

# On a crystalline algorithm for three dimensional Gauss curvature flow

東京理科大学・理工学部 牛島 健夫 (Takeo K. Ushijima)  
Faculty of Science and Technology,  
Tokyo University of Science  
京都産業大学・理学部 柳下 浩紀 (Hiroki Yagisita)  
Faculty of Science,  
Kyoto Sangyo University

## 概要

本稿では、ガウス曲率流の、クリスタライン・アルゴリズムと呼ばれる方法による多面体近似について述べる。

閉凸曲面の各点がそこでのガウス曲率に比例する法線方向速度で変形するとき、そのような曲面の運動はガウス曲率流と呼ばれている。我々は、あるクラスの閉凸多面体に対して、各面のクリスタライン・ガウス曲率と呼ぶ量を定義した。さらに、閉凸多面体の各面がそのクリスタライン・ガウス曲率に比例する法線方向速度で変形する運動を導入し、それをクリスタライン・ガウス曲率流と名付けた。ある仮定のもとで、多面体の面の数を増やしていったとき、クリスタライン・ガウス曲率流の解が、ガウス曲率流の解に収束することがわかった (Ushijima & Yagisita [26])。本稿の主要部分は、この結果の紹介である。

## 1 導入

本稿では、滑らかな閉凸曲面のガウス曲率流を、いわゆるクリスタライン・アルゴリズムによって近似することを考える。

本稿の主結果は空間3次元内の曲面に対するものであるが、まず一般に、空間  $d$  次元内の閉凸超曲面の非等方ガウス曲率流と呼ばれるものを導入しよう。滑らかかつ閉じた狭義凸  $d-1$  次元超曲面  $\hat{W}$  を固定する。原点は  $\hat{W}$  で囲まれる領域の内部にあるものとし、 $\hat{W}$  のサポート関数  $\hat{h}: S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  を以下のように定める：

$$\hat{h}(\nu) = \max_{x \in \hat{W}} \langle x, \nu \rangle.$$

(ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は通常の内積を表す。) また、外向き単位法線ベクトルが  $\nu \in S^{d-1}$  となる点での  $\hat{W}$  のガウス曲率 (そこでの主曲率  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$

の積) を  $\hat{\kappa}(\nu)$  とおく. 次に, 滑らかかつ閉じた狭義凸  $d-1$  次元超曲面  $\Gamma$  に対して, 外向き単位法線ベクトルが  $\nu \in S^{d-1}$  となる点での  $\Gamma$  のガウス曲率を  $\kappa(\nu, \Gamma)$  とおき,

$$\kappa^{\hat{W}}(\nu, \Gamma) = \frac{\kappa(\nu, \Gamma)}{\hat{\kappa}(\nu)}$$

で定義される量を,  $\hat{W}$  に関する  $\Gamma$  の非等方ガウス曲率と呼ぶ. 時刻  $t > 0$  に依存する超曲面の族  $\{\Gamma(t)\}$  が, 各時刻  $t$  と外向き単位法線ベクトルが  $\nu \in S^{d-1}$  となる点で, 法線方向速度

$$V(\nu, t) = -\hat{h}(\nu) \frac{\kappa(\nu, \Gamma(t))}{\hat{\kappa}(\nu)} \quad (1)$$

で動く運動を  $\hat{W}$  に関する非等方ガウス曲率流といい, これを満たす超曲面の族  $\{\Gamma(t)\}$  を非等方ガウス曲率流の解と呼ぶ. すぐにわかることだが,

$$\Gamma(t) = (-dt)^{1/d} \hat{W}$$

は非等方ガウス曲率流の解である. このような解を自己相似解という. 上の定義で現れた,  $\hat{W}$  は, 問題の異方性を表現する図形であり, ウルフ図形と呼ばれている.  $\hat{W} = S^{d-1}$  の時, 発展法則 (1) を満たす運動は, 等方ガウス曲率流あるいは単にガウス曲率流と呼ばれる.

次に, クリスタライン・ガウス曲率流という, あるクラスの閉凸多面体の運動を定義しよう. 閉凸多面体  $\tilde{W}$  を固定し, 原点は  $\tilde{W}$  で囲まれる領域の内点になっているとする.  $\tilde{W}$  の面の個数を  $N$ , 第  $i$  面を  $\tilde{W}_i$ , 第  $i$  面の外向き法線ベクトルを  $\tilde{\nu}_i$ , 第  $i$  面の  $d-1$  次元ルベーク測度 (面積) を  $A_i$  とおき, 第  $i$  面のサポート関数  $\tilde{h}_i$  を

$$\tilde{h}_i = \max_{x \in \tilde{W}} \langle x, \nu_i \rangle$$

と定める. この  $\tilde{W}$  をウルフ多面体と呼ぶことにする. ここで, 我々は, 考える多面体のクラスをウルフ多面体  $\tilde{W}$  に関して許容なものに限ることにする. すなわち, 閉凸  $N$  面体  $\Gamma$  が,  $\tilde{W}$  許容多面体であるとは, 全ての  $i (= 1, 2, \dots, N)$  に対して,  $\Gamma$  の第  $i$  面  $\Gamma_i$  の外向き法線ベクトルが  $\tilde{\nu}_i$  に等しいことであると定義し, このような多面体のみを考えることにする. ウルフ多面体とそれに関して許容な凸多面体の例を図 1 にあげる.  $\Gamma_i$  の面積を  $A_i(\Gamma)$  として,  $\Gamma_i$  のクリスタライン・ガウス曲率を

$$\kappa_i^{\tilde{W}} = \frac{\tilde{A}_i}{A_i(\Gamma)}$$

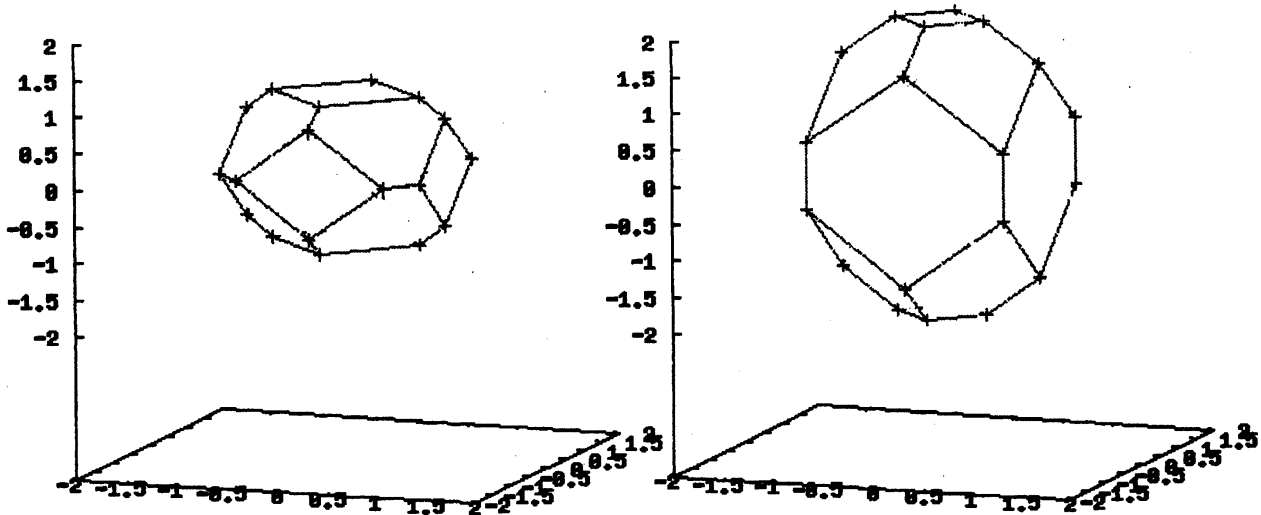


図 1: ウルフ多面体  $\tilde{W}$  (左) と  $\tilde{W}$  許容多面体 (右) の例

によって定義する. 時刻  $t > 0$  に依存する閉凸  $N$  多面体の族  $\{\Gamma(t)\}$  が, 各時刻  $t$  と外向き単位法線ベクトルが  $\nu \in S^{d-1}$  となる点で, 法線方向速度

$$V_i(t) = -\tilde{h}_i \frac{\tilde{A}_i}{A_i(\Gamma(t))} \quad (2)$$

で動く運動を  $\tilde{W}$  クリスタライン・ガウス曲率流といい, これを満たす族  $\{\Gamma(t)\}$  をクリスタライン・ガウス曲率流の解と呼ぶことにする.

$$\Gamma(t) = (-dt)^{1/d} \tilde{W}$$

は, クリスタライン・ガウス曲率流の自己相似解になっていることがわかる.

さて,  $\tilde{W}$  の列で  $\hat{W}$  に近づくものを考えた時, 対応するクリスタライン・ガウス曲率流の自己相似解の列は, 非等方ガウス曲率流の自己相似解に収束している. そこで, 我々が考えたいのは, 「 $\tilde{W}$  の列を何らかの意味で  $\hat{W}$  に近づけていった時に, 一般に, 対応するクリスタライン・ガウ

ス曲率流の解の列が非等方ガウス曲率流の解に収束するか？」という問題である。後で述べるように、 $d = 2$ の場合には、この問題は肯定的に解かれている。今回、 $d = 3$ で $\hat{W} = S^{d-1}$ の時に、ある仮定の下で、この問いに対する肯定的な結果が得られたので、本稿ではそれを紹介したい。なお、このようにクリスタライン・ガウス曲率流の解で、ガウス曲率流の解である滑らかな閉曲面を近似する手法をクリスタライン・アルゴリズムと呼んでいる。<sup>1</sup>

以下、第2節では非等方ガウス曲率流について既知の結果を、第3節ではクリスタライン・ガウス曲率流についての既知の結果を述べ、第4節で本稿の主結果を説明する。第5節ではいくつかの注意と今後の課題について述べる。

## 2 ガウス曲率流

空間次元  $d$  が 2 のとき、発展法則 (1) による閉曲線の時間発展に関しては、非常に多くのことが知られている。例えば、必ずしも凸とは限らない滑らかな初期曲線に対して、滑らかな解が一意的に存在し、有限時間で 1 点に消滅する。また、ウルフ図形が原点对称な場合には、非凸の初期曲線から出発しても、1 点に消滅する前にやがては凸になり、その後 1 点に消滅し、その漸近形はウルフ図形に相似な図形である。これらについては、[2, 7, 10, 11] などを、また、ウルフ図形が原点对称でない場合については [27] を参照されたい。

一方、空間次元  $d$  が 3 以上の時に関しては、あまり多くの結果が得られていないようである。 $\hat{W} = S^{d-1}$  の時に関しては、解の存在・一意性と一点消滅が Tso ([23]) や Chow ([8]) によって示されており、また、一点に消滅する直前の漸近形状は  $S^{d-1}$  であることが、Firey ([9]) や Andrews ([4]) によって示されている。Tso らの結果を  $d = 3$  の場合について定理の形で述べておく。

**定理 1**  $\hat{W} = S^2$  とし、 $\Gamma_0$  を滑らかな狭義凸閉曲面とする。このとき、 $\Gamma_0$  を初期値とする、ガウス曲率流 (1) の解  $\Gamma(t)$  が一意的に存在する。さらに、 $\Gamma(t)$  は、有限時刻  $T$  で一点に消滅するまで、滑らかかつ狭義凸のまま

<sup>1</sup> より一般の曲率に依存した移動境界問題を、同様の手法で近似する時にも、クリスタライン・アルゴリズムという用語が用いられている。

までである。ここで、消滅時刻  $T$  は

$$T = \frac{V(\Omega_0)}{3V(B^3)}$$

によって与えられる。 $\Omega_0$  は  $\Gamma_0$  で囲まれる開集合であり、 $V(B^3)$  及び  $V(\Omega_0)$  は単位球  $B^3$  及び  $\Omega_0$  の体積である。

### 3 クリスタライン・ガウス曲率流

この節では、クリスタライン・ガウス曲率流について、知られていることを述べる。まず、「クリスタライン」という用語の由来について説明したい。この用語を最初に導入したのは Taylor[22] と Angenent & Gurtin[1] であったと思われる。彼らは、結晶成長を数学的に取り扱うために、クリスタライン曲率流と呼ばれるものを導入した。<sup>2</sup>ウルフ図形  $W$  が、 $S^{d-1}$  上の関数  $\gamma$  によって

$$W = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, \nu \rangle = \gamma(\nu)\}$$

で与えられる時、閉超曲面  $S$  の表面エネルギーを

$$I(S) = \int_S \gamma(\nu) dS$$

と定める。ここで  $\nu$  は  $S$  の外向き単位法線ベクトルである。この  $I$  の勾配流は非等方平均曲率流と呼ばれる閉超曲面の運動になる。<sup>3</sup>特に、ウルフ図形が凸多面体の時、 $I$  をクリスタライン表面エネルギーと言い、その勾配流をクリスタライン平均曲率流、あるいは単に、クリスタライン曲率流と言う。Taylor らは、 $d=2$  の時には、クリスタライン曲率流が許容多角形のクラスの中で解をもって、その解が ( $d=2$  の時の) クリスタライン・ガウス曲率流となることを示した。すなわち、( $W$  に関して) 許容な多角形の各辺に対して、クリスタライン曲率 ( $d=2$  の時のクリスタライン・ガウス曲率) を定義し、許容多角形の各辺がそのクリスタライン曲率に比例する法線方向速度で法線方向のみに動く運動を考えた。このような運動をクリスタライン運動と言うのだが、クリスタライン運動がクリスタライン曲率流の解となることを示したのである。我々が第1節

<sup>2</sup>第1節で導入した、クリスタライン・ガウス曲率流とは異なるものである。

<sup>3</sup> $\gamma \equiv 1$  ならば (等方) 平均曲率流になる。

で導入したクリスタライン・ガウス曲率流は、 $d=2$ の時のクリスタライン運動を、単純に $d \geq 3$ に拡張して得られたものである。<sup>45</sup>

$d=2$ の場合のクリスタライン曲率流（クリスタライン・ガウス曲率流）については、これまでに多くの研究がなされている。クリスタライン・アルゴリズムに関しては、[12, 16, 17, 13, 14, 19, 24]などの研究があり、(1)の形のものだけでなく、より一般の曲率に依存する発展法則に従う曲線の運動がクリスタライン運動（クリスタライン・ガウス曲率流）によって近似できることがわかっている。特に、[14, 19]においては、必ずしも凸とは限らない曲線の運動についての近似定理が得られている。また、クリスタライン・アルゴリズムに基づいた数値スキームの研究も研究されており、このアルゴリズムで取り扱うことのできる問題のクラスの拡張も様々に行われている（[24, 25], etc.）。

$d=3$ の場合のクリスタライン・ガウス曲率流に関しては、以下のようなことが分かる。まず、クリスタライン・ガウス曲率流の解について、いわゆる比較定理が成立する。

**補題 1**  $\tilde{W}$  を狭義凸閉多面体とし、原点は $\tilde{W}$ の囲む領域の内点であるとする。  $t \in [0, T)$  に対して、 $\Gamma'(t)$  と  $\Gamma(t)$  が ( $\tilde{W}$ ) クリスタライン・ガウス曲率流の解であり、 $\Gamma'(0) \subset \Gamma(0) \cup \Omega(0)$  を満たすとするれば、 $\Gamma'(t) \subset \Gamma(t) \cup \Omega(t)$  が全ての  $t \in [0, T)$  に対して成立する。ここで、 $\Omega(t)$  は  $\Gamma(t)$  に囲まれる開集合である。

さらに、ガウス曲率流に対する、定理1に対応する結果として、以下のことがわかる。

**定理 2**  $\Gamma_0$  を  $\tilde{W}$  許容凸  $N$  面体、 $\Omega_0$  をそれが囲む開集合とする。  $\Gamma_0$  を初期値とする、( $\tilde{W}$ ) クリスタライン・ガウス曲率流の解が唯一つ存在し、体積  $V(\Gamma(t))$  は有限時間  $T$  でゼロになる。この消滅時刻  $T$  は

$$T = \frac{V(\Omega_0)}{3V(\tilde{W})}$$

で与えられる。  $V(\tilde{W})$  は  $\tilde{W}$  で囲まれる図形の体積である。

<sup>4</sup> $d \geq 3$  では、クリスタライン・ガウス曲率流は、上で定義したクリスタライン平均曲率流の解にはならない。

<sup>5</sup>元来「クリスタライン」という用語は  $d=2$  でこそ意味のある言葉であろうが、 $d \geq 3$  でもクリスタライン表面エネルギーなどの用語が使われていることを考え、クリスタライン・ガウス曲率流という用語を用いることにした。

なお、 $d \geq 3$  の場合のクリスタライン曲率流 (クリスタライン平均曲率流) についても、Taylor 以来、多くの研究があり、現在も精力的に研究されている。しかしながら、この問題に対するクリスタライン・アルゴリズムは未だ成功していない。その理由は、クリスタライン平均曲率流が解ける多面体のクラスが明らかでなく、さらに、一般には比較定理が成立しないためであると思われる。この辺りの事情について、より詳しいことは、[15, 5, 6]などを参照していただきたい。

## 4 主結果

さて、本節では、3次元等方的ガウス曲率流に対してはクリスタライン・アルゴリズムによって近似が可能であるという本稿の主結果について述べよう。

これ以降は  $k$  を近似の度合いを表すパラメータとし、大きな  $k$  ほど近似がよいものとする。  $\tilde{W}^k$  を凸  $N^k$  多面体で、原点に関して対称なものとする。この  $\tilde{W}^k$  に対して、 $(\tilde{W}^k)$  クリスタライン・ガウス曲率流が定まるが、その  $\Gamma_0^k$  を初期値とする解を  $\Gamma^k(t)$  とおく。  $\Omega^k(t)$  は  $\Gamma^k(t)$  で囲まれる開集合とする。  $S^2$  を  $\{P \in \mathbb{R}^3 \mid |P| = 1\}$  とし、  $d_H$  はハウスドルフ距離を表すものとする。

以下を仮定する：

(A1) 凸  $N^k$  多面体  $\tilde{W}^k$  は原点对称。

(A2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\tilde{W}^k, S^2) = 0$ .

(A3)  $\Gamma_0^k$  は  $\tilde{W}^k$  許容凸  $N^k$  多面体。

(A4)  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\Gamma_0^k, \Gamma_0) = 0$ .

これらの仮定の下に以下の定理が成立する。

**定理 3** (A1),(A2),(A3),(A4) を仮定する。  $\Gamma(t)$  を  $\Gamma_0$  を初期値とする等方ガウス曲率流の解、  $T$  をその消滅時間とする。また、  $\Gamma^k(t)$  を  $\Gamma_0^k$  を初期値とする  $\tilde{W}^k$  クリスタライン・ガウス曲率流の解とする。このとき、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、以下が成立する。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T - \epsilon} d_H(\Gamma^k(t), \Gamma(t)) = 0.$$

この結果の証明には, K. Ishii and H.M. Soner[19]による空間2次元の場合のクリスタライン・アルゴリズムの収束定理の証明手順を用いた. 空間2次元の場合との主たる違いは, 証明の中で, 楕円体をうまく近似する  $\tilde{W}^k$  許容凸多面体の列を構成しなければならない点にあるのだが, これは, いわゆる Minkowski 問題に対する理論 ([21]) を用いることで解決することができた. 詳しいことは, [26] を参照されたい.

## 5 注意と課題

本節では, いくつかの注意と今後の課題について述べる.

**注意 1** クリスタライン・ガウス曲率の定義は, 非等方ガウス曲率の自然な空間離散化になっている. 実際,  $S$  を超曲面  $\Gamma$  の微小部分とし,  $d\nu$  を  $S^{d-1}$  上の面積要素とすると,

$$(S \text{ の面積}) = \int_{\nu \in \{S \text{ の外向き単位法線ベクトル}\}} \frac{1}{\kappa(\nu, \Gamma)} d\nu$$

であるから, 非等方ガウス曲率について

$$\kappa^{\tilde{W}}(\nu, \Gamma) = \frac{\kappa(\nu, \Gamma)}{\hat{\kappa}(\nu)} = \frac{\tilde{W} \text{ の微小部分の面積}}{\Gamma \text{ の微小部分の面積}}$$

という関係式が成立する. この関係式最右辺を許容多面体に適用して得られるのがクリスタライン・ガウス曲率である.

**注意 2**  $\alpha$  を正のパラメータとして, (等方的) ガウス曲率流の発展法則 (1) の一つの一般化として

$$V = -\kappa^\alpha. \quad (3)$$

を考えよう. 任意の正の  $\alpha$  と任意の滑らかな凸曲面  $\Gamma_0$  に対して, この問題の解の存在と一意性が示されている [8]. さらに, この解は有限時間  $T$  で消滅する.

この問題に対応して, (2) を一般化したクリスタライン・ガウス曲率流

$$V_i(t) = -\tilde{h}_i \left( \frac{\tilde{A}_i}{A_i(\Gamma(t))} \right)^\alpha. \quad (4)$$

を考えると,  $\alpha = 1$  の場合と同様に, 比較定理・解の存在と一意性が示せる.



この一般化されたガウス曲率流に対しても、クリスタライン・アルゴリズムによる近似が可能であること、すなわち、(A1)から(A4)の仮定の下に、(4)の解が(3)の解に収束することが示せる：

さて、(4)の解  $\Gamma(t)$  についても、有限時刻でその囲む体積  $V(\Gamma(t))$  がゼロになることが示せるのだが、このとき1点に縮むとは限らない。例えば、立方体をウルフ図形として(4)を考え、平行六面体の初期値から出発する解は、線分・点・平面それぞれに縮退するように初期の平行六面体を選ぶことができる。実際、平行六面体の各面のサポート関数を  $h_i$  とし、 $h_1 = h_4$  かつ  $h_2 = h_3 = h_5 = h_6$  なる対称性を仮定しよう。このとき、問題は、以下のような常微分方程式系に帰着する：

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{1}{h_2^{2\alpha}}, \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{1}{h_1^\alpha h_2^\alpha}.\end{aligned}$$

$h_1^{-\alpha} \dot{h}_1 = h_2^{-\alpha} \dot{h}_2$  が成立するので、

$$h_1^{1-\alpha}(t) - h_2^{1-\alpha}(t) = h_1^{1-\alpha}(0) - h_2^{1-\alpha}(0),$$

となる。ここで  $\dot{\phantom{x}}$  は時間微分を表す。従って、 $0 < \alpha < 1$  の時には、 $h_1^{1-\alpha}(0) - h_2^{1-\alpha}(0) > 0$  ならば  $\Gamma(t)$  は線分に、 $h_1^{1-\alpha}(0) - h_2^{1-\alpha}(0) < 0$  ならば  $\Gamma(t)$  は平面になって体積がゼロになる。このようなことは、連続な問題(4)に対しては起こらないことであり、離散化による興味深い現象と言えるだろう。

空間2次元の場合には、このような縮退はすでに知られており、[20]などで、精力的に研究されている。

**注意 3** 定理3の仮定(A1)から(A4)を満たすウルフ図形の列及び初期曲面の列の存在を理論的に証明することはできるものの、具体的な構成の方法は今後の課題である。また、現在のところ、収束のオーダーについても明らかになっていない。

**注意 4**  $\tilde{W}^k$  が球面とは限らない一般のウルフ図形  $\tilde{W}$  に近づく場合に、クリスタライン・ガウス曲率流の解が  $\tilde{W}$  に対応する非等方ガウス曲率流の解に収束するかどうかは今後の課題である。

## 謝辞

本研究会での講演の機会を作って下さった、田端正久先生と櫻井鉄也先生に感謝申し上げます。また、この研究は科学研究費補助金若手研究(B)による支援を受けています(牛島: No. 16740061, 柳下: No. 16740099)。

## 参考文献

- [1] Angenent, S. and Gurtin, M. E., Multiphase thermomechanics with interfacial structure, 2. Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108 (1989), 323–391.
- [2] B. Andrews, Evolving convex curves, *Calc. Var.*, 7 (1998), 315–371.
- [3] B. Andrews, Motion of hypersurfaces by Gauss curvature, *Pacific J. Math.*, 195 (2000), 1–34.
- [4] B. Andrews, Gauss curvature flow: the fate of the rolling stones, *Inventiones mathematicae*, 138 (1999), 151–161.
- [5] G. Bellettini, M. Novaga, and M. Paolini, Facet-breaking for three-dimensional crystals evolving by mean curvature, *Interfaces Free Bound.*, 1 (1999), 39–55.
- [6] G. Bellettini, M. Novaga, and M. Paolini, Characterization of facet breaking for nonsmooth mean curvature flow in the convex case, *Interfaces Free Bound.*, 3 (2001), 415–446.
- [7] K.-S. Chou and X.-P. Zhu, A convexity theorem for a class of anisotropic flows of plane curves, *Indian Univ. Math. J.* 48 (1999), 139–154.
- [8] B. Chow, Deforming convex hypersurfaces by the  $n$ th root of the Gaussian curvature, *J. Differential Geometry*, 22 (1985), 117–138.
- [9] W. J. Firey, Shapes of worn stones, *Mathematika*, 21 (1974), 1–11.
- [10] M. E. Gage and R. S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Differential Geometry* 23 (1986), 69–96.

- [11] M. A. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Differential Geometry* 26 (1987), 285–314.
- [12] T. Fukui and Y. Giga, Motion of a graph by nonsmooth weighted curvature, *World Congress of Nonlinear Analysis '92* (ed. Lakshmikantham, V.), Walter de Gruyter, Berlin (1996) 47–56.
- [13] M.-H. Giga and Y. Giga, Stability for evolving graphs by nonlocal weighted curvature, *Commun. in PDE*, 24 (1999), 109–184.
- [14] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 159 (2001), 295–333.
- [15] Y. Giga, Y., M. E. Gurtin, and J. Matias, On the dynamics of crystalline motions, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 15 (1998), 7–50.
- [16] P. M. Girão, Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a simple closed convex curve by weighted curvature, *IAM J. Numer. Anal.* 32 (1995) 886–899.
- [17] P. M. Girão, and R. V. Kohn, Convergence of a crystalline algorithm for the heat equation in one dimension and for the motion of a graph by weighted curvature, *Numer. Math.* 67 (1994) 41–70.
- [18] P. M. Girão, and R. V. Kohn, The crystalline algorithm for computing motion by curvature, *Variational methods for discontinuous structures* (eds. Serapioni, R and Tomarelli, F.), Birkhäuser, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* 25 (1996), 7–18.
- [19] K. Ishii and H.M. Soner, Regularity and convergence of crystalline motion, *SIAM J. Math. Anal.*, 30 (1998), 19–37.
- [20] T. Ishiwata and S. Yazaki, On the blow-up rate for fast blow-up solutions arising in an anisotropic crystalline motion, *J. Comp. App. Math.*, 159 (2003), 55–64.
- [21] R. Schneider, *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993.

- [22] J. E. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, *Proceedings of the Conference on Differential Geometry*, Rio de Janeiro, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. 52 (1991) 321–336, Pitman London.
- [23] K. Tso, Deforming a hypersurface by its Gauss-Kronecker curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, 38 (1985), 867-882.
- [24] T. K. Ushijima and S. Yazaki, Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a closed convex curve by a power of curvature  $V = K^\alpha$ , *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2000) 500–522.
- [25] T. K. Ushijima and S. Yazaki, Convergence of a crystalline approximation for an area-preserving motion, *J Comp. Appl. Math.* 166 (2004) 427–452.
- [26] T. K. Ushijima and H. Yagisita, Convergence of a three-dimensional crystalline motion to Gauss curvature flow, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 22 (2005) 443-459.
- [27] H. Yagisita, Non-uniqueness of self-similar shrinking curves for an anisotropic curvature flow, *Calc. Var.*, to appear.