数理解析研究所講究録
1506 巻 2006 年 1-16

Comparison of the amounts of information in selection models

筑波大・数理物質　　友成　公治 (Kohji Tomonari)
Graduate School of Pure and Applied Science
University of Tsukuba
筑波大・数理物質　　赤平　昌文 (Masafumi Akahira)
Graduate School of Pure and Applied Science
University of Tsukuba

1　はじめに

統計的推測においては, 通常, 母集団分布から得られた無作為標本に基づいて未知の母数 θ を推測する. しかし, 必ずしも, その母集団分布から無作為標本を得ることができず, 標本空間, すなわち, 観測可能な標本全体を制限する場合がある. そこで, その母集団分布をどのように制限するかによって, そこからの無作為標本に基づく統計的実験と元の母集団分布からのものとの関係がどのようになっているかに関心を持つことはごく自然であり, Bayyarri and DeGroot [BD87], [BD89] などによって論じられている. たとえば, それぞれの実験における Fisher 情報量が調べられ, さまざまな制限方法について比較が行われている.

一般に, 母集団分布そのものから無作為標本を得られるとは限られず, ある制約条件の下で観測を行わなければならない場面は多い. 本論では, まず, [BD87] に従って正規分布, 指数型分布族の選択モデルにおける Fisher 情報量を調べ, 実験の比較について考察する. 次に, それらを踏まえて一定の条件下で Fisher 情報量を最大にする母集団分布の制限方法の 1 つとして最適な荷重関数を求め, 具体的な分布の場合について考える.

2　設定

確率変数 X が確率密度関数 (p.d.f.) $f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1)$ をもつ母集団分布に従い, X に基づいて未知の母数 θ を推測する場合を考える. このとき, 観測可能な確率変数 Y は元の標本空間の部分集合 S 上に制限されると考えられ, その制限母集団分布は p.d.f.

$$g(y,\theta) = \begin{cases} f(y,\theta)/P_X^{\theta}\{X \in S\} & (y \in S), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.1}$$

をもつと見なせる. ただし, すべての $\theta \in \Theta$ に対して, $P_X^{\theta}\{X \in S\} > 0$ とする. モデル (2.1) は選択モデル (selection model) または切断モデル (truncation model) と呼ばれ, (2.1) からの無作為標本は選択標本 (selection sample) と呼ばれる. また, (2.1) を一般化して, 非負値の荷重関数 $w(x)$ を用いて, その制限母集団分布が p.d.f.

$$g(x,\theta) = \frac{w(x)f(x,\theta)}{m(\theta)} \tag{2.2}$$

をもつとき, モデル (2.2) を一般選択モデルという. ここで, $m(\theta)$ の逆数は p.d.f. $g(x,\theta)$ の積分値が 1 になるような規準化定数とする. よって,

$$\int g(x,\theta)d\mu(x) = \int \frac{w(x)f(x,\theta)}{m(\theta)}d\mu(x) = \frac{1}{m(\theta)}\int w(x)f(x,\theta)d\mu(x) = \frac{1}{m(\theta)}E_{\theta}[w(X)] = 1$$

より, $m(\theta) = E_\theta[w(X)]$ である.

統計的推測においては, 必ずしも, 関心のある母集団分布から無作為標本を得られるとは限らず, 実験者が荷重関数 w を用いて観測対象を制限するような場合もある. そこで, 本論では, まず, 指数型分布族の選択モデルにおける情報量について論じる. 次に, 一般選択モデル (2.2) を考える場合に荷重関数 w をどのように取ればよいかについて考察する.

特に, 確率変数ベクトル $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ が k 母数指数型分布族の j.p.d.f.

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = C(\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\boldsymbol{x})\right\} \tag{2.3}$$

をもつとする. ただし, $\boldsymbol{\theta} := (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Theta$ で, Θ を $\mathbb{R}^k$ の開区間とし, $T_1, \cdots, T_k$ と h は $\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数とし, $Q_1, \cdots, Q_k$ と C は Θ 上の実数値関数とし, $k \leq n$ とする.

注意 2.1 (2.3) において, $\eta_j = Q_j(\boldsymbol{\theta})$ $(j = 1, \cdots, k)$ とすれば, (2.3) は,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) = D(\boldsymbol{\eta})h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \eta_j T_j(\boldsymbol{x})\right\}$$

の形になり, この指数型分布族は, 自然母数 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ をもつという. また, ϕ を有界な可測関数とするとき, 積分

$$\int \phi(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \eta_j T_j(\boldsymbol{x})\right\} d\boldsymbol{x}$$

の $\boldsymbol{\eta}$ に関する任意次数の微分は積分記号下で微分して得られる ([LR05]).

3 選択モデルにおける Fisher 情報量

3.1 未知の平均をもつ正規分布の選択モデル

まず, 正規分布の場合に, 選択モデル (2.1) の集合 S の取り方によって確率変数 Y のもつ情報量がどのようになるかを調べる. いま, 確率変数 X が正規分布 $N(\theta, 1)$ $(\theta \in \mathbb{R}^1)$ に従うとする. このとき, $I_X(\theta) = 1$ であることは明らかである ([A03]). いま, $\mathbb{R}^1$ のボレル集合 S について, $m(\theta) := P_X^\theta\{X \in S\}$ とし, p.d.f.

$$g(y, \theta) = \frac{\phi(y - \theta)}{m(\theta)} \quad (y \in S) \tag{3.1}$$

をもつ分布に従う確率変数を Y とする. ただし, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の p.d.f. とする. このとき,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log g(y, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \{\log \phi(y - \theta) - \log m(\theta)\} = y - \theta - \frac{m'(\theta)}{m(\theta)}$$

であるから, Y がもつ θ に関する Fisher 情報量は

$$\begin{aligned}
&I_Y(\theta) \\
=&E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} \log g(Y, \theta)\right\}^2\right] \\
=&\frac{1}{m(\theta)} \int_S (y - \theta)^2 \phi(y - \theta) dy - \frac{2m'(\theta)}{\{m(\theta)\}^2} \int_S (y - \theta)\phi(y - \theta) dy + \left\{\frac{m'(\theta)}{m(\theta)}\right\}^2 \int_S \frac{\phi(y - \theta)}{m(\theta)} dy
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\int_S (y-\theta)^2\phi(y-\theta)dy = \int_S \phi''(y-\theta)dy + \int_S \phi(y-\theta)dy,$$
$$\int_S (y-\theta)\phi(y-\theta)dy = -\int_S \phi'(y-\theta)dy$$

より,

$$I_Y(\theta) = 1 + \frac{1}{m(\theta)}\int_S \phi''(y-\theta)dy + \frac{2m'(\theta)}{\{m(\theta)\}^2}\int_S \phi'(y-\theta)dy + \left\{\frac{m'(\theta)}{m(\theta)}\right\}^2$$

となる. ただし, ϕ', ϕ'' は θ に関する微分であることに注意する. また, 今の場合, 注意 2.1 より, 微分と積分の順序交換が可能で,

$$\int_S \phi'(y-\theta)dy = -m'(\theta), \quad \int_S \phi''(y-\theta)dy = m''(\theta)$$

であるから,

$$I_Y(\theta) = 1 + \frac{m''(\theta)}{m(\theta)} - \left\{\frac{m'(\theta)}{m(\theta)}\right\}^2$$

となる.

(i) $S = [\tau, \infty)$ の場合. $m(\theta) = 1 - \Phi(\tau-\theta)$ より, $m'(\theta) = \phi(\tau-\theta)$, $m''(\theta) = (\tau-\theta)\phi(\tau-\theta)$ であるから, $M(x) := (1-\Phi(x))/\phi(x)$ (Mills' ratio) とおくと,

$$\frac{m''(\theta)}{m(\theta)} = \frac{(\tau-\theta)\phi(\tau-\theta)}{1-\Phi(\tau-\theta)} = \frac{\tau-\theta}{M(\tau-\theta)}, \quad \frac{m'(\theta)}{m(\theta)} = \frac{\phi(\tau-\theta)}{1-\Phi(\tau-\theta)} = \frac{1}{M(\tau-\theta)}$$

となる. よって,

$$I_Y(\theta) = 1 + \frac{\tau-\theta}{M(\tau-\theta)} - \left\{\frac{1}{M(\tau-\theta)}\right\}^2 = 1 + \frac{(\tau-\theta)M(\tau-\theta)-1}{\{M(\tau-\theta)\}^2}$$

となる. ここで,

$$1-\Phi(x) = \int_x^\infty \phi(u)du = -\int_x^\infty \frac{\phi'(u)}{u}du = \frac{\phi(x)}{x} - \int_x^\infty \frac{\phi(u)}{u^2}du < \frac{\phi(x)}{x} \quad (x>0)$$

であり, $\phi(x) > 0$ であるから,

$$xM(x) = x\cdot\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} < x\cdot\frac{1}{x} = 1 \tag{3.2}$$

となる. したがって, $\tau > \theta$ のとき, $I_Y(\theta) < 1$ である. また, $M(\tau-\theta) > 0$ であるから, $\tau \le \theta$ のときも $I_Y(\theta) < 1$ である. よって, 任意の選択点 τ に対し, すべての θ について $I_X(\theta) > I_Y(\theta)$ が成り立つ. また, 正規分布の下側の裾からの選択標本の場合も, 同様にして示すことができる.

(ii) $S=(-\infty,\tau_1]\cup[\tau_2,\infty)$ **の場合**. ただし, $\tau_1<\tau_2$ とする. このとき, $m(\theta)=1-\Phi(\tau_2-\theta)+\Phi(\tau_1-\theta)$ より, $m'(\theta)=\phi(\tau_2-\theta)-\phi(\tau_1-\theta)$, $m''(\theta)=(\tau_2-\theta)\phi(\tau_2-\theta)-(\tau_1-\theta)\phi(\tau_1-\theta)$ となるから,

$$
\begin{aligned}
&I_Y(\theta)\\
&=1+\frac{\{(\tau_2-\theta)\phi(\tau_2-\theta)-(\tau_1-\theta)\phi(\tau_1-\theta)\}\{1-\Phi(\tau_2-\theta)+\Phi(\tau_1-\theta)\}-\{\phi(\tau_2-\theta)-\phi(\tau_1-\theta)\}^2}{\{1-\Phi(\tau_2-\theta)+\Phi(\tau_1-\theta)\}^2}
\end{aligned}
$$

になる. 例えば, $\tau_1=0,\tau_2=2$ とすると, この場合, $I_X(0)>I_Y(0)$ であるが, $I_X(1)<I_Y(1)$ となっている.

(iii) $S=[\tau_1,\tau_2]$ **の場合**. このとき, (ii) と同様に計算すると,

$$
\begin{aligned}
&I_Y(\theta)\\
&=1-\frac{\{(\tau_2-\theta)\phi(\tau_2-\theta)-(\tau_1-\theta)\phi(\tau_1-\theta)\}\{\Phi(\tau_2-\theta)-\Phi(\tau_1-\theta)\}+\{\phi(\tau_2-\theta)-\phi(\tau_1-\theta)\}^2}{\{\Phi(\tau_2-\theta)-\Phi(\tau_1-\theta)\}^2}
\end{aligned}
$$

となり, 第2項の分子を整理すると, $I_Y(\theta)<1$ となる. したがって, すべての $\theta\in\mathbb{R}^1$ に対して $I_X(\theta)>I_Y(\theta)$ が示される.

3.2　指数型分布族の選択モデル

確率変数 X が次の形の p.d.f.

$$f^*(x,\eta)=\exp\{\eta T(x)+D(\eta)+S(x)\} \tag{3.3}$$

をもつ指数型分布族に従うとする. ただし, T, S は $\mathbb{R}^1$ 上で定義される実数値関数とする. このとき, $\mathbb{R}^1$ のボレル集合 A について, $m(\eta):=P_X^\eta\{X\in A\}$ とし, 確率変数 Y は, p.d.f.

$$g(y,\eta)=\frac{f^*(y,\eta)}{m(\eta)}\quad(y\in A) \tag{3.4}$$

をもつとする. Y が η に関してもつ Fisher 情報量を $I_Y^*(\eta)=E\left[-(\partial^2/\partial\eta^2)\log g(Y,\eta)\right]$ によって計算すると, (3.4) より,

$$-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\log g(y,\eta)=-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\log f^*(y,\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\log m(\eta)$$

であるから,

$$I_Y^*(\eta)=E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\log f^*(Y,\eta)\right]+\frac{d^2}{d\eta^2}\log m(\eta)$$

となる. いま, (3.3) より, $-(\partial^2/\partial\eta^2)\log f^*(y,\eta)=-(d^2/d\eta^2)D(\eta)$ となり, これは y に無関係であるから,

$$I_Y^*(\eta)=E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\log f^*(X,\eta)\right]+\frac{d^2}{d\eta^2}\log m(\eta)=I_X^*(\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\log m(\eta)$$

となる.

したがって, $I_Y^*(\eta)\ \geq\ I_X^*(\eta)$ がすべての η について成り立つための必要十分条件は, $\log m(\eta)$ が凸関数であることであり, $I_Y^*(\eta)\ \leq\ I_X^*(\eta)$ が, すべての η について成り立つための必要十分条件は, $\log m(\eta)$ が凹関数であることである.

補題 3.1 (Lehmann[L99]) 確率変数 X がもつ θ に関する Fisher 情報量を $I_X(\theta)$, $\eta = h(\theta)$ とし, η に関する Fisher 情報量を $I_X^*(\eta)$ とする. ただし, h は微分可能とする. このとき,

$$I_X^*(\eta) = \frac{I_X(\theta)}{\{h'(\theta)\}^2}$$

が成り立つ.

ここで, (3.3) において, $\eta = Q(\theta)$ とすると,

$$f(x, \theta) = \exp\{Q(\theta)T(x) + C(\theta) + S(x)\} \tag{3.5}$$

となる. ただし, $C(\theta) = D(\eta)$ とする. 補題 3.1 より, すべての θ に対して $I_Y(\theta) \geq I_X(\theta)$ が成り立つことは, すべての η に対して $I_Y^*(\eta) \geq I_X^*(\eta)$ が成り立つことと必要十分である. すなわち, 母数化の方法に無関係に, $I_Y^*(\eta)$ と $I_X^*(\eta)$ の関係が得られ, これらの関係を知るためには, 関数 $\log m(\eta)$ が凸か凹かさえ決定すればよい.

いま, τ を既知定数とし, $S = [\tau, \infty)$ とする. このとき, p.d.f. (3.5) に対応する c.d.f. を $F(x, \theta)$ とすると, $m(\theta) = 1 - F(\tau, \theta)$ になる. ここで, 分布 $F(\cdot, \theta)$ が絶対連続で, θ は位置母数, すなわち, $F(x, \theta) = F_0(x - \theta)$, または, 尺度母数, すなわち, $F(x, \theta) = F_0(\theta x)$ とする. このとき, $\log m(\theta)$ の 凸性または凹性はハザード比 (hazard ratio) 関数 $r_0(x) = f_0(x)/(1 - F_0(x))$ からわかる. ただし, $f_0(x) = (d/dx)F_0(x)$ とする. θ が位置母数または尺度母数であるとき, $I_Y(\theta) \geq I_X(\theta)$ と $r_0(x)$ が x の減少関数であることは同値である.

例 3.1 (ガンマ分布) X が既知の形状母数 α, 未知の尺度母数 β をもつガンマ分布に従う, すなわち, p.d.f.

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad (x > 0)$$

をもつとすると,

$$f_0(x; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad (x > 0)$$

であるから,

$$\frac{1}{r_0(x)} = \int_x^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-(t-x)} dt = \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-u} du \qquad (u := t - x)$$

となり, と変数変換すれば, となるから, $r_0(x)$ は, $0 < \alpha < 1$ のとき減少関数, $\alpha > 1$ のとき増加関数, $\alpha = 1$ のとき定数である. よって, $0 < \alpha < 1$ のとき $I_Y(\theta) \geq I_X(\theta)$, $\alpha > 1$ のとき $I_Y(\theta) \leq I_X(\theta)$, $\alpha = 1$ のとき $I_Y(\theta) = I_X(\theta)$ となる.

4 実験の比較

X を確率変数 (ベクトル), 標本空間を $\mathcal{X}$, X の (j.)p.d.f., または (j.)p.m.f. を $f(\cdot, \theta)$ $(\theta \in \Theta)$ とするとき, X に基づく統計実験を $\mathcal{E}_X = \{X, \mathcal{X}, f(\cdot, \theta), \theta \in \Theta\}$ で表す. また, 同様にして, 確率変数 (ベクトル)Y に基づく統計的実験を $\mathcal{E}_Y = \{Y, \mathcal{Y}, g(\cdot, \theta), \theta \in \Theta\}$ とする. この

とき, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して, X の変換 $Z(X)$ が存在して Y と同一の分布をもつとき, 実験 $\mathcal{E}_X$ が $\mathcal{E}_Y$ よりも十分 (sufficient) であるといい, $\mathcal{E}_X \gtrsim \mathcal{E}_Y$ と書く. また, すべての $\theta \in \Theta$ に対して, $I_X(\theta) - I_Y(\theta) \geq 0$ であるとき, $\mathcal{E}_X \gtrsim_F \mathcal{E}_Y$ と表す. 実は, $\mathcal{E}_X \gtrsim \mathcal{E}_Y$ が成り立つとき, $\mathcal{E}_X \gtrsim_F \mathcal{E}_Y$ が成り立つが, 逆は必ずしも成り立たない (例 4.1 参照).

例 4.1 確率変数 X が 2 項分布 $\mathrm{Bin}(n,p)$ に従うとする. ただし, n は既知, p $(0 < p < 1)$ は未知とする. このとき, X の確率量関数 (p.m.f.) は

$$f(x,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad (x = 0, 1, \cdots, n; q = 1-p)$$

となるから, $X = 0$ を除いた切断モデルの p.m.f. は,

$$g(y,p) = \frac{1}{1-q^n}\binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \quad (y = 1, \cdots, n) \tag{4.1}$$

となる. 関係 $\mathcal{E}_X \gtrsim \mathcal{E}_Y$ が成り立つためには, すべての p $(0 < p < 1)$ に対して,

$$\sum_{x=0}^{n} h(y,x) f(x,p) = g(y,p), \quad (y = 1, \cdots, n) \tag{4.2}$$

となるような確率的変換 $h(y,x)$ が存在しなければならず, その確率的変換 $h(y,x)$ は, 非負の関数で,

$$\sum_{y=1}^{n} h(y,x) = 1, \quad (x = 0, 1, \cdots, n)$$

となる.

任意の y の値と確率的変換 h に対して, (4.2) 式の左辺は p の多項式であるのに対し, (4.1) 式で与えられる右辺は多項式ではないから, 任意の p に対して (4.2) 式は成立するとは限らない. したがって, $\mathcal{E}_X \gtrsim \mathcal{E}_Y$ は成り立たない.

一方, $m(p) = \sum_{x=1}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - (1-p)^n$ であるから,

$$\log m(p) = \log\{1 - (1-p)^n\}$$

となり,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\log m(p) &= \frac{n(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}, \\
\frac{d^2}{dp^2}\log m(p) &= \frac{-n(n-1)(1-p)^{n-2}\{1-(1-p)^n\} - n(1-p)^{n-1}\cdot n(1-p)^{n-1}}{\{1-(1-p)^n\}^2} \\
&= \frac{n(1-p)^{n-2}\left[-(n-1)\{1-(1-p)^n\} - n(1-p)^n\right]}{\{1-(1-p)^n\}^2} \\
&= \frac{n(1-p)^{n-2}\{-n+1-(1-p)^n\}}{\{1-(1-p)^n\}^2} \\
&< 0
\end{aligned}$$

となり, 2 項分布は指数型分布族に属しているから, 第 3.2 節より, $\mathcal{E}_X \gtrsim_F \mathcal{E}_Y$ となる. また, このことから, $\mathcal{E}_Y \gtrsim \mathcal{E}_X$ が成り立たないことも示される.

5 一般の荷重関数の例

荷重関数 $w(\cdot)$ が集合 S の定義関数であると見なせるので, (2.1) は一般選択モデルの特別の場合を考えることができる. そこで, $w(\cdot)$ が定義関数でないような例を挙げる.

例 5.1 $f(x,\theta)$ を指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ の p.d.f., すなわち,

$$f(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}$$

とする. ただし, $\lambda(>0)$ は未知とする. このとき, $I_X(\lambda)=1/\lambda^2$ となる ([A03]). また,

$$w(x)=e^{-x/a}$$

とする. ただし, $a>0$ は定数とする. このとき,

$$\begin{aligned}m(\lambda)=E[w(X)]&=\int_0^\infty e^{-x/a}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}dx\\&=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}}\right)\int_0^\infty\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-(1/a+1/\lambda)x}dx\\&=\frac{1}{\lambda}\bigg/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

となるから,

$$g(x,\lambda)=\frac{w(x)f(x,\lambda)}{m(\lambda)}=\frac{e^{-x/a}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}}{\frac{1}{\lambda}/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}\right)}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-(1/a+1/\lambda)x}$$

になり, Y は指数分布 $\mathrm{Exp}(1/(1/a+1/\lambda))$ に従う. したがって, $I_Y(\lambda)=1/(\lambda^4(1/a+1/\lambda)^2)$ より, $I_X(\lambda)>I_Y(\lambda)$ となる.

6 最適な荷重関数

確率変数 X の p.d.f. を $f(x,\theta)$ とし, (2.2) によって $g(x,\theta)$ を定める. ここで, $0\le w(x)\le 1$ とし, $E_\theta[w(X)]$ は期待値の記号下で θ について微分可能とする.

定理 6.1 任意の α $(0<\alpha<1)$ について, $m(\theta_0)=\alpha$ で, $m'(\theta_0)=\beta$ (定数) という条件の下で, 荷重関数

$$w^*(x)=\begin{cases}1 & \left(\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2-\dfrac{2\beta}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)>k\alpha \text{ のとき}\right),\\ \gamma & \left(\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2-\dfrac{2\beta}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)=k\alpha \text{ のとき}\right),\\ 0 & \left(\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2-\dfrac{2\beta}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)<k\alpha \text{ のとき}\right)\end{cases}\tag{6.1}$$

は, Fisher 情報量 $I_Y(\theta_0):=E_{\theta_0}[\{(\partial/\partial\theta)\log g(Y,\theta_0)\}^2]$ を最大にする. ただし, k,γ は

$$\int w^*(x)f(x,\theta_0)d\mu(x)=\alpha,\tag{6.2}$$

$$\int w^*(x)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta_0)d\mu(x)=\beta\tag{6.3}$$

となる定数とする.

証明. まず, (2.2) より,

$$\log g(x,\theta) = \log w(x) + \log f(x,\theta) - \log m(\theta)$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log g(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta) - \frac{m'(\theta)}{m(\theta)}$$

となる. このとき, $m'(\theta_0)/m(\theta_0) = \beta/\alpha$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}
I_Y(\theta_0) &= \int \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log g(x,\theta_0)\right\}^2 g(x,\theta_0)d\mu(x)\\
&= \int \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) - \frac{\beta}{\alpha}\right\}^2 g(x,\theta_0)d\mu(x)\\
&= \int \left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right] g(x,\theta_0)d\mu(x)\\
&= \int \left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right] g(x,\theta_0)d\mu(x) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\\
&= \frac{1}{\alpha}\int \left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right] w(x)f(x,\theta_0)d\mu(x) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2
\end{aligned} \tag{6.4}$$

となり, 制約条件 $m(\theta_0) = \alpha$, $m'(\theta_0) = \beta$ を満たす荷重関数のうち, これを最大にするのが w^* であることを示せばよい. すなわち, その制約条件を満たす任意の荷重関数を w とし,

$$\begin{aligned}
L :=& \frac{1}{\alpha}\int \left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right] w^*(x)f(x,\theta_0)d\mu(x)\\
&- \frac{1}{\alpha}\int \left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right] w(x)f(x,\theta_0)d\mu(x)
\end{aligned}$$

とするとき, $L \geq 0$ となることを示せばよい. まず, 制約条件より w は

$$\int w(x)f(x,\theta_0)d\mu(x) = \alpha \tag{6.5}$$

を満たす. よって, (6.2) より

$$\int w^*(x)f(x,\theta_0)d\mu(x) = \int w(x)f(x,\theta_0)d\mu(x), \tag{6.6}$$

すなわち,

$$\int \{w^*(x) - w(x)\} f(x,\theta_0)d\mu(x) = 0 \tag{6.7}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\alpha}\int\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right]\{w^*(x)-w(x)\}f(x,\theta_0)d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\alpha}\int\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right]\{w^*(x)-w(x)\}f(x,\theta_0)d\mu(x) \\
&\qquad\qquad - k\left\{\int\{w^*(x)-w(x)\}\, f(x,\theta_0)d\mu(x)\right\} \\
&= \frac{1}{\alpha}\int\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) - k\alpha\right]\{w^*(x)-w(x)\}f(x,\theta_0)d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\int_{S_+}+\int_{S_0}+\int_{S_-}\right)\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) - k\alpha\right]\{w^*(x)-w(x)\}f(x,\theta_0)d\mu(x)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\begin{aligned}
S_+ &:= \left\{x \,\middle|\, \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) - k\alpha > 0\right\}, \\
S_0 &:= \left\{x \,\middle|\, \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) - k\alpha = 0\right\}, \\
S_- &:= \left\{x \,\middle|\, \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0)\right\}^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta_0) - k\alpha < 0\right\}
\end{aligned}
$$

とする．このとき，領域 S_0 では被積分関数は 0 であり，また，$0 \le w(x) \le 1$ より，$w^*(x)$ を (6.1) のようにとると，

$$
w^*(x) - w(x) = \begin{cases} 1 - w(x) \ge 0, & x \in S_+, \\ 0 - w(x) \le 0, & x \in S_- \end{cases}
$$

になり，$f(x,\theta_0) \ge 0$ より領域 S_+, S_- では被積分関数は非負であるから，$L \ge 0$ が示される．よって，w^* は制約条件を満たす w の中で $I_Y(\theta_0)$ を最大にする荷重関数である．□

例 6.1 確率変数 X が正規分布 $N(\theta,1)$ に従うとする．ただし，θ は未知とする．このとき，X の p.d.f. は，

$$
f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \quad \left(x \in \mathbb{R}^1;\ \theta \in \mathbb{R}^1\right)
$$

であるから，

$$
\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta) = x - \theta
$$

となり, 定理 6.1 において $\beta=0$ とすれば, (6.2) より $k=u_{\alpha/2}^2/\alpha$ となる. ただし, $u_{\alpha/2}$ は $N(0,1)$ の上側 $100(\alpha/2)$%点とする. このとき, $w_0^*(x)=1-\chi_{[-u_{\alpha/2},u_{\alpha/2}]}(x)$ とすれば,

$$w^*(x)=w_0^*(x-\theta_0)$$

となる. ただし, $\chi_A(\cdot)$ は A の定義関数とする. また,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)=(x-\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

となるから, この $w^*(x)$ は条件 (6.3) も満たし, このときの Y がもつ Fisher 情報量は,

$$\begin{aligned}
I_Y^{w^*}(\theta_0)&=\frac{1}{\alpha}\int_{|x|>u_{\alpha/2}}x^2\phi(x)dx\\
&=\frac{2}{\alpha}\left\{\int_{u_{\alpha/2}}^{\infty}(x^2-1)\phi(x)dx+\int_{u_{\alpha/2}}^{\infty}\phi(x)dx\right\}\\
&=\frac{2}{\alpha}\left\{\int_{u_{\alpha/2}}^{\infty}\phi''(x)dx+\frac{\alpha}{2}\right\}\\
&=1+\frac{2}{\alpha}u_{\alpha/2}\phi(u_{\alpha/2})
\end{aligned}$$

となる. 一方, 他の荷重関数として

$$w_1(x)\equiv\alpha,\quad w_2(x)=\chi_{(-u_{(1-\alpha)/2},u_{(1-\alpha)/2})}(x-\theta_0)$$

をとると, いずれの場合も $m(\theta_0)=\alpha$, $m'(\theta_0)=0$ となり, 定理 6.1 の条件 (6.2), (6.3) はともに満たされ, そのときの Y がもつ Fisher 情報量は, それぞれ

$$I_Y^{w_1}(\theta_0)=1,\quad I_Y^{w_2}(\theta_0)=1-\frac{2}{\alpha}u_{(1-\alpha)/2}\phi(u_{(1-\alpha)/2})$$

になり, それらの間には関係

$$I_Y^{w_2}(\theta_0)<I_Y^{w_1}(\theta_0)=1<I_Y^{w^*}(\theta_0)$$

が成り立つ.

注意 例 6.1 から, θ が位置母数の場合, すなわち, p.d.f. が $f(x,\theta)=f_0(x-\theta)$ の場合に f_0 が偶関数ならば, 定理 6.1 の条件を満たす荷重関数は存在する.

例 6.2 確率変数 X が $N(0,\theta)$ に従うとする. ただし, θ は未知とする. このとき, X の p.d.f. は,

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\quad(x\in\mathbb{R}^1;\ \theta>0)\tag{6.8}$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)=-\frac{1}{2\theta}+\frac{x^2}{2\theta^2}$$

となり, 定理 6.1 において $\beta = 0$ とすれば, 条件 (6.2) より, $u_{\alpha/2} > \sqrt{2}$ のとき,

$$w^*(x) = 1 - \chi_{[-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]}(x/\sqrt{\theta_0})$$

と $w^*(x)$ を決定できる. ところが,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(x,\theta) = \frac{1}{2\theta}\left(-1 + \frac{x^2}{\theta}\right) f(x,\theta)$$

より,

$$m'(\theta_0) = \frac{1}{2\theta_0}\left\{-\alpha + \int \frac{x^2}{\theta_0} w(x) f(x,\theta_0)dx\right\}$$

となるから, この $w^*(x)$ は条件 (6.3) を満たさない. したがって, 定理 6.1 から最適な荷重関数を決定することはできない.

そこで, S_0 を $\mathbb{R}^1$ のボレル集合とし, 荷重関数を $w(x) := \chi_{S_0}(x)$ ととると, $\beta = 0$ のクラスは,

$$\int_{S_0} f(x,\theta_0)dx = \alpha, \quad \int_{S_0} \frac{x^2}{\theta_0} f(x,\theta_0)dx = \alpha$$

を満たす S_0 を決定することによって定めることができる. $S_0 := \cup_{i=1}^k (\sqrt{\theta_0}a_i, \sqrt{\theta_0}b_i)$, $S := \cup_{i=1}^k (a_i, b_i)$ とし, $x/\sqrt{\theta_0}$ を x と置きなおすと,

$$\int_S \phi(x)dx = \alpha, \quad \int_S x^2\phi(x)dx = \alpha$$

となる. いま, $\phi(x)$, $x^2\phi(x)$ のグラフは図 6.1 のようになるから, S として, $S_1 = (-\infty, -\tau_{12}) \cup (-\tau_{11}, \tau_{11}) \cup (\tau_{12}, \infty)$, $S_2 = (-\tau_{22}, -\tau_{21}) \cup (\tau_{21}, \tau_{22})$ などの形が考えられ, 数値的に S_1, S_2 を求めることはでき, $\beta = 0$ となる荷重関数は存在する. このとき, それぞれの荷重関数に対応する Fisher 情報量は,

$$\begin{aligned}
I_Y(\theta_0) &= \int_{S_0} \left(-\frac{1}{2\theta_0} + \frac{x^2}{2\theta_0^2}\right)^2 \frac{f(x,\theta_0)}{\alpha} dx \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_{S_0} \left\{\frac{1}{2\theta_0}\left(-1 + \frac{x^2}{2\theta_0}\right)\right\}^2 f(x,\theta_0)dx \\
&= \frac{1}{\theta_0^2}\frac{1}{4\alpha}\int_S \left(-1 + y^2\right)^2 \phi(y)dy
\end{aligned}$$

となるから, $I_Y(\theta_0) = I_Y(1)/\theta_0^2$ である. よって, α によって決まる $I_Y(1)$ を比較すればよく, それは図 6.2 のようになる.

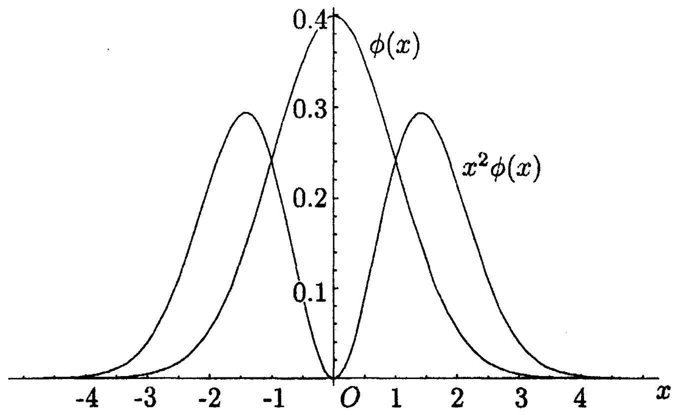

図 6.1 $\phi(x)$, $x^2\phi(x)$ のグラフ

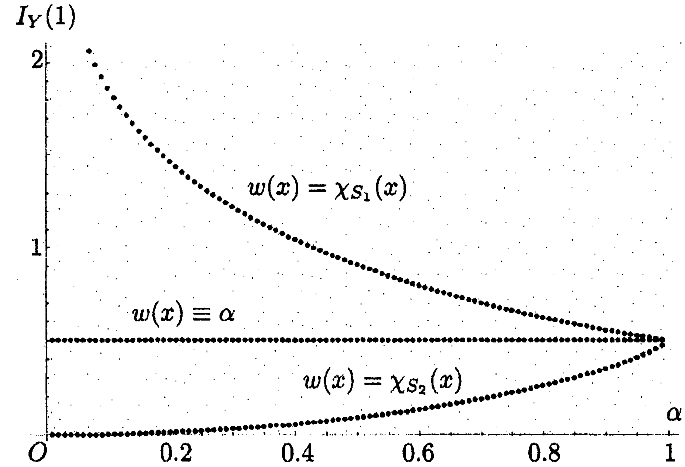

図 6.2 $\beta = 0$ を満たす荷重関数に対応する $I_Y(1)$ のグラフ

さらに, $m'(\theta_0) = \beta$ という条件を除き, 制約条件 $m(\theta_0) = \alpha$ のみによって決定されるクラスに属する代表的な荷重関数

$$\begin{aligned} w_1(x/\sqrt{\theta_0}) &= \chi_{(-u_{(1-\alpha)/2}, u_{(1-\alpha)/2})}, \\ w_2(x/\sqrt{\theta_0}) &= 1 - \chi_{[-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]}, \\ w_3(x/\sqrt{\theta_0}) &= \chi_{(u_\alpha, \infty)}, \\ w_4(x/\sqrt{\theta_0}) &\equiv \alpha \end{aligned}$$

について, $I_Y(\theta_0)$ を数値シミュレーションによって比較する. ただし, u_α は, $N(0,1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点とする. このとき, 荷重関数 w_1 について,

$$\begin{aligned} m'(\theta_0) &= \int_{-\sqrt{\theta_0}u_{(1-\alpha)/2}}^{\sqrt{\theta_0}u_{(1-\alpha)/2}} \frac{1}{2\theta_0}\left(-1 + \frac{x^2}{\theta_0}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_0}}e^{-\frac{x^2}{2\theta_0}}dx \\ &= \frac{1}{2\theta_0}\int_{-u_{(1-\alpha)/2}}^{u_{(1-\alpha)/2}} (-1 + y^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$A(\alpha) := \int_{-u_{(1-\alpha)/2}}^{u_{(1-\alpha)/2}} \left(-1+y^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

は，α の関数であるから，

$$\begin{aligned} I_Y(\theta_0) &= \int \left\{ \left(-\frac{1}{2\theta_0} + \frac{x^2}{2\theta_0^2} \right) - \frac{A(\alpha)}{2\theta_0 \alpha} \right\}^2 \frac{w_1(x) f(x,\theta_0)}{m(\theta_0)} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\sqrt{\theta_0} u_{(1-\alpha)/2}}^{\sqrt{\theta_0} u_{(1-\alpha)/2}} \left\{ \frac{1}{2\theta_0} \left(-1 + \frac{x^2}{2\theta_0} - \frac{A(\alpha)}{\alpha} \right) \right\}^2 f(x,\theta_0) dx \\ &= \frac{1}{\theta_0^2} \frac{1}{4\alpha} \int_{-u_{(1-\alpha)/2}}^{u_{(1-\alpha)/2}} \left\{ \left(-1 + y^2 - \frac{A(\alpha)}{\alpha} \right) \right\}^2 f(y,1) dy \end{aligned}$$

となるから，$I_Y(\theta_0) = I_Y(1)/\theta_0^2$ である．また，同様にして，w_2, w_3, w_4 についても $I_Y(\theta_0) = I_Y(1)/\theta_0^2$ が示される．このとき，α によって決まる $I_Y(1)$ は，図 6.3 のようになる．

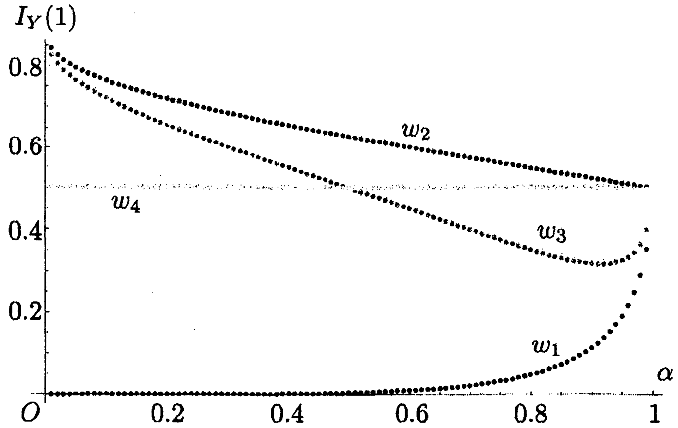

図 6.3 荷重関数の取り方と $I_Y(1)$ のグラフ

例 6.3 確率変数 X が $\mathrm{Exp}(\lambda)$ に従うとすると，X の p.d.f. は，

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad (x > 0;\ \lambda > 0)$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \log f(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2},$$

となり，定理 6.1 において，$\beta = 0$ とすると，条件 (6.2) より，v_α を Exp(1) の下側 $100\alpha\%$ 点として，$v_{1-\alpha} > \sqrt{2}$ のとき，

$$w^*(x) = \chi_{(v_{1-\alpha},\infty)}(x/\lambda_0)$$

となる．ところが，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(-1 + \frac{x}{\lambda} \right) f(x,\lambda)$$

より,

$$m'(\lambda_0) = \frac{1}{\lambda_0}\left\{-\alpha + \int \frac{x}{\lambda_0} w(x) f(x) dx\right\}$$

となるから, この w^* は条件 (6.3) を満たさず, 定理 6.1 によって Fisher 情報量を最大にする荷重関数を決定することはできない.

そこで, S_0 を $\mathbb{R}^1$ のボレル集合とし, 荷重関数を $w(x) := \chi_{S_0}(x)$ ととると, $\beta = 0$ のクラスは,

$$\int_{S_0} f(x, \lambda_0) dx = \alpha, \quad \int_{S_0} \frac{x}{\lambda_0} f(x, \lambda_0) dx = \alpha$$

を満たす S_0 を決定することによって定めることができる. $S_0 := \cup_{i=1}^k (\lambda_0 a_i, \lambda_0 b_i)$, $S := \cup_{i=1}^k (a_i, b_i)$ とし, x/λ_0 を x と置きなおすと,

$$\int_S f(x, 1) dx = \alpha, \quad \int_S x f(x, 1) dx = \alpha$$

となる. いま, $f(x,1)$, $xf(x,1)$ のグラフは図 6.4 のようになるから, S として, $S_1 = (0, \tau_{11}) \cup (\tau_{12}, \infty)$, $S_2 = (\tau_{21}, \tau_{22})$ などの形が考えられ, 数値的に S_1, S_2 を求めることはでき, $\beta = 0$ となる荷重関数は存在する. このとき, それぞれの荷重関数に対応する Fisher 情報量は,

$$\begin{aligned}
I_Y(\lambda_0) &= \int_{S_0} \left(-\frac{1}{\lambda_0} + \frac{x}{\lambda_0^2}\right)^2 \frac{f(x, \lambda_0)}{\alpha} dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{S_0} \left\{\frac{1}{\lambda_0}\left(-1 + \frac{x}{\lambda_0}\right)\right\}^2 f(x, \lambda_0) dx \\
&= \frac{1}{\lambda_0^2} \frac{1}{\alpha} \int_S (-1 + y)^2 f(y, 1) dy
\end{aligned}$$

となるから, $I_Y(\lambda_0) = I_Y(1)/\lambda_0^2$ である. よって, α によって決まる $I_Y(1)$ を比較すればよく, それは図 6.5 のようになる.

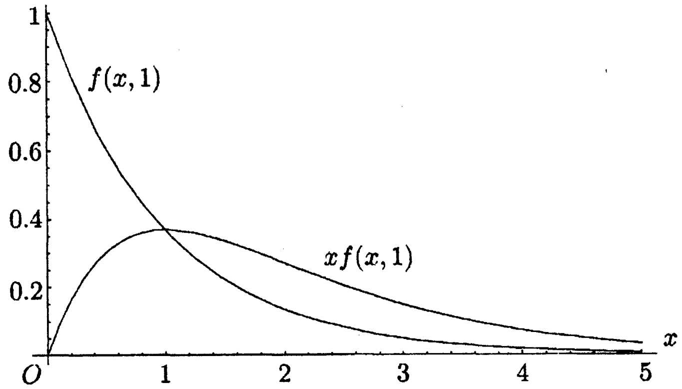

図 6.4 $f(x,1)$, $xf(x,1)$ のグラフ

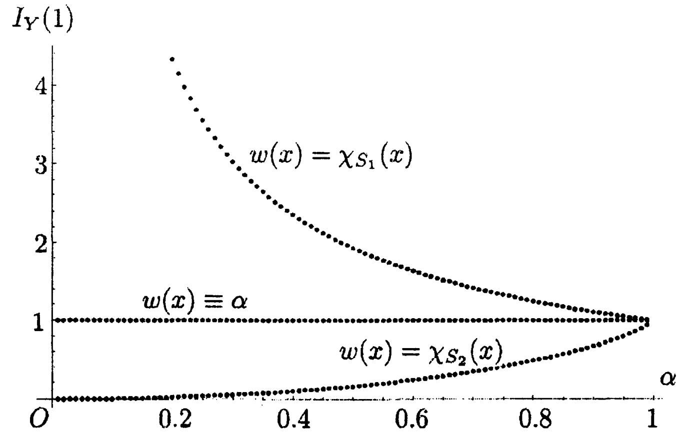

図 6.5 $\beta = 0$ を満たす荷重関数に対応する $I_Y(1)$ のグラフ

次に, 条件 $m(\lambda_0) = \alpha$ のみによって決定されるクラスに属する代表的な荷重関数

$$\begin{aligned}
w_1(x/\lambda_0) &= \chi_{(v_{(1-\alpha)/2}, v_{(1-\alpha)/2+\alpha})}, \\
w_2(x/\lambda_0) &= 1 - \chi_{[v_{\alpha/2}, v_{\alpha/2+1-\alpha}]}, \\
w_3(x/\lambda_0) &= \chi_{(0, v_\alpha)}, \\
w_4(x/\lambda_0) &= \chi_{(v_{1-\alpha}, \infty)}, \\
w_5(x/\lambda_0) &\equiv \alpha
\end{aligned}$$

について, $I_Y(\lambda_0)$ を数値シミュレーションによって比較する. ただし, v_α は, Exp(1) の下側 $100\alpha\%$ 点とする.

このとき, 荷重関数 w_1 について,

$$\begin{aligned}
m'(\lambda_0) &= \int_{\lambda_0 v_{(1-\alpha)/2}}^{\lambda_0 v_{(1-\alpha)/2+\alpha}} \frac{1}{\lambda_0}\left(-1 + \frac{x}{\lambda_0}\right)\frac{1}{\lambda_0} e^{-x/\lambda_0} dx \\
&= \frac{1}{\lambda_0}\int_{\lambda_0 v_{(1-\alpha)/2}}^{\lambda_0 v_{(1-\alpha)/2+\alpha}} (-1+y)e^{-y} dy
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$A(\alpha) := \int_{\lambda_0 v_{(1-\alpha)/2}}^{\lambda_0 v_{(1-\alpha)/2+\alpha}} (-1+y)e^{-y} dy$$

は, α の関数であるから,

$$\begin{aligned}
I_Y(\lambda_0) &= \int \left\{\left(-\frac{1}{\lambda_0} + \frac{x}{\lambda_0^2}\right) - \frac{A(\alpha)}{\lambda_0 \alpha}\right\}^2 \frac{w_1(x) f(x, \lambda_0)}{m(\lambda_0)} dx \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_{v_{(1-\alpha)/2}}^{v_{(1-\alpha)/2+\alpha}} \left\{\frac{1}{\lambda_0}\left(-1 + \frac{x}{\lambda_0} - \frac{A(\alpha)}{\alpha}\right)\right\}^2 f(x, \lambda_0) dx \\
&= \frac{1}{\lambda_0^2}\frac{1}{\alpha}\int_{v_{(1-\alpha)/2}}^{v_{(1-\alpha)/2+\alpha}} \left\{\left(-1 + y^2 - \frac{A(\alpha)}{\alpha}\right)\right\}^2 f(y, 1) dy
\end{aligned}$$

となるから, $I_Y(\lambda_0) = I_Y(1)/\lambda_0^2$ である. また, 同様にして, w_2, w_3, w_4, w_5 についても $I_Y(\lambda_0) = I_Y(1)/\lambda_0^2$ が示される. このとき, α によって決まる $I_Y(1)$ は, 図6.6のようになる.

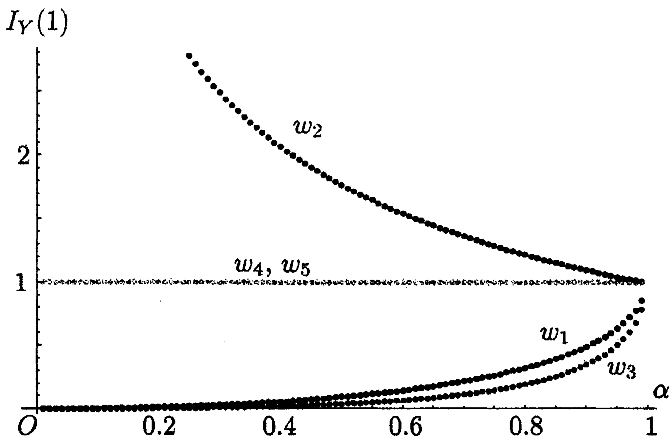

図 6.6 荷重関数の取り方と $I_Y(1)$ のグラフ

7 おわりに

本論においては, 選択モデルの評価および Fisher 情報量を用いた. 特に正規分布, 指数型分布族の選択モデルについて考察し, ある制約条件の下で, 母数のある値に対応する Fisher 情報量を最大にするという意味で最適な荷重関数を求めた. しかし, 制約条件を満たす最適な荷重関数が存在しない場合もあるので, そのときには制約条件を緩めていくつかの荷重関数について Fisher 情報量を求めて比較した. Fisher 情報量は, 不偏推定量の分散の下界を与える情報不等式に関係しているので, 今後は, 選択モデルと情報不等式との関係について考察していくことなどが考えられる.

参考文献

[A03] 赤平昌文 (2003). 統計解析入門. 森北出版.

[BD87] Bayyarri, M. J. and DeGroot, M. H. (1987). Information in selection models. In: *Probability and Bayesian Statistics*, (R. Viertl, ed.), Plenum Press, New York, 39-51.

[BD89] Bayyarri, M. J. and DeGroot, M. H. (1989). Comparison of experiments with weighted distributions. In: *Statistical Data Analysis and Inference*, (Y.Dodge, ed.), Elesvier Science Pubbishers B. V. (North Holland), 185-197.

[L59] Lehmann, E.L. *Testing Statistical Hypotheses.* Wiley, New York. (渋谷政昭, 竹内啓 訳 (1969). 統計的検定論. 岩波書店.)

[L99] Lehmann, E.L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory.* Springer, New York.