(i, R)$ を最大とする R は i に関わらず一定の $R = 0.956$ であった．また，生産者に最も大きな利益を与えるのは，最も並列ユニット数が大きい S_5 であった．

現実的なパラメータ設定の下，さまざまなケースについて数値実験を行った結果，概してモデル 2 に関しては i の値が大きなシステム S_i，つまり並列ユニット数の大きな並列冗長システムほど，生産者により大きな利益を与えた．ただし，システムユニットを並列化するのに必要な固定費である b_i が i の増加に応じて指数的に増加する場合は，生産者に最大利益をもたらす有限の並

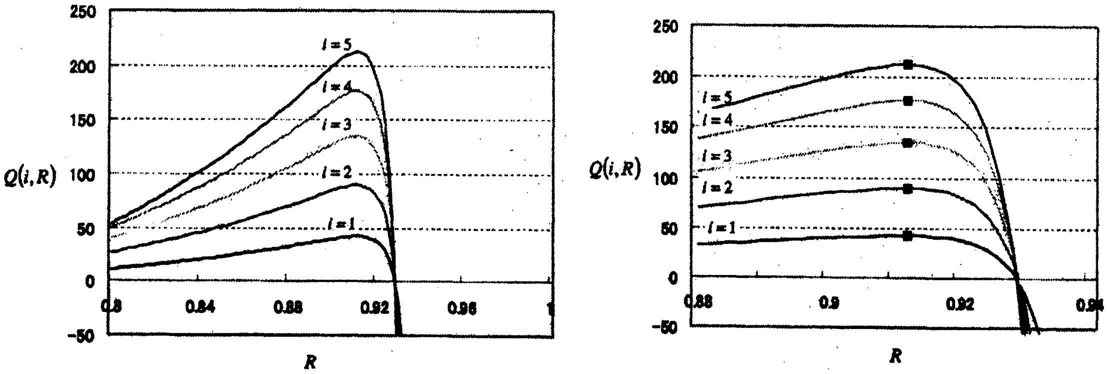

図 10: Case 3 における生産者の利益（右：左の拡大図）

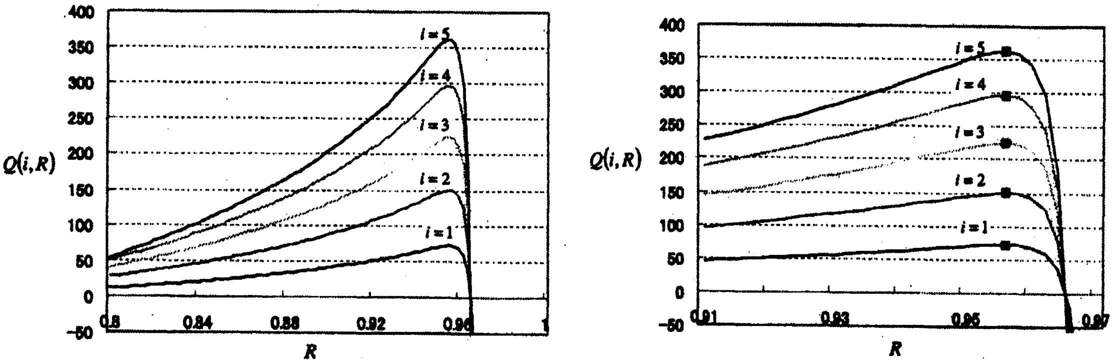

図 11: Case 4 における生産者の利益（右：左の拡大図）

列ユニット数が存在した．現実のシステムを考慮する場合，技術的な問題や製品の大きさが有限であるといった事情から，並列ユニット数を際限なく大きくすることは不可能である．よってこのモデルでは，生産者の利益を最大にする適当な並列ユニット数が存在し，ユニットの並列化によって生産者の利益は増加すると言える．

6 おわりに

本稿では，生産者の視点だけではなく消費者の視点も考慮したモデルを構築して，生産者にとって並列冗長システムが利益の増加に有益であるかを検討した．その結果，消費者の利得がシステムの寿命に比例する場合には，生産者は並列冗長システムを開発・販売しても，利益を増加させることが困難であることが示された．また消費者がシステムの耐故障性を重視する場合には，並列冗長システムは生産者の利益を増加させることができることが示された．

消費者の利得構造は，本稿で扱ったもの以外にも多数考えられる．今後の課題として，並列冗長システムが生産者にとって有益であるために必要な消費者の利得構造の条件について検討したい．

参考文献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967.

[2] S. Osaki, Stochastic Models in Reliability and Maintenance, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

[3] M. O. Ball, C. J. Colbourn and J. S. Provan, Network Reliability, in Handbook of Operations Research and Management Science: Network Models, ed. M. O. Ball et al., Elsevier, Amsterdam, 673-762, 1995.

[4] D. Fundenburg and J. Tirole, Game Theory, The MIT Press, Massachusetts, 1991.

[5] R. Gibbons, Game Theory for Applied Economics, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1992.

[6] Y-C. Hsieh, A linear approximation for redundant reliability problems with multiple component choices, Computers and Industrial Engineering 44(1), 91–103, 2003.

[7] W. Kuo and V. R. Prasad, An annotated overview of system-reliability optimization, IEEE Transactions on Reliability 49(2), 176–187, 2000.

[8] Y-C. Liang and A. E. Smith, An ant colony optimization algorithm for the redundancy allocation problem (RAP), IEEE Transactions on Reliability 53(3), 417–423, 2004.

[9] M. J. Osborne and A. Rubinstein, A Course in Game Theory, The MIT Press, Massachusetts, 1994.

[10] 信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.

[11] 三根久，河合一, 信頼性・保全性の基礎数理，日科技連，1984.